ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ ΣΤΑ ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ. ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Γ. Τσίντσιφας

Η εργασία αναφέρεται στα κυρτά σύνολα και περιλαμβάνει δύο τμήματα. Στο πρώτο ορίζεται η κατά Minkowski άθροιση των κυρτών συνόλων και γίνεται προσπάθεια μιάς συστηματικής παρουσίασης των Mixed Area στο επίπεδο, βλ [1], [2].
Στο δεύτερο μέρος γίνεται μιά πρωτότυπη μελέτη σε ισοπεριμετρικά θέματα. Αποδεικνύουμε την ανισότητα του Minkowski την ισοπεριμετρική ανισότητα του Bonnesen και παρουσιάζουμε μερικές άλλες του αυτού style ανισότητες.

1. Άθροισμα Σημείων

Σε επίπεδο π θεωρούμε σύστημα αναφοράς με αρχή το O. Σε κάθε ζεύγος σημείων A,B μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μονότιμα το σημείο Γ απο τη σχέση

$$\vec{O\Gamma}=\vec{OA}+\vec{OB}. \qquad (1)$$

Συμβολίζουμε: Γ=A+B.

Θα λέμε οτι το σημείο Γ είναι το άθροισμα των σημείων A,B.

Εύκολα βλέπουμε οτι είναι:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$
3. $A+0=A$
4. $A+(-A)=0$.

Αν $\lambda \in R$ και A τυχόν σημείο του επιπέδου, το σημείο B ώστε:

$$B=\lambda A$$

ορίζεται απο τη σχέση

$$\vec{OB}=\lambda\vec{OA}$$

Προκύπτει οτι:

1. $\lambda(\mu A)=\lambda\mu A$
2. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
3. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
4. $1.A=A$.

Θεώρημα:

Αν A_1,A_2 δύο τυχόντα σημεία και Μ τυχόν σημείο του ευθυγράμμου τμήματος A_1A_2, θα είναι.

$$M=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$$

όπου $\lambda_1,\lambda_2 \geq 0$ και $\lambda_1+\lambda_2=1$.

2. Η κατά Minkowski άθροιση των κυρτών συνόλων.

Έστω F_1,F_2 δύο κυρτά πεπερασμένα σύνολα και A_1,A_2 δύο τυχόντα σημεία αυτών αντίστοιχα.
Το σύνολο των σημείων A, όπου:

$$A=A_1+A_2$$

θα ονομάζεται κατά Minkowski άθροισμα των F_1,F_2, ή απλά άθροισμα των F_1,F_2.
Αποδεικνύονται εύκολα:

$$F_1+F_2=F_2+F_1$$
$$(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3).$$

Το σκαληνό γινόμενο λF $(\lambda \in R)$ είναι η ομοιοθεσία κέντρου Ο καί λόγου λ του σχήματος F.

Ακόμη:

$$\lambda(F_1+F_2)=\lambda F_1+\lambda F_2$$

και γιά λ.μ ομόσημα

$$(\lambda+\mu)F=\lambda F+\mu F.$$

Το σχήμα $\overset{*}{F}=\dfrac{F+(-F)}{2}$ έχει κέντρο συμμετρίας και λέγεται συμμετροειδές του F.

Η άθροιση δύο σχήματων μπορεί να γίνει εύκολα αν έχουμε υπόψη μας τις παρακάτω δύο απλές προτάσεις.

α) Η άθροιση σχήματος F και σημείου M ισοδυναμεί με την μεταφορά του σχήματος κατά διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$.

β) Το σχήμα F_1+F_2 κατά τις αλλαγές του σύστήματος αναφοράς ή κατά τις μεταφορές των F_1,F_2 υφίσταται παράλληλη μεταφορά.

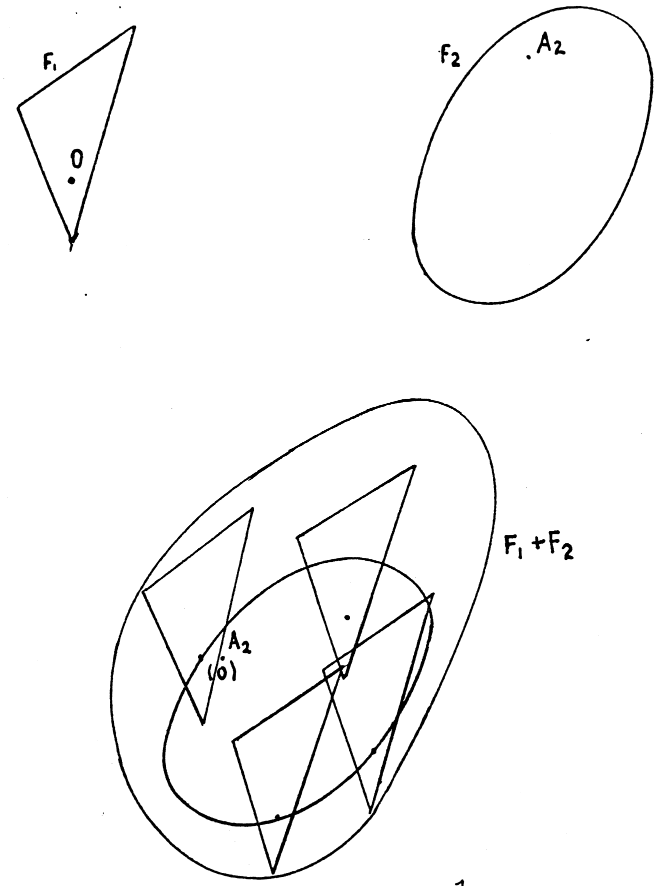
Ας υποθέσουμε οτι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα F_1+F_2 όπου F_1,F_2 τυχόντα κυρτά σχήματα.

Μεταφέρουμε την αρχή O στο εσωτερικό του F_1 και έστω $A_2\in F_2$.
Το άθροισμα F_1+A_2 ισοδυναμεί με μεταφορά του F_1 κατά $\overrightarrow{OA_2}$.
Οταν το A_2 διαγράφει το F_2 το άθροισμα F_2+A_2 δίδει το σχήμα F_1+F_2, βλ. σχ. (1), (2).

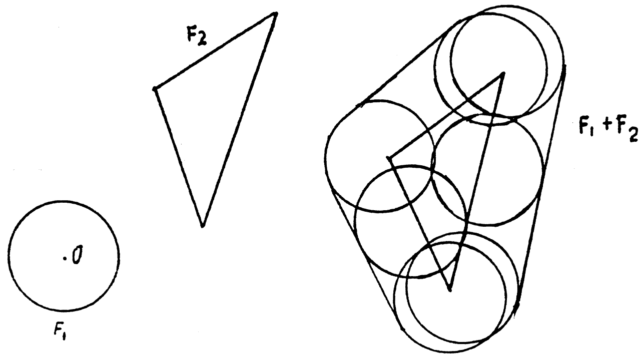
Θεώρημα.

Αν F_1,F_2 κυρτά σχήματα, το σχήμα F_1+F_2 είναι επίσης κυρτό.

σχ. 1 σχ. 2



σχ. 1



σχ. 2

3. Mixed Area.

Έστω F_0, F_1 κυρτά πολύγωνα με n πλευρές παράλληλες*

αντίστοιχα μεταξύ τους. $F_0=\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_n$, $F_1=P_1P_2\cdots P_n$

Θέτομε A_0 το εμβαδόν του F_0 και a_{0i} το μήκος της πλευράς του, αντίστοιχα A_1, a_{1i}.

Έστω $F_s=sF_0+s'F_1$ με $s,s'>0$ και $s+s'=1$. Ως γνωστό το F_s είναι κυρτό πολύγωνο με n πλευρές παράλληλες αντίστοιχα προς τις πλευρές των F_0,F_1. Το σημείο 0_o περιέχεται στο εσωτερικό του F_0 και το 0_1 στο εσωτερικό του F_1. h_{0i}, h_{1i} είναι οι αποστάσεις των 0_o, 0_1 απο τις πλευρές a_{0i}, a_{1i} αντίστοιχα.

Θα έχουμε:

$a_i=sa_{0i}+s'a_{1i}$ οπου a_i η αντίστοιχη πλευρά του F_s.

$h_i=sh_{0i}+s'h_{1i}$ οπου h_i η απόσταση του σημείου $0_s=s0_o+s'0_1$, σημείου εσωτερικού του F_s, απο την a_i.

Αν τώρα τεθεί A_s το εμβαδόν του F_s, είναι:

$$A_s=\frac{1}{2}\sum_1^n a_ih_i \qquad ή$$

$$A_s=\frac{1}{2}\sum_1^n s^2a_{0i}h_{0i}+\frac{1}{2}\sum_1^n ss'a_{01}h_{1i}+\frac{1}{2}\sum_1^n ss'a_{1i}h_{0i}+\frac{1}{2}\sum_1^n s'^2a_{1i}h_{1i}$$

Αλλά $A_0=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{0i}h_{0i}$, $A_1=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{1i}h_{1i}$.

Θέτουμε:

$$A_{01}=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{0i}h_{1i}, \qquad A_{10}=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{1i}h_{0i}.$$

---

* Δύο πολύγωνα F_0,F_1 με πλευρές μ,ν μπορούν να θεωρηθούν σαν δύο πολύγωνα με μ+ν=n πλευρές αντίστοιχα παράλληλες μεταξύ τους. Αρκεί να θεωρήσουμε οτι το F_0 εχει ν πλευρές ίσες προς 0 παράλληλες πρός τις πλευρές του F_1 και τ'ανάπαλιν.

Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι $A_{01}=A_{10}$.

Για απλότητα μεταφέρουμε το F_1 έτσι ώστε να συμπέσουν τα O_o, O_1. Θεωρούμε οτι το F_1 μεταφερόμενο περιέχεται στο εσωτερικό του F_0.(αν όχι δεν μεταβάλλεται η απόδειξη, η οποία ουσιαστικά παραμένει η ίδια και αν ακόμη δεν γίνει η μεταφορά του F_1).

Έχουμε:

$$A_{01}=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{0i}h_{1i}=\frac{1}{2}\sum_1^n a_{0i}(h_{0i}-d_i) \qquad (1)$$

όπου $h_{0i}=d_i+h_{1i}$.

Αλλά η (1) γράφεται

$$A_{01}=A_0-\Sigma(P_i\Lambda_{i+1}P_{i+1})=A_1+\Sigma(\Lambda_iP_i\Lambda_{i+1})=A_{10}$$

Η ποσότητα $A_{01}=A_{10}$ ονομάζεται Mixed Area των F_0,F_1.

Συνεπώς:

$$A_s=s^2A_0+2ss'A_{01}+s'^2A_1 \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις.

1.Απο τα προηγούμενα φαίνεται οτι τα mixed area είναι αμετάβλητα απο τις μεταφορές των F_0,F_1.Το αύτό για το A_s.

2.Τα mixed area είναι αμετάβλητα απο τις αλλαγές των O_o,O_1 εντός των F_0,F_1.

Πράγματι, αν μεταβληθεί το O_1, ενώ το O_o είναι αμετάβλητο, το $A_{10}=\frac{1}{2}\sum_1^n h_{0i}a_{1i}$ παραμένει αμετάβλητο. Στη συνέχεια μεταβάλλουμε το O_o, κλ.

3. Αν $F_0=F_1$, τότε $A_{01}=A_{10}=A_0$.

Συνηθισμένοι συμβολισμοί και οι οποίοι θα χρησιμοποιούνται απ'εδώ και στο εξής, είναι:

$$V(F_0,F_1)= A_{01}, \quad V(F_1,F_0)= A_{10}$$

$$V(F_0)=V(F_0,F_0)=A_0$$

$$V(F_1)=V(F_1,F_1)=A_1.$$

3.2

Έστω τώρα οτι F_0, F_1 κυρτά σχήματα ώστε $\vartheta F_0, \vartheta F_1$, smooth rectifiable curves (έτσι ώστε να υπάρχει μία εφαπτομένη σε κάθε σημείο και να ορίζεται το μήκος της καμπύλης) επί πλέον να ορίζεται το εμβαδόν (κατά τον συνήθη τρόπο, κατά Jordan).

Το μήκος του ϑF_0 δίδεται απο το τύπο:

$$L_0 = \int_0^{2\pi} p_0(\vartheta)\,d\vartheta$$

όπου $p_0(\vartheta)$ η support function και ϑ η γωνία με σταθερά διεύθυνση.

Το εμβαδόν $A_0 = \oint p_0(s_0)\,ds_0$ όπου s_0 το τόξο επί του ϑF_0.
Εαν επί πλεόν θεωρήσουμε οτι για κάθε σημείο της κυρτής καμπύλης υπάρχει πεπερασμένη καμπυλότης διάφορος του μηδενός, βρίσκουμε:

$$L_0 = \oint ds_0 = \int_0^{2\pi} \rho(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_0(\vartheta)\rho(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p_0^2(\vartheta) - \dot{p}_0^2(\vartheta))\,d\vartheta.$$

Η ακτίνα καμπυλότητας ως γνωστόν είναι:

$$\rho_o(\vartheta)=p_o(\vartheta)+\ddot{p}_o(\vartheta).$$

Αν τώρα $s,s'>0$ και $s+s'=1$, και τεθεί

$$F=sF_0+s'F_1 \tag{0}$$

θα έχουμε:

$$A=\oint(sp_o+s'p_1)(sds_o+s'ds_1)$$

όπου $\qquad p=sp_o+s'p_1$

A το εμβαδόν του F. p support function και s το τόξο του ∂F. (Προφανώς εδώ δεν γίνεται σύγχυση μεταξύ των s,s' που μπαίνουν στο τύπο (0) και στο τόξο s του ∂F).

Θα έχουμε:

$$ds=(s\rho_o+s'\rho_1)d\vartheta=sds_o+s'ds_1$$

Αρα:

$$A=\frac{1}{2}s^2\oint p_o ds_o+\frac{1}{2}ss'\oint p_1 ds_o+\frac{1}{2}ss'\oint p_o ds_1+\frac{1}{2}s'^2\oint p_1 ds_1.$$

Θέτουμε: $A_{01}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_1 ds_o$ και $A_{10}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_o ds_1$.

Εύκολα βλέπουμε οτι: $\qquad A_{01}=A_{10}$

Διότι,

$$A_{01}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_1\rho_o d\vartheta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_1(p_o+\ddot{p}_o)d\vartheta \tag{1}$$

Αλλά

$$d(p_1\dot{p}_o)=\dot{p}_1\dot{p}_o+p_1\ddot{p}_o$$

ή

$$0=\int_0^{2\pi}d(p_1\dot{p}_o)=\int_0^{2\pi}(\dot{p}_1\dot{p}_o+p_1\ddot{p}_o)d\vartheta \tag{2}$$

Από τις (1) και (2)

$$A_{01}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_op_1-\dot{p}_o\dot{p}_1)d\vartheta.$$

Λόγω συμμετρίας $A_{01}=A_{10}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα ξαναβρίσκουμε

$$A = s^2A_0+2ss'A_{01}+s'^2A_1. \tag{3}$$

Το $A_{01}=A_{10}$ ονομάζεται mixed area των F_0, F_1.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να τα ξαναβρούμε θεωρόντας εγγ. κυρτά πολύγωνα στο ϑF με όριο τη περίμετρο του F.

Έχουμε οτι: $A_{01}= \frac{1}{2}\sum_1^n h_{1i}a_{0i}$

Στα όρια

$$A_{01}= \frac{1}{2}\oint p_1 ds_o.$$

Παρακάτω θα δόσουμε μερικούς αξιόλογους τύπους στα εμβαδά και χρήσιμους γιά την υπόλοιπη εργασία.

-1. $V(\lambda F_1) = \lambda^2 V(F_1)$.

Διότι:

$$V(\lambda F_1)= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\lambda p_1)(\lambda \rho_1)d\vartheta = \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^{2\pi} p_1\rho_1 d\vartheta = \lambda^2 V(F_1).$$

-2. $V(F_o,\lambda F_1) = \frac{1}{2}\oint p_o\lambda ds_1 = \frac{\lambda}{2}\oint p_o ds_1 = \lambda V(F_o,F_1)$.

-3. Για $\lambda \in R^-$ ο προηγούμενος τύπος γίνεται.

$V(F_o,\lambda F_1) = |\lambda|\, V(F_o,-F_1)$.

Διότι

$$V(F_o,\lambda F_1) = \frac{1}{2}\oint \lambda\, p_1(\vartheta+\pi)ds_o = |\lambda|\, V(F_o,-F_1).$$

-4. $V(F_o,-F_1)=V(-F_o,F_1)$

Διότι: $V(F_o,-F_1)= \frac{1}{2}\oint p_1(\vartheta+\pi)ds_o = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(\vartheta+\pi)\rho_o(\vartheta)d\vartheta=$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(\varphi)\rho_o(\varphi+\pi)d\varphi=V(F_o,-F_1).$$

$$-5.\quad V(F,-F) = V(-F,F) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\vartheta+\pi)\rho(\vartheta)d\vartheta$$

$$-6.\quad V(F_o^*, F_1^*) = \frac{1}{2}\left(V(F_o,F_1) + V(F_o,-F_1) \right)$$

Απόδειξη.

$$V(F_o, F_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_o\rho_1 d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{p_o(\vartheta)+p_o(\vartheta+\pi)}{2}\,\frac{\rho_1(\vartheta)+\rho_1(\vartheta+\pi)}{2}d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4}\left[V(F_o,F_1) + V(F_1,F_o) + V(F_o,-F_1) + V(-F_o,F_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[V(F_o,F_1) + V(F_o,-F_1)\right].$$

$$-7.\quad V\left(\frac{F+(-F)}{2}\right) = V(F\ ) = \frac{1}{2}\left[V(F) + V(F,-F)\right].$$

Εφαρμογή της προηγουμένης.

$$-8.\quad V(F, F_o+F_1) = V(F,F_o) + V(F,F_1).$$

Απόδειξη.

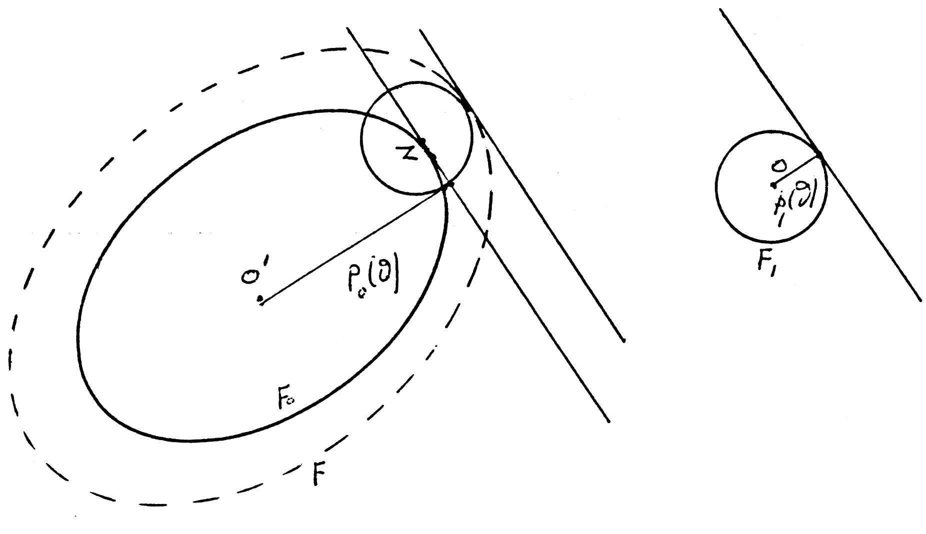
$$V(F,F_o+F_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\left[\rho_o(\vartheta) + \rho_1(\vartheta)\right]d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\rho_o(\vartheta)d\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\vartheta)\rho_1(\vartheta)d\vartheta = V(F,F_o) + V(F,F_1)$$

-9. α. Έστω F_o,F_1 κυρτά σχήματα. Θεωρούμε οτι η αρχή $O \in F_1$. Γιά να σχηματίσουμε το άθροισμα F_o+F_1 είναι αρκετό να πάρουμε την ένωση όλων των ομολόγων του F_1 με όλες τις μεταφορές έτσι ώστε $O \in F_o$. Δηλαδή:

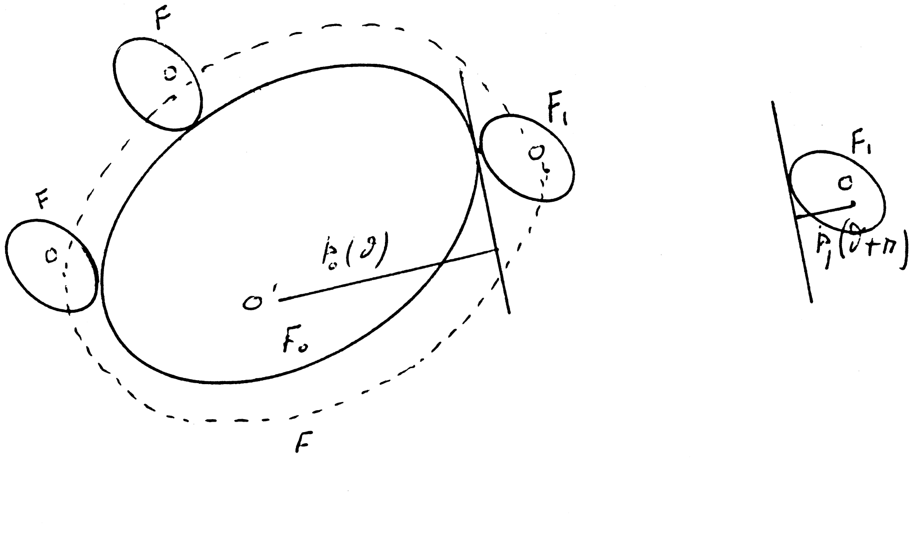
$$F = F_o+F_1 = \left\{\bigcup(z+F_1) : z \in F_o\right\}$$

Βλ. σχ. (3)



o'
$\rho_o(\vartheta)$
F_o
F
o
$\rho_1(\vartheta)$
F_1

σχ. 3



F
o
F
o
F_1
o
$\rho_o(\vartheta)$
o'
F_o
F
F_1
o
$\rho_1(\vartheta+\pi)$

σχ. 4

Πράγματι διότι η συνάρτηση $p(\vartheta)=p_o(\vartheta)+p_1(\vartheta)$ είναι support function του F.

β. Άν τώρα φαντασθούμε τα ομόλογα του F_1 κατά τις μεταφορές του ώστε να εφάπτεται του F_o, τότε το σημείο O γράφει κυρτό σχήμα F με support function $p(\vartheta)=p_o(\vartheta)+p_1(\vartheta+\pi)$.

Βλ. σχ.(4).

σχ. 3

σχ. 4

Δηλαδή, το O γράφει την περίμετρο του κυρτού σχήματος $F = F_o + (-F_1)$.

Το εμβαδόν του σχήματος αυτού δίδεται απο τη σχέση

$$V(F_o,-F_1) = V(F_o) + V(F_1) + 2V(F_o,-F_1)$$

-10. Είδαμε οτι mixed area των F_o,F_1, $V(F_o,F_1)$ είναι αμετάβλητα κατά τις μεταφορές των F_o,F_1 όπως και κατά τις αλλαγές των σημείων O_o,O_1 των F_o,F_1 προς τα οποία αναφέρονται οι support function των F_o,F_1 αντιστοίχως.

Ας υποθέσουμε τώρα οτι το F_1 υφίσταται μιά στροφή περί σημείο O κατά γωνία φ. Έστω O_1' το ομόλογο του O_1 κατά την εν λόγω στροφή.

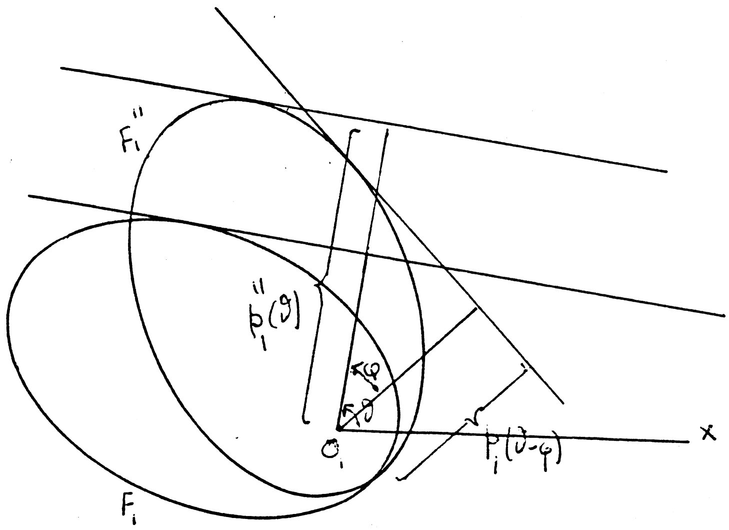
Ως γνωστόν η στροφή περί το O κατά γωνία φ ισοδυναμεί με το γινόμενο στροφής περί το O_1 κατά γωνία φ και μεταφορά κατά $\overrightarrow{O_1O_1'}$. Αλλά η μεταφορά δεν μεταβάλλει τα mixed area των F_o, F_1, οπόταν γιά να βρούμε τα mixed area των F_o, F_1' (όπου F_1' το ομόλογο του F_1 κατά τη στροφή), αρκεί να πάρουμε,

$$V(F_o, F_1') = V(F_o, F_1'') = \frac{1}{2}\oint p_1(\vartheta-\varphi)ds_o$$

Έχουμε θέσει F_1'' το ομόλογο του F_1 κατά τη στροφή (O_1, φ).

Διότι η support function του F_1'' θα προκύψει από τη support function του F_1 γιά τη γωνία $\vartheta-\varphi$.

Βλ. Σχ. (5)



σχ. (5)

Στο σχήμα (5) φαίνεται η στρόφή και οι support functions.

Είναι: $$p_1''(\vartheta) = p_1(\vartheta-\varphi)$$

Δηλαδή:

$$V(F_o, F_1) = \frac{1}{2}\oint p_1(\vartheta)ds_o = \frac{1}{2}\oint p_1(\vartheta-\varphi)ds_o$$

Απ'εδώ βλέπουμε οτι:

$$\int_0^{2\pi} V(F_o,F_1)(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\oint_{\partial F_o} p_1(\vartheta-\varphi)ds_o d\vartheta = \frac{1}{2}L_0L_1. \quad (1)$$

-11. Ας υποθέσουμε τώρα F_o τυχόν κυρτό πολύγωνο και F_1 ευθ. τμήμα μήκους 1 (οπόταν $L_1=2$). Θα είναι:

$V(F_o,F_1) = \frac{1}{2}\sum_1^n h_{oi}a_{1i}$. Είναι $a_{11}=a_{12}=1$ και $a_{1i}=0$ $i\neq1,2$

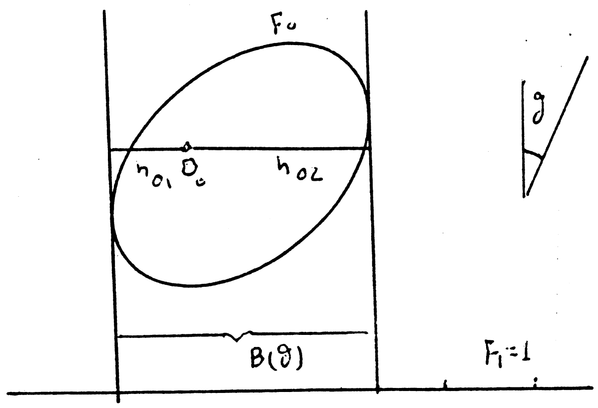
Άρα $V(F_o,F_1) = \frac{1}{2}(h_{o1}+h_{o2})$.

Αν τώρα τεθεί $h_{o1}+h_{o2}= B_o(\vartheta)$ το εύρος του F_o κατά τη Δ/νση ϑ (κάθετο στο F_1), θα έχουμε

$$V(F_o,F_1)= \frac{1}{2}B_o(\vartheta) \quad (1)$$

Αν το F_o είναι κυρτό σχήμα και πάρουμε την ακολουθία των εγγεγραμμένων κυρτών πολυγώνων που έχει όριο το F_o, ο προηγούμενος τύπος εξακουλουθεί να ισχύει.

Βλ. σχ. (6)



σχ (6)

Ολοκληρώνοντας τον προηγούμενο τύπο και λαμβάνοντας υπόψη τον -10,(1), έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} V(F_o,F_1)d\vartheta = \frac{1}{2} L_oL_1 = L_o$$

Δηλαδή

$$L_o = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} B_o(\vartheta)d\vartheta. \qquad (2)$$

Ο τύπος αύτός είναι γνωστός στη θεωρία των κυρτών συνόλων σαν τύπος του Gauchy.

4 Ανισότητα του Minkowski

Έστω F_o, F_1 κυρτά σύνολα του R^2. Θεωρούμε το σύνολο $F = rF_1$ έτσι ώστε το F να μη δύναται με παράλληλο μεταφορά να περιέχεται στο εσωτερικό του F_o ούτε να περιέχει το F_o στο εσωτερικό του. Είναι εύκολο να δούμε οτι υπάρχει τρίγωνο ABC στο οποίο τα F_o, F είναι εγγεγραμένα. Το κυρτό σχήμα $\Phi = \frac{F_o+F}{2}$ είναι επίσης εγγεγραμμένο στο ABC (Όταν λέμε εγγεγραμμένο εννοούμε οτι υπάρχει μεταφορά τέτοια ώστε το ομόλογο του F να είναι εγγεγραμμένο στο ABC).

Λήμμα.

Το εμβαδόν του κυρτού σχήματος F εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ABC δίδεται απο το τύπο

$$V(F) = V(ABC) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\int_0^{\varphi} \rho(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2 \qquad (1)$$

όπου $\rho(\vartheta)$ η ακτίνα καμπυλότητας της γραμμής ϑF.

Απόδειξη.

'Εστω A_c το έμβαδόν του χωρίου μεταξύ ϑF και ABC στη γωνία C. Θα είναι:

$$A_c = \frac{1}{2}\int_0^{\pi-C} MN^2 d\varphi$$

όπου MN το τμήμα της εφαπτόμενης σε σημείο $M \in \vartheta F$ και της ευθείας BC, Βλ. σχ. (7).

Φέρνουμε $MM' \perp BC$. Παίρνουμε δύο γειτονικά σημεία $M_1, M_2 \in \vartheta F$.
'Εχουμε

$$dx = ds . \sin\vartheta$$

ή

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{ds}{d\vartheta}\sin\vartheta = \rho(\vartheta)\sin\vartheta$$

όπου $\rho(\vartheta)$ η ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο M_1.
Απο την παραπάνω σχέση βλέπουμε οτι:

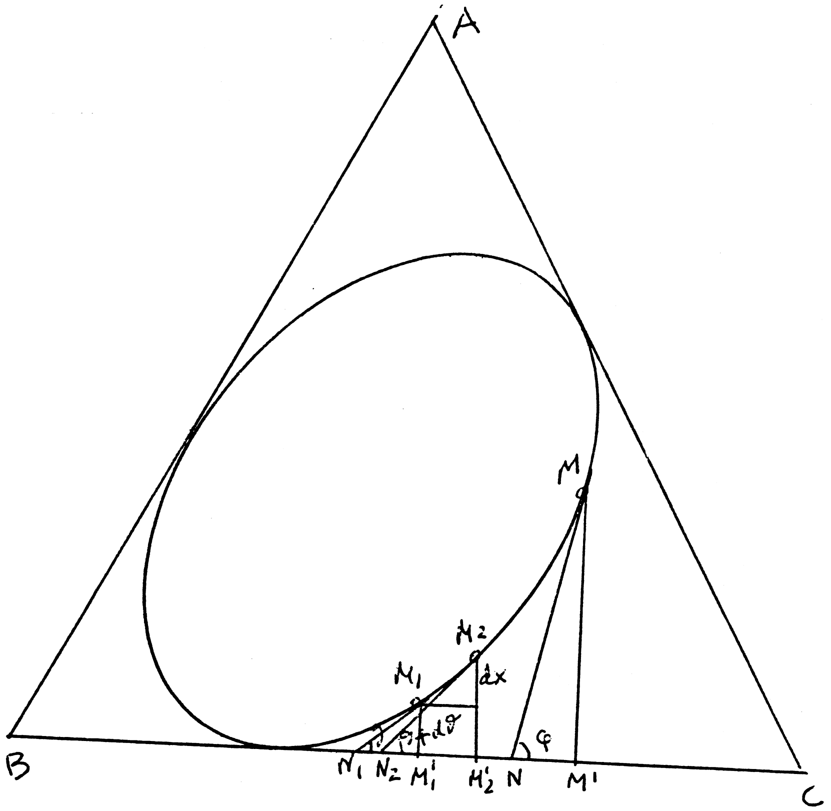
$$MM' = \int_0^{\varphi} \rho(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta.$$

Αλλά $MN = \frac{MM'}{\sin\varphi}$ και τελικά

$$A_c \; \frac{1}{2}\int_0^{\pi-C} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\int_0^{\varphi} \rho(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2.$$

Γράφουμε το ίδιο πράγμα γιά τις γωνίες A,B. Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε το τύπο (1).

σχ. 7



σχ. 7

Έστω F_o, F_1 κυρτά σχήματα. Η ανισότητα του Minkowski είναι:

$$V^2(F_o,F_1) \geqslant V(F_o)V(F_1).$$

Απόδειξη.

Γιά τα F_o, F_1, Φ έχουμε:

$$V(ABC) - V(F_o) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\int_0^{\varphi} \rho_o(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2$$

$$V(ABC) - V(F) = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\int_0^{\varphi} \rho(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2$$

$$V(ABC) - V(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\int_0^{\varphi} \rho'(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2$$

όπου ρ_o,ρ,ρ' οι ακτίνες καμπυλότητας των F_o,F, Φ αντίστοιχα.

Είναι γνωστό όμως οτι: $\rho' = \dfrac{\rho_o+\rho}{2}$,

αλλά:

$$\left[\int_0^{\varphi}\rho_o(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2 + \left[\int_0^{\varphi}\rho(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta\right]^2 \geqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^{\varphi}(\rho_o(\vartheta)+\rho(\vartheta))\sin\vartheta d\vartheta\right]^2$$

οπόταν έχουμε:

$$V(ABC) - V(F_o) + V(ABC) - V(F) \geqslant 2 \quad V(ABC)-V(\Phi)$$

ή

$$2V(\Phi) \geqslant V(F_o) + V(F). \qquad (2)$$

Η ισότης τότε και μόνο τότε αν $\rho_o(\vartheta) = \rho(\vartheta)$. Δηλαδή αν

$$F_o = F.$$

Στη (2) έχουμε αποδείξει οτι

$$V\left(\frac{F+F_o}{2}\right) \geqslant \frac{V(F)+V(F_o)}{2} \qquad (3)$$

Δηλαδή η συνάρτηση V είναι κοίλη. Γνωρίζουμε όμως από 3.2 (3) ότι:

$$V(sF_o+s'F) = s^2V(F_o)+2ss'V(F_o,F)+s'^2V(F).$$

όπου s,s' 0 και $s+s'=1$.

Αρα από την (2) και (3) θα έχουμε τελικά

$$V(F_o,F) \geqslant \frac{V(F_o)+V(F)}{2} \qquad (4)$$

Αν λάβουμε υπόψη οτι $F=rF_1$ έχουμε:

$$rV(F_o,F) \geqslant \frac{V(F_o)+r^2V(F_1)}{2}. \qquad (5)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο και μόνον όταν $F_o=rF_1$, δηλαδή όταν F_o,F_1 είναι ομοιόθετα.

Στη (5) η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη αρνητική, άρα

$$V(F_o,F_1) - V(F_o)V(F_1) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Η γνωστή ανισότητα του Minkowski.

Ας πάρουμε τώρα το σχήμα $F_s= sF_o+s'F_1$, $s,s'>0$, $s+s'=1$.

Θα έχουμε:

$$V(F_s) = s^2V(F_o)+2ss'V(F_o,F_1)+s'^2V(F_1)$$

και από την (6)

$$V(F_s) \geqslant s^2V(F_o)+2ss'.V(F_o)V(F_1)+s'^2V(F_1).$$

Απ'εδώ

$$\left[V(F_s)\right]^{1/2} \geqslant s\left[V(F_o)\right]^{1/2} + s'\left[V(F_1)\right]^{1/2} \quad (7)$$

που είναι μιά δεύτερη μορφή της ανισότητας του Minkowski.

4.1 Ισοπεριμετρικές Ανισότητες

Από τη σχέση (5) προκύπτει αμέσως η ισοπεριμετρική ανισότητα (style Bonnesen).

Έστω $F_1=\upsilon$ ο μοναδιαίος κύκλος. Θα είναι

$$r_o\upsilon$$

ο εγγεγραμμένος κύκλος στο F_o και εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ABC συγχρόνως.

Έχουμε:

$$r_oV(F_o,\upsilon) \geq \frac{V(F_o)+r_o^2V(\upsilon)}{2}$$

ή

$$r_o\frac{L_o}{2} \geqslant \frac{V(F_o)+ r_o^2\cdot\pi}{2}$$

που γράφεται:

$$\frac{L_o^2}{4\pi} - V(F_o) \geqslant \frac{1}{4\pi}(L_o-2\pi r_o)^2 \quad (8)$$

Στην ανισότητα (5), είναι.

$$\frac{V(F_o,F_1) - \sqrt{\Delta}}{V(F_1)} \leqslant r \leqslant \frac{V(F_o,F_1) + \sqrt{\Delta}}{V(F_1)}$$

όπου $\Delta = V^2(F_o,F_1) - V(F_o)V(F_1)$.

Αν τώρα θέσουμε $\rho_o F_1$ και $P_o F_1$ το εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο στο F_o ομοιόθετο του F_1, θα έχουμε:

$$\frac{V(F_o,F_1) - \sqrt{\Delta}}{V(F_1)} \leqslant \rho_o \leqslant P_o \leqslant \frac{V(F_o,F_1) + \sqrt{\Delta}}{V(F_1)} \tag{10}$$

Απο τη τελευταία σχέση προκύπτει

$$P_o - \rho_o \leqslant \frac{2\sqrt{\Delta}}{V(F_1)}$$

ή ακόμη

$$V^2(F_o,F_1) - V(F_o)V(F_1) \geqslant \frac{V^2(F_1)(P_o-\rho_o)^2}{4} \tag{11}$$

Η ανισότητα δηλαδή του H.Flanders Βλ. [3]

Η (11) καταλήγει στη γνωστή ανισότητα του Bonnesen γιά $F_1 = \upsilon$ (μοναδιαίος κύκλος), οπότε ρ_o και P_o είναι οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου αντίστοιχα, του F_o. Γίνεται δηλαδή:

$$L_o^2 - 4\pi V(F_o) \geqslant \pi^2 (P_o - \rho_o)^2 \tag{12}$$

Μιά ενδιαφέρουσα ακόμη ανισότητα προκύπτει από την (5) η οποία μπορεί να γραφεί:

$$V^2(F_o,F_1) - V(F_o)V(F_1) \geqslant \left[\frac{V(F_o)-r^2V(F_1)}{2r}\right]^2 \qquad (13)$$

Η ισότητα γιά $V(F_o)=r^2V(F_1)$.

Οι ανισότητες (5) και (13) γιά τις διάφορες τιμές του r δίνουν μιά σειρά ανισοτήτων απ'τις οποίες άλλες είναι γνωστές άλλες όχι. Ενδεικτικά αναφέρω την ανισότητα του Frobenius.

Γιά $r=\frac{L_o}{L_1}$ η (5) γίνεται

$$0 \geqslant \frac{V(F_o)}{L_o^2} - \frac{2V(F_o,F_1)}{L_oL_1} + \frac{V(F_1)}{L_1^2} \qquad (14)$$

Βιβλιογραφία

1. L.A. Lyusternik, Convex Figures and Polyhedra, Dover, New York 1963.

2 H.G. Eggleston, Convexity, Cambridge University Press, 1966.

3. H. Flanders, A proof of Minkowski's inequality for convex curves, Amer. Math. Monthly, Vol 75, N° 6 pg. 581.