ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ FERMAT-TORRICELI

Δόρτσιος Κώστας, Μαθηματικός. kdortsi@gmail.com
Τσίντσιφας Γιώργος, Μαθηματικός. gtsintsifas@yahoo.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια να μελετηθεί το πρόβλημα των Fermat - Torriceli και μάλιστα στη γενική του μορφή. Μετά τη μελέτη του λεγόμενου **"Βασικού Θεωρήματος"** και των συμπερασμάτων του, παρουσιάζονται ως εφαρμογές αυτού, το πρόβλημα του **Ήρωνα**, του **Steiner** καθώς και του **Gergonne.** Τέλος μελετάται το πρόβλημα του Fermat για το τετράεδρο.

Σε όλες τις εφαρμογές η λύση έγινε εφικτή με τη χρήση της νέας τεχνολογίας, εκτός του τελευταίου, λόγω της δυσκολίας και της πολυπλοκότητάς του. Αξιόλογο νομίζουμε ότι είναι ότι το πρόβλημα του Gergonne λύθηκε με το λογισμικό Geogebra και μάλιστα έγινε και "οπτική" επαλήθευση, όπως θα δειχθεί στην παρουσίαση.

Abstract

The present work is an attempt to study the Fermat - Torricelli problem and specifically its generalized form. After the study of the so-called "Fundamental Theorem" and its conclusions, as its applications are presented the Heron, the Steiner as well as the Gergonne problems. Finally the Fermat problem for the tetrahedron is studied.

In all the applications the solutions were approachable by the use of the new technology, except for the last one, due to its difficulty and complexity. We consider that it is remarkable the fact that the Gergonne problem was solved by the use of Geogebra software and an "optical" verification was possible, as it is going to be presented.

1. Εισαγωγικά

Με τον όρο ***«πρόβλημα των Fermat – Torricelli»*** έχει καθιερωθεί γενικά να εννοείται το ακόλουθο πρόβλημα:

Αν

$$G=\left\{A_1, A_2, \ldots, A_p\right\}, \quad p \in N^*$$

είναι ένα σύνολο σημείων σε έναν Ευκλείδειο χώρο $E^d, d \in N^*$**,**

$$q : f(x) = 0$$ **μια δοθείσα επιφάνεια,**

ή

$$E^k, k \in N^* \ \mu\varepsilon\ k \le d$$ **ένας δοθείς υποχώρος του** E^d

τότε ζητείται να οριστεί σημείο $M \in q$ **ή** $M \in E^k$**, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων :**

$$\sum_{i=1}^{p} \left| \overline{A_i M} \right|$$

να γίνεται ελάχιστο.

2. Ιστορικό

Το πρόβλημα ξεκίνησε από την προσπάθεια του R.Descartes να προσδιορίσει στο επίπεδο σημεία που απέχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από τρία ή τέσσερα δεδομένα σημεία του επιπέδου. Ο προβληματισμός έφτασε στον P. Fermat, ο οποίος προσπάθησε να προσδιορίσει σημείο του επιπέδου ενός τριγώνου ώστε το άθροισμα των αποστάσεων αυτού από τις κορυφές του τριγώνου να είναι ελάχιστο.

Η λύση του προβλήματος ήρθε γρήγορα από τον E. Torricelli και στη συνέχεια από πολλούς άλλους μαθηματικούς. Ο Steiner στη συνέχεια δημοσίευσε εργασία με τη λύση του προβλήματος αυτού. Ο Steiner εκτός αυτού ανακάλυψε και πολλές άλλες ιδιότητες του σημείου που δίνει τη λύση στο πρόβλημα. Έτσι το σημείο M το οποίο ανήκει στο επίπεδο ενός τριγώνου ABC και για το οποίο ισχύει:

$$AM + BM + CM = \min$$

ονομάζεται **σημείο Steiner.**

Από την εποχή του Fermat μέχρι και σήμερα το πρόβλημα παρουσιάζει μια ιδιαίτερη δημοσιότητα και οι διάφορες περιπτώσεις που ερευνώνται παίρνουν το όνομα του μαθηματικού που παρουσιάζει την εργασία.

Γεωμετρική κατασκευή του σημείου M στις διάφορες παραλλαγές του προβλήματος Fermat – Torricelli συνήθως, εκτός από λίγες περιπτώσεις, δεν υπάρχει.

Τέλος οι καινούργιες εργασίες πάνω στο αντικείμενο αυτό, στην πλειοψηφία τους, έχουν χαρακτήρα πληροφοριακό και εκπαιδευτικό. Πολύ λίγες έχουν να προσφέρουν κάτι αξιόλογο, π.χ. ένα νέο υπολογισμό του ζητούμενου σημείου με π.χ. πιο απλές εξισώσεις.

Στην παρούσα εργασία μας θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του Ήρωνα, το πρόβλημα του Gergonne και το πρόβλημα του Fermat στο τετράεδρο.

3. Το βασικό Θεώρημα

Το βασικό θεώρημα στο οποίο στηρίζονται οι περισσότερες εργασίες στο αντικείμενο αυτό είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα: Αν $G=\{A_1, A_2, ..., A_p\}, \quad p \in N^*$ **είναι ένα σύνολο σημείων στο χώρο** $E^d, d \in N^*$ **και** $f(x)=0$ **η εξίσωση μιας επιφάνειας** q **ή** $E^k, k \in N^*$ $\mu\varepsilon\ k \leq d$ **ένας υπόχωρος του** E^d **τότε:**

1. **Για κάθε σημείο** $M \in (q)$ **για το οποίο ισχύει:**

$$\sum_{i=1}^{p} \left|\overrightarrow{A_i M}\right| = \min$$

τότε θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{r_{io}} + \lambda \overrightarrow{c_o} = \vec{0}$$

όπου $\overrightarrow{c_o}$ **είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο** (F) **της** (q) **στο σημείο** M **και έτσι ώστε το σημειοσύνολο** G **να κείται στο αντικείμενο επίπεδο σχετικά με την επιφάνεια** (q) **και**

$$\overrightarrow{r_{i0}} = \frac{\overrightarrow{A_i M}}{\left|\overrightarrow{A_i M}\right|}, \quad i = 1, 2, ..., p$$

2. **Για κάθε σημείο** $M \in E^k, k \leq d$ **για το οποίο ισχύει:**

$$\sum_{i=1}^{p} \left|\overrightarrow{A_i M}\right| = \min$$

Τότε:

i) Αν $k < d$ **τότε θα είναι**: $\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{r_{io}} + \lambda \overrightarrow{c_o} = \vec{0}$

ii) Αν $k = d$ **τότε θα είναι**

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{r_{i0}} = \vec{0}$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των πολ/στών του Lagrange. Ακόμα μια άλλη απόδειξη μπορεί να γίνει και χωρίς διαφορικό λογισμό, κάνοντας χρήση μόνο διανυσματικό λογισμό.

1η Απόδειξη

1. Έστω

$$\left|\overrightarrow{A_iM}\right|^2 = \sum_{j=1}^{d}(x_{ij}-x_j)^2, \quad i=\{1,2,\dots,p\}$$

όπου: $A_i\left(x_{ij}\right),\, \mu\varepsilon\; 1\le i\le p$ και $M\left(x_j\right)$ τα σημεία $A_i,\, M_j$ με τις συντεταγμένες τους.

Έστω ακόμα ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας (q) πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο M. Έτσι αναζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{p}\left|\overrightarrow{A_iM}\right| = \left[\sum_{\substack{i=1,p\\ j=1,d}}\left(x_{ij}-x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{d}\left(x_{ij}-x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

με δεσμό $f(x)=0$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange έχουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης:

$$F\left(x,\lambda_1\right)=f_1(x)+\lambda_1 f(x) \quad (2)$$

Άρα αν έχουμε ελάχιστο τότε θα είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0, \quad \gamma\iota\alpha\; 1\le j\le d$$

επομένως:

$$gradF=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial F}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j}=\vec{0} \quad (3)$$

όπου $\overrightarrow{e_j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος $Ox_1x_2\dots x_d$.

Αλλά ακόμα είναι:

$$\overrightarrow{A_iM} = \vec{r_i}, \quad i = 1, 2, ..., p$$

και

$$\frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left|\overrightarrow{A_iM}\right|} = \frac{\vec{r_i}}{\left|\vec{r_i}\right|} = \overrightarrow{r_{io}}, \quad i = 1, 2, ..., p \quad (4)$$

Ύστερα από αυτά η σχέση (2) γίνεται:

$$gradF = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\left(f_1(x) + \lambda_1 f(x)\right)}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\left(f_1(x)\right)}{\partial x_j} + \lambda_1 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\left(f(x)\right)}{\partial x_j} \quad (5)$$

και μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$gradF = \sum_{i=1}^{p} \frac{\vec{r_i}}{\left|\vec{r_i}\right|} + \lambda_1 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j} = 0 \quad (6)$$

όμως:

$$\overrightarrow{c_0} = \frac{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j}}{\left|\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j}\right|} \quad (7)$$

είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια (c) με εξίσωση $f(x) = 0$. Άρα η (6) τελικά γίνεται:

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{r_{io}} + \lambda \overrightarrow{c_o} = \vec{0} \quad (8)$$

όπου $\lambda = \lambda_1 \left|\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\overrightarrow{e_j}\right|$

Αντιστρόφως

Έστω $G = \left\{A_1, A_2, ..., A_p\right\}, \quad p \in N^*$ σύνολο σημείων στον E^d και (q) η επιφάνεια $f(x) = 0$.

Υποθέτουμε ότι το σημείο $M \in (q)$ μας δίνει το ελάχιστο στο ζητούμενο άθροισμα. Δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{p}\left|\overrightarrow{A_iM}\right| = \min$$

κι ακόμα ότι τα σημεία του G και το η επιφάνεια (q) βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου (F).

Υποθέτουμε ακόμα ότι το διάνυσμα

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left|\overrightarrow{A_iM}\right|} = \sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}}$$

είναι συγγραμμικό του μοναδιαίου διανύσματος $\left(\overrightarrow{c_o}\right)$ του καθέτου στο επίπεδο (F). Έστω δηλαδή ότι είναι:

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left|\overrightarrow{A_iM}\right|} = \sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}} = \lambda'\overrightarrow{c_0}$$

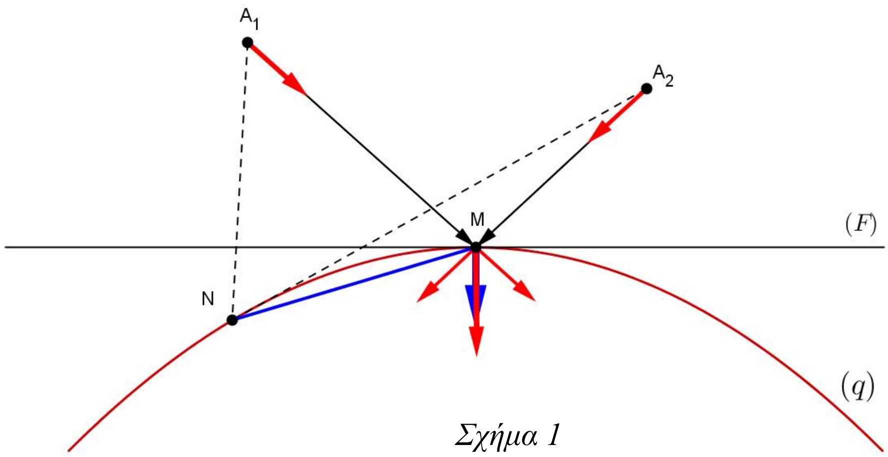
Θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό M είναι μοναδικό. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει κι ένα άλλο σημείο N το οποίο δίνει ελάχιστο στο άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\overrightarrow{A_iN}}{\left|\overrightarrow{A_iN}\right|} = \min$$

Τότε:

$$A_1N + A_2N + \ldots + A_pN \geq \overrightarrow{A_1N}\cdot\overrightarrow{r_{10}} + \overrightarrow{A_2N}\cdot\overrightarrow{r_{20}} + \ldots + \overrightarrow{A_pN}\cdot\overrightarrow{r_{p0}} =$$

$$\left(\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{r_{10}} + \left(\overrightarrow{A_2M}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{r_{20}} + \ldots + \left(\overrightarrow{A_PM}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{r_{p0}} =$$



Σχήμα 1

$$= \overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{r_{10}} + \overrightarrow{A_2M} \cdot \overrightarrow{r_{20}} + \ldots + \overrightarrow{A_pM} \cdot \overrightarrow{r_{p0}} + \overrightarrow{MN} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} r_{io} \right) =$$

$$= A_1M + A_2M + \ldots + A_pM + \overrightarrow{MN} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} r_{io} \right) > A_1M + A_2M + \ldots + A_pM$$

διότι

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} r_{io} \right) > 0$$

εφόσον η γωνία των δύο αυτών διανυσμάτων είναι οξεία. *(Σχ.1)*

Δηλαδή:

$$A_1N + A_2N + \ldots + A_pN > A_1M + A_2M + \ldots + A_pM$$

Η τελευταία σχέση είναι άτοπη γιατί το πρώτο μέλος δεν είναι πλέον ελάχιστο.

2.

i) Έστω ότι $k = d-1$ τότε το σύνολο E^k είναι ένα υπερεπίπεδο και το θέμα αντιμετωπίζεται όπως στην πρώτη περίπτωση.

ii) Έστω ότι $k = d$ τότε για να είναι $\sum_{i=1}^{p} \left| \overrightarrow{A_iM} \right| = \min$ ή $\sum_{i=1}^{p} \left| \overrightarrow{r_i} \right| = \min$ τότε θα πρέπει να είναι:

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{r_{io}} = \vec{0}$$

διότι από τη σχέση (2) δεν υπάρχει πλέον ο όρος $\lambda_1 f(x)$.

2η Απόδειξη

Θεωρούμε ότι το σημείο M το οποίο ανήκει στην (q) ή στον E^d κάνει το ακόλουθο άθροισμα ελάχιστο:

$$S=\sum_{i=1}^{p}\left|\overrightarrow{A_iM}\right|$$

Τότε για κάθε σημείο $P \in E^d$ θα είναι:

$$S=\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{A_iM}\cdot\overrightarrow{r_{io}}=\sum_{i=1}^{p}\left(\overrightarrow{A_iP}+\overrightarrow{PM}\right)\cdot\overrightarrow{r_{io}}\Rightarrow$$

$$S=\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{r_{io}}+\overrightarrow{PM}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}}\right)\quad(1)$$

Αν τώρα στην (1) θεωρήσουμε ότι είναι:

$$\overrightarrow{PM}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}}\right)=0\quad(2)$$

τότε

$$S=\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{r_{io}}\Rightarrow$$

$$S\le\sum_{i=1}^{p}\left|\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{r_{io}}\right|\quad(3)$$

Η σχέση (3) δηλώνει ότι για κάθε σημείο $P \in E^d$ η παράσταση

$$\sum_{i=1}^{p}\left|\overrightarrow{A_iP}\cdot\overrightarrow{r_{io}}\right|$$

είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την παράσταση S όταν συμβαίνει η σχέση (2), δηλαδή:

$$\overrightarrow{PM}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}}\right)=0\,'$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

1ο) Αν το ζητούμενο σημείο M ανήκει στην επιφάνεια (q) τότε για να προσδιοριστεί η θέση του, αρκεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\left(\overrightarrow{c_o}\right)$ το κάθετο επί της επιφανείας (q) στο σημείο M να είναι συγγραμμικό προς το διάνυσμα: $\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}}$.

Αντιστρόφως, όπως στην περίπτωση 1.

2ο) Αν το ζητούμενο σημείο M ανήκει στο χώρο E^d τότε για να είναι $\sum_{i=1}^{p}\left|\vec{r_i}\right| = \min$ αρκεί: $\sum_{i=1}^{p}\overrightarrow{r_{io}} = \vec{0}$.

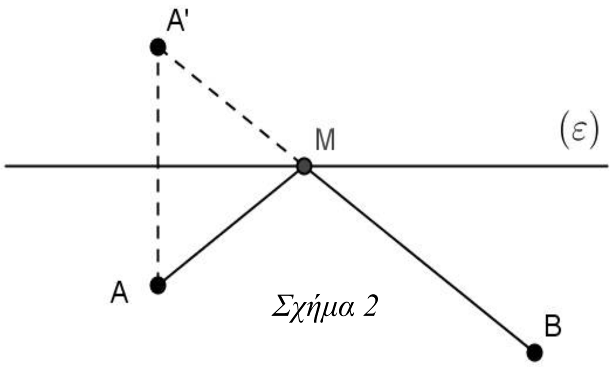
1. Το πρόβλημα του Ήρωνος

Σε ένα επίπεδο δίνονται τα σημεία A,B **και ευθεία** (ε)**. Να βρεθεί σημείο** M **στην ευθεία** (ε) **τέτοιο ώστε:**

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right| = \min$$

Λύση 1η

Χρησιμοποιούμε τη συμμετρία. *(Σχ.2)*



Σχήμα 2

Αν το σημείο A' είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την (ε) τότε το ζητούμενο σημείο M είναι η τομή της $\mathrm{A}'\mathrm{B}$ με την (ε).

Παρατήρηση:

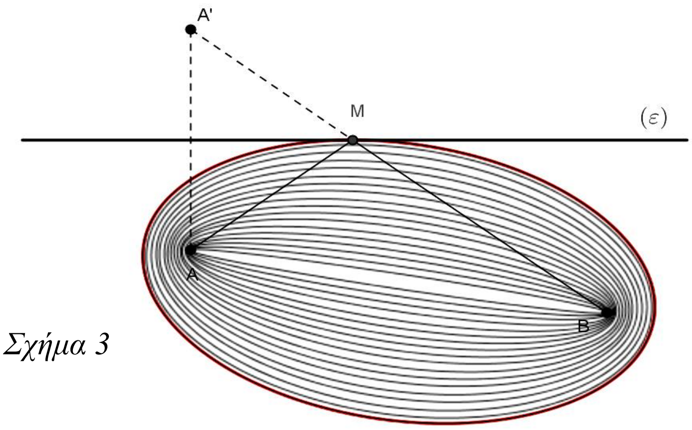
Αν η ευθεία (ε) *διέρχεται από τα σημεία* A,B *τότε έχουμε απειρία θέσεων για το ζητούμενο σημείο* M *και η απειρία αυτή είναι όλα τα σημεία του τμήματος* AB.

Λύση 2η

Από τη μονοπαραμετρική οικογένεια των ελλείψεων με εστίες τα σημεία A,B επιλέγουμε εκείνη η οποία εφάπτεται στην (ε).

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια των ελλείψεων που δίνει ως σημείο επαφής το ίδιο σημείο μ' εκείνο της προηγούμενης περίπτωσης.

Βέβαια η λύση αυτή εφαρμόζεται αν τα σημεία A, B βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε)



Σχήμα 3

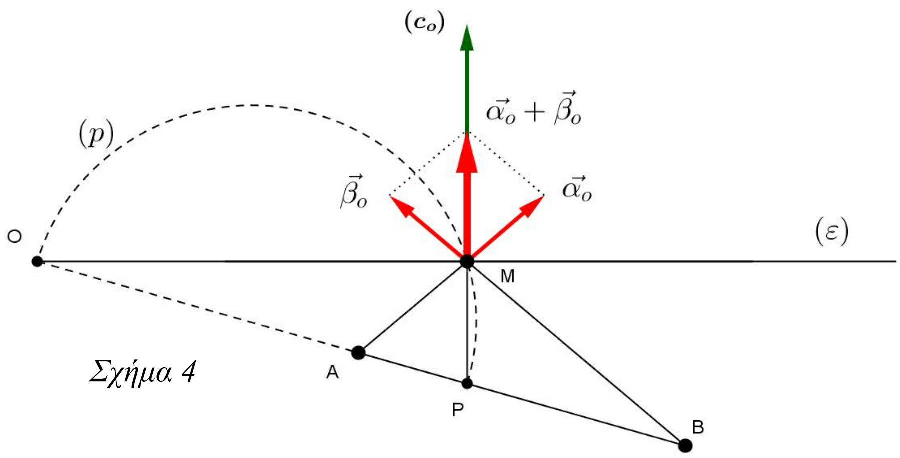
Λύση 3η

Από το Βασικό Θεώρημα πρέπει να συμβαίνει:

$$\overrightarrow{\alpha_o} + \overrightarrow{\beta_o} = \lambda \overrightarrow{c_o}$$

όπου

$$\overrightarrow{\alpha_o} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)}, \ \overrightarrow{\beta_o} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BM}}}{\left(\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)}$$



Σχήμα 4

και $\vec{c_o}$ το κάθετο διάνυσμα στην ευθεία (ε). *(Σχ. 4)*

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι: $\left(\widehat{\vec{\alpha_o},\varepsilon}\right)=\left(\widehat{\vec{\beta_o},\varepsilon}\right)$. Άρα η MP είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{AMB}}$ και η OM η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας αυτής. Έτσι η κατασκευή του σημείου P είναι εύκολη, ως συζυγές αρμονικό του γνωστού σημείου O ως προς τα γνωστά σημεία A,B.

Λύση 4η

Η λύση αυτή είναι υπολογιστική(αλγεβρική) και ο λόγος που την αναφέρουμε είναι ότι παρόμοια λύση θα χρησιμοποιήσουμε στο πρόβλημα του Gergone.

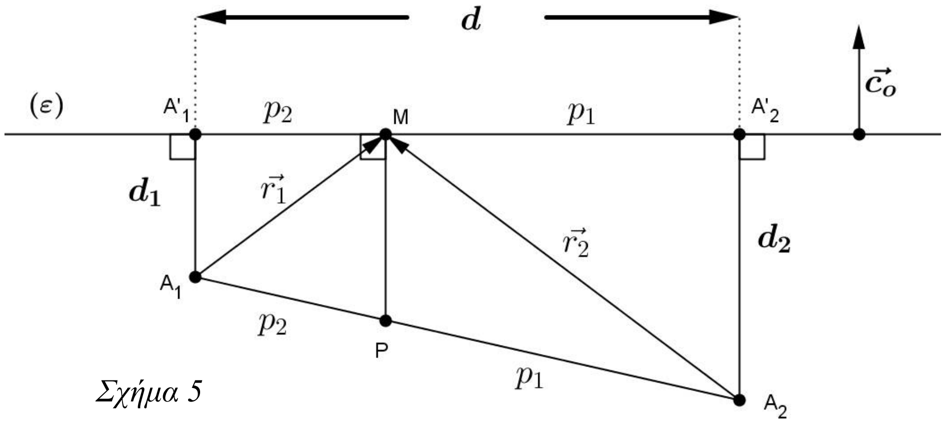
Για καλύτερη διευκόλυνση του θέματος αλλάζουμε στην περίπτωση αυτή τα γράμματα. Αντί A θέτουμε A_1 και αντί B το A_2. Έστω ακόμα ότι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1' \perp (\varepsilon)$ και $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2' \perp (\varepsilon)$. *(Σχ. 5)*

Από το βασικό θεώρημα είναι:

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}\right|}=\lambda\vec{c_o} \quad (1)$$

Θέτουμε:

$$p_1=\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}},\quad p_2=\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}},\quad \mu\varepsilon \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}\right|=r_1, \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}\right|=r_2 \quad (2)$$



Σχήμα 5

Στη συνέχεια επιλέγω το σημείο P στο τμήμα $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ έτσι ώστε:

$$\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{P}}{\mathrm{PA}_2}=\frac{p_2}{p_1} \quad (3)$$

και από το P φέρουμε την $\mathrm{PM}\perp(\varepsilon)$

Είναι απλό να δούμε ότι:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}=\vec{r_1}=p_1\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2'}=p_1\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+p_2\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'}\right)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}=\vec{r_1}=(p_1+p_2)\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}'2}$$

διότι $p_1+p_2=1$, λόγω της (2). Άρα τελικά:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}=\vec{r_1}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}+p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}'2} \quad (4)$$

Όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}^2=r_1^2=d_1^2+p_1^2p_2^2d^2, \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ d=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'}\right| \quad (5)$$

Από την (5) αμέσως προκύπτει:

$$r_1^2p_1^2=p_1^2d_1^2+p_1^2p_2^2d^2 \quad (6)$$

Όμοια είναι:

$$r_2^2p_2^2=p_2^2d_2^2+p_1^2p_2^2d^2 \quad (7)$$

εξάλλου από τη (2) προκύπτει ότι:

$$r_1p_1=r_2p_2 \quad (8)$$

έτσι από τις (6), (7) και (8) προκύπτει:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{d_1}{d_2}\Rightarrow\begin{cases}p_1=\dfrac{d_2}{d_1+d_2}\\[2ex] p_2=\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\end{cases}, \quad (8)$$

Από την (8) προσδιορίζεται η θέση του σημείου P και συνεπώς και του ζητούμενου M για το οποίο εύκολα δείχνεται ότι:

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}\right|}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}, \text{ δηλαδή: } \overrightarrow{r_{10}}+\overrightarrow{r_{20}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\lambda\overrightarrow{c_o}$$

2. Το πρόβλημα του Steiner

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ και ζητούμε σημείο M του επιπέδου του ώστε το άθροισμα:

$$\left|\overrightarrow{A_1M}\right| + \left|\overrightarrow{A_2M}\right| + \left|\overrightarrow{A_3M}\right|$$

γίνεται ελάχιστο.

Λύση

Σύμφωνα με το Βασικό θεώρημα πρέπει να είναι:

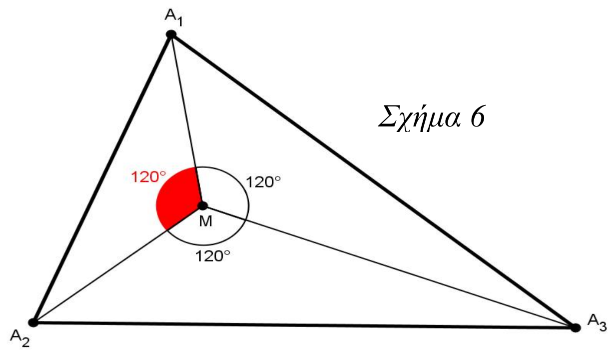
$$\overrightarrow{r_{10}} + \overrightarrow{r_{20}} + \overrightarrow{r_{30}} = \vec{0} \quad (1)$$

όπου:

$$\overrightarrow{r_{10}} = \frac{\overrightarrow{A_1M}}{\left|\overrightarrow{A_1M}\right|}, \quad \overrightarrow{r_{20}} = \frac{\overrightarrow{A_2M}}{\left|\overrightarrow{A_2M}\right|}, \quad \overrightarrow{r_{30}} = \frac{\overrightarrow{A_3M}}{\left|\overrightarrow{A_3M}\right|}$$

Από την (1) προκύπτει ότι για να είναι το άθροισμα τριών μοναδιαίων διανυσμάτων μηδενικό διάνυσμα, θα πρέπει αυτά να σχηματίζουν μεταξύ των διαδοχικές γωνίες ίσες με 120^o.

Αυτό δηλώνει ότι το ζητούμενο σημείο πρέπει να βλέπει την κάθε μια πλευρά του τριγώνου $A_1A_2A_3$ με γωνία ίση με 120^o. Έτσι το



Σχήμα 6

ζητούμενο σημείο είναι το γνωστό σημείο του Steiner. *(Σχ. 6)*

3. Το πρόβλημα του Gergonne

Δίνονται τρία σημεία A_1, A_2, A_3 και ένα επίπεδο (π) στο χώρο E^3. Ζητείται να προσδιοριστεί σημείο $M \in (\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\left|\overrightarrow{A_1M}\right| + \left|\overrightarrow{A_2M}\right| + \left|\overrightarrow{A_3M}\right|$$

να γίνεται ελάχιστο.

Η λύση του προβλήματος αυτού έρχεται μέσα από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων*(όπως η 4η λύση του προβλήματος του Ήρωνα)* και πάντα αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η επιλογή της λύσης ώστε να πετυχαίνουμε το απλούστερο σύστημα εξισώσεων. Ας ελπίσουμε ότι ο τρόπος αυτός που εργαστήκαμε θα είναι πρωτότυπος και οι εξισώσεις να έχουν λογική πολυπλοκότητα.

Λύση

Έστω P σημείο του τριγώνου $A_1A_2A_3$ με βαρυκεντρικές συντεταγμένες:

$$p_1 = \frac{1}{r_1} : \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right),\ p_2 = \frac{1}{r_2} : \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right),\ p_3 = \frac{1}{r_3} : \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) \quad (1)$$

και προφανώς θα ισχύει:

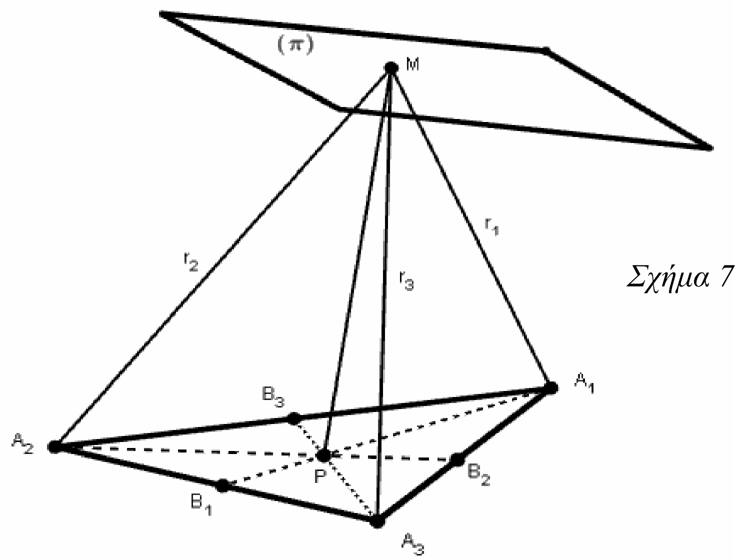
$$r_1 p_1 = r_2 p_2 = r_3 p_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)} \quad (2)$$

Στη συνέχεια είναι:

$$\overrightarrow{MP} = p_1 \vec{r_1} + p_2 \vec{r_2} + p_3 \vec{r_3} \quad (3),$$

όπου

$$\vec{r_1} = \overrightarrow{MA_1},\ \vec{r_2} = \overrightarrow{MA_2},\ \vec{r_3} = \overrightarrow{MA_3}\ \textit{και}\ p_i > 0,\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \quad (4)$$



Σχήμα 7

Επίσης θα είναι:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)=\frac{\overrightarrow{r_1}}{r_1}+\frac{\overrightarrow{r_2}}{r_2}+\frac{\overrightarrow{r_3}}{r_3}=\overrightarrow{r_{10}}+\overrightarrow{r_{20}}+\overrightarrow{r_{30}}$$

και σύμφωνα με το Βασικό Θεώρημα θα είναι:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)=\lambda\overrightarrow{c_o} \quad (5)$$

όπου $\overrightarrow{c_o}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π).

Έστω ακόμα

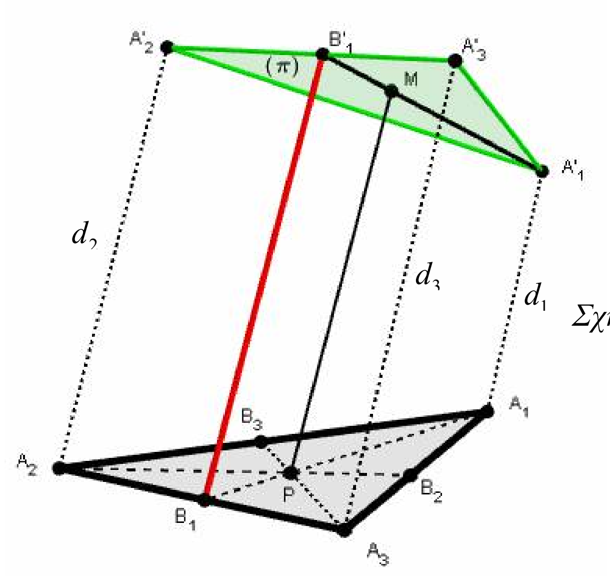
$\mathrm{A_1P}\cap\mathrm{A_2A_3}=\mathrm{B_1}, \quad \mathrm{A_2P}\cap\mathrm{A_3A_1}=\mathrm{B_2}, \quad \mathrm{A_3P}\cap\mathrm{A_1A_2}=\mathrm{B_3}$ *(Σχ.7)*

τότε εύκολα προκύπτει:

$$\frac{\mathrm{A_2B_1}}{\mathrm{A_3B_1}}=\frac{p_3}{p_2}=\frac{r_2}{r_3} \quad (6)$$

που σημαίνει ότι η $\mathrm{MB_1}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A_2MA_3}}$, όπως και οι $\mathrm{MB_2}, \mathrm{MB_3}$ είναι διχοτόμοι αντίστοιχα των γωνιών $\widehat{\mathrm{A_3MA_1}}, \widehat{\mathrm{A_1MA_2}}$.

Προβάλλουμε στη συνέχεια το τρίγωνο $\mathrm{A_1A_2A_3}$ κάθετα στο επίπεδο (π) και προκύπτει το τρίγωνο $\mathrm{A_1'A_2'A_3'}$. *(Σχ.8)* Η προβολή όπως είναι γνωστό είναι ένας affine μετασχηματισμός και συνεπώς οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου M σχετικά με το τρίγωνο $\mathrm{A_1'A_2'A_3'}$ είναι: $\mathrm{M}(p_1, p_2, p_3)$.



Σχήμα 8

Φυσικά εφόσον υποθέσαμε ότι το σημείο Μ είναι το ζητούμενο σημείο τότε από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $\mathrm{PM} \perp (\pi)$.

Έτσι είναι:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}} &= p_1\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2'} + p_3\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3'} = \\ &= p_1\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + p_2\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'}\right) + p_3\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + \overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_3'}\right) = \\ &= \left(p_1 + p_2 + p_3\right)\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'} + p_3\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_3'}\end{aligned}$$

και επειδή $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ τελικά είναι:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'} + p_2\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'} + p_3\overrightarrow{\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_3'} \quad (7)$$

Τετραγωνίζοντας τη σχέση (7) προκύπτει:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{M}}^2 = r_1^2 = d_1^2 + p_2^2\alpha_3'^2 + p_3^2\alpha_2'^2 + 2p_2p_3\alpha_2'\alpha_3'\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}_1' \quad (8)$$

όπου:

d_1, d_2, d_3 οι αποστάσεις των $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ από το επίπεδο (π)

$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ οι πλευρές του τριγώνου $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'\mathrm{A}_3'$

$\mathrm{A}_1', \mathrm{A}_2', \mathrm{A}_3'$ οι γωνίες του τριγώνου $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'\mathrm{A}_3'$.

Τέλος χρησιμοποιώντας το Νόμο των Συνημιτόνων η σχέση (8) γίνεται:

$$p_1^2r_1^2 = p_1^2d_1^2 + p_1^2p_2^2\alpha_3'^2 + p_1^2p_3^2\alpha_2'^2 + p_1^2p_2p_3\left(\alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 - \alpha_1'^2\right) \quad (9)$$

όμοια έχουμε:

$$p_2^2r_2^2 = p_2^2d_2^2 + p_2^2p_3^2\alpha_1'^2 + p_2^2p_1^2\alpha_3'^2 + p_2^2p_3p_1\left(\alpha_3'^2 + \alpha_1'^2 - \alpha_2'^2\right) \quad (10)$$

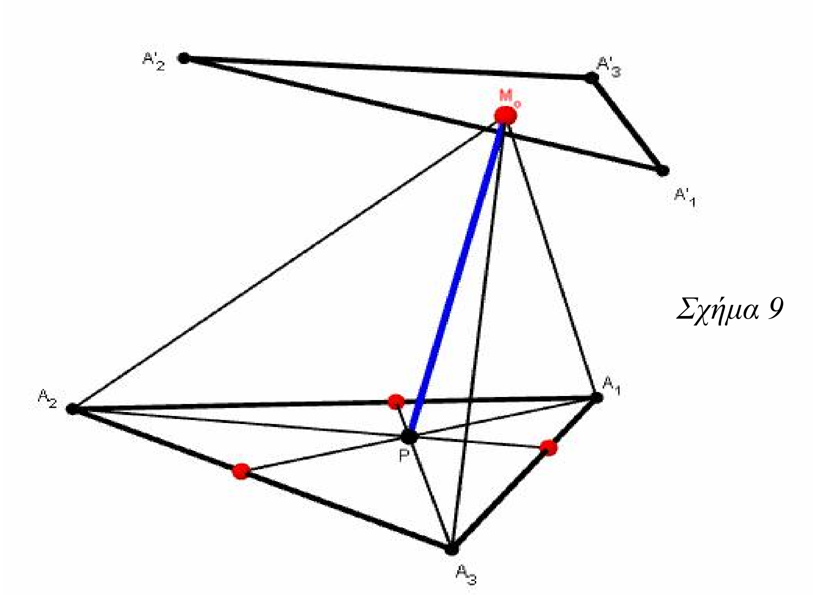
$$p_3^2r_3^2 = p_3^2d_3^2 + p_3^2p_1^2\alpha_2'^2 + p_3^2p_2^2\alpha_1'^2 + p_3^2p_1p_2\left(\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 - \alpha_3'^2\right) \quad (11)$$

Οι εξισώσεις (9), (10), (11) έχουν τα πρώτα μέλη τους ίσα λόγω της σχέσης (2) συνεπώς από αυτές και από την:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ \mu\varepsilon\ p_i > 0, i = 1,2,3$$

δομείται ένα σύστημα (Σ) τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους τους p_1, p_2, p_3. Η λύση του συστήματος αυτού δίνει τη θέση του ζητούμενου σημείου Μ.[1]

Στο σχήμα (9) εμφανίζεται η πραγματική θέση του σημείου Μ το οποίο βρέθηκε με τη λύση του συστήματος (Σ). Η λύση βρέθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra.



Σχήμα 9

4. Το πρόβλημα του Fermat για το τετράεδρο

Δίνεται τετράεδρο $A_1A_2A_3A_4$. Ζητούμε σημείο M του χώρου ώστε το άθροισμα

$$\left|\overrightarrow{A_1M}\right|+\left|\overrightarrow{A_2M}\right|+\left|\overrightarrow{A_3M}\right|+\left|\overrightarrow{A_4M}\right|$$

να γίνεται ελάχιστο.

Λύση

Αν θέσουμε πάλι $\overrightarrow{A_iM}=\vec{r_i},\quad i=1,2,3,4$, τότε τα μοναδιαία διανύσματα αντίστοιχα θα είναι:

$$\frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left|\overrightarrow{A_iM}\right|}=\frac{\vec{r_i}}{\left|\vec{r_i}\right|}=\overrightarrow{r_{i0}}$$

Από το Βασικό Θεώρημα θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{r_{i0}}=\vec{0}\quad (1)$$

Έτσι από την (1) προκύπτει:

$$\overrightarrow{r_{10}}+\overrightarrow{r_{20}}=-\left(\overrightarrow{r_{30}}+\overrightarrow{r_{40}}\right)$$

κι αν την τετραγωνίσουμε τη σχέση αυτή τότε προκύπτει:

$$\widehat{A_1MA_2}=\widehat{A_3MA_4}\qquad (2)$$

όμοια προκύπτουν και οι σχέσεις:

$$\widehat{A_1MA_3} = \widehat{A_2MA_4} \qquad (3)$$

$$\widehat{A_1MA_4} = \widehat{A_2MA_3} \qquad (4)$$

Πάνω στην ημιευθεία MA_i επιλέγουμε σημείο B_i ώστε $\left|\overrightarrow{MB_i}\right| = 1$.

Έτσι από την ισότητα των τριγώνων:

$$(B_1MB_2) = (B_3MB_4),\ (B_1MB_3) = (B_2MB_4),\ (B_1MB_4) = (B_2MB_3)$$

διαπιστώνεται ότι:

$$\left|\overrightarrow{B_1B_2}\right| = \left|\overrightarrow{B_3B_4}\right|,\quad \left|\overrightarrow{B_1B_3}\right| = \left|\overrightarrow{B_2B_4}\right|,\quad \left|\overrightarrow{B_1B_4}\right| = \left|\overrightarrow{B_2B_3}\right|$$

επομένως το τετράεδρο $B_1B_2B_3B_4$ είναι **ισοσκελές.**

Από τα ανωτέρω προκύπτει μια αξιόλογη ιδιότητα που χαρακτηρίζει το σημείο M :

1η Ιδιότητα:

Οι τέσσερις τρίεδρες γωνίες με κορυφή το σημείο M και των οποίων οι ακμές διέρχονται από τις κορυφές του τετραέδρου $A_1A_2A_3A_4$ είναι ίσες.

Ακόμα το μέτρο των ανωτέρω τριέδρων γωνιών μετρούμενο επί της μοναδιαίας σφαίρας είναι ίσο με π .

Μια ακόμα ιδιότητα προκύπτει κάνοντας χρήση τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες.

Η σχέση (1) γράφεται αναλυτικά: $\frac{\overrightarrow{r_1}}{r_1} + \frac{\overrightarrow{r_2}}{r_2} + \frac{\overrightarrow{r_3}}{r_3} + \frac{\overrightarrow{r_4}}{r_4} = \vec{0}$

και αν θέσουμε: $p_i = \dfrac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i}}$,

τότε θα είναι: $\sum_{i=1}^{4} p_i \overrightarrow{r_i} = \vec{0}, \quad με\ p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{4} p_i = 1, i = 1,2,3,4$

Άρα:

2η Ιδιότητα

Το σημείο M είναι το κέντρο βάρους του συστήματος $A_i(p_i)$

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια, αξιοποιώντας την 1η ιδιότητα να καταλήξουμε σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με αγνώστους τους r_1, r_2, r_3, r_4.

Θέτουμε: $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}\right| = \alpha_{ij},\ i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3,4$ τις πλευρές του τετραέδρου $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$.

Αν στα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{M}\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3\mathrm{M}\mathrm{A}_4$ εφαρμόσουμε το θεώρημα των συνημιτόνων τότε θα έχουμε:

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 - \alpha_{12}^2}{r_1 r_2} = \frac{r_3^2 + r_4^2 - \alpha_{34}^2}{r_3 r_4} \quad (5)$$

όμοια από τα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{M}\mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_2\mathrm{M}\mathrm{A}_4$ έχουμε:

$$\frac{r_1^2 + r_3^2 - \alpha_{13}^2}{r_1 r_3} = \frac{r_2^2 + r_4^2 - \alpha_{24}^2}{r_2 r_4} \quad (6)$$

τέλος από τα τρίγωνα $\mathrm{A}_1\mathrm{M}\mathrm{A}_4,\ \mathrm{A}_2\mathrm{M}\mathrm{A}_3$ θα είναι:

$$\frac{r_1^2 + r_4^2 - \alpha_{14}^2}{r_1 r_4} = \frac{r_2^2 + r_3^2 - \alpha_{23}^2}{r_2 r_3} \quad (7)$$

Η τέταρτη εξίσωση θα βρεθεί από το θεώρημα του Leibnitz το οποίο για ένα βαρυκεντρικό σύστημα: $\mathrm{A}_1(m_1),\ \mathrm{A}_2(m_2),\ \mathrm{A}_3(m_3), \ldots, \mathrm{A}_n(m_n)$ εκφράζεται ως εξής:

$$m\sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{PA_i}\right|^2 = m^2\left|\overrightarrow{PG}\right|^2 + \sum_{i<j} m_i m_j \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}\right|^2$$

Το βαρυκεντρικό σύστημα της περίπτωσής μας είναι:

$$\mathrm{A}_1(p_1),\ \mathrm{A}_2(p_2),\ \mathrm{A}_3(p_3),\ \mathrm{A}_4(p_4)$$

και εξίσωση του Lebnitz είναι:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} r_i\right) = \sum_{i,j}^{1,4}\frac{1}{r_i r_j}\alpha_{ij}^2 \quad (8)$$

Η λύση του συστήματος των (5), (6), (7) και (8) δίνει τη θέση του σημείου Μ .[2]

Επίλογος

Όπως γίνεται φανερό υπάρχουν και πολλά άλλα προβλήματα που μπορούν να επεξεργαστούν σύμφωνα με το Βασικό Θεώρημα τα οποία έχουν λυθεί μέχρι τώρα με στοιχειώδη τρόπο.

Ακόμα μπορεί κανείς να σκεφτεί και πολλά άλλα ακόμα επεκτείνοντας τα σχήματα πέραν του τριγώνου στο επίπεδο ή πέραν του τετραέδρου στο χώρο των τριών διαστάσεων. Ακόμα μπορούν να μελετηθούν προβλήματα αντίστοιχα σε χώρους πέραν του R^3

Σημειώσεις

[1] *Αξιοποιήθηκε η ικανότητα του λογισμικού Geogebra να χαράσσει γραφήματα πεπλεγμένων συναρτήσεων στις οποίες καταλήγει το σύστημα (Σ)*

[2] *Δεν δόθηκε λύση με τη βοήθεια του λογισμικού, όπως αυτό έγινε στο πρόβλημα του Gergonne.*

Βιβλιογραφία

1. Yaakov S. Kupitz-Horst Martini-Margarita Spirova, The Fermat-Torricelli problem, J. Optim Theory Appl (2013) 158: 305-322

2. Protter-Morrey, Modern Mathematical Analtsis Addison-Wesley Publishing Company

3. Richard Courant-Herbert Robbins, What is Mathematics?, Oxford Uni.Press.

4. Ivan Niven, Maxima and Minima without Calculus, The Math. Assoc. of America.

5. L. A. Lyusternik, Shortest Paths Pergamon Press.

6. H. Hancock, Theory of Maxima and Minima, Dover.