ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ HOLDITCH
ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ

Δόρτσιος Κώστας, μαθηματικός (kdortsi@sch.gr)
Τσίντσιφας Γιώργος, μαθηματικός (gtsintsifas@yahoo.com)

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται σε γενικές γραμμές ένα αξιόλογο θεώρημα της Γεωμετρίας που διατυπώθηκε και επεξεργάστηκε από τον Άγγλο μαθηματικό Hamnet Holditch (1800-1867), καθηγητή του Cajus College του Cambridge κατά το έτος 1858. Στη διεθνή βιβλιογραφία ονομάζεται ως «Théorème de Holditch» και έχει πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Κατά την επεξεργασία της εργασίας αυτής παρουσιάζονται δύο μορφές του Θεωρήματος(Θεώρημα 1 και Θεώρημα 2) αυτού και μια ακόμα ενδιαφέρουσα πρόταση (Θεώρημα 3) που σχετίζεται με το συλλογιστικό περιβάλλον του θεωρήματος αυτού.

Τέλος εκείνο που έχει ιδιαίτερη σημασία στην εργασία αυτή είναι ότι τα δύσκολα σχήματα που αναφέρονται στο Θεώρημα αυτό κατασκευάστηκαν με το σύγχρονο λογισμικό Geogebra με αρκετή πιστότητα και δυναμικότητα.

Εισαγωγικά

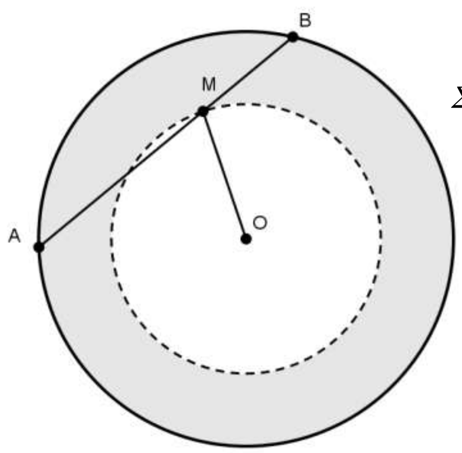
Ο Η. Holditch παρατήρησε ότι ένα απλό πρόβλημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούσε να επεκταθεί σε ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα μελέτης των καμπύλων στον E^2. Είναι πολύ εύκολο να δούμε *(Σχ.1)* ότι, αν εντός κύκλου (O,R) μια ράβδος μήκους:

$$l = AM + MB = AB$$

ολισθαίνει με τα δύο άκρα της A, B να κινούνται επί της περιφέρειας του κύκλου, τότε το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ του κύκλου με ακτίνα R και του κύκλου με ακτίνα $R' = OM$ είναι ίσο με:

$$\pi ab$$

διότι από τη δύναμη



Σχήμα 1

σημείου προκύπτει:

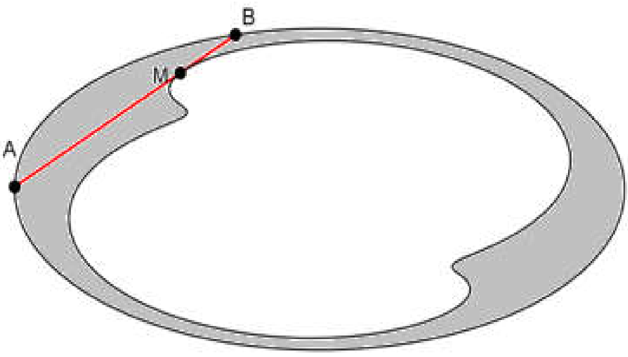
$$MA \cdot MB = ab = \Delta_{(O,R)}(M) = R^2 - R'^2$$

και συνεπώς:

$$\pi ab = \pi R^2 - \pi R'^2$$

όπου $a = AM$ και $b = MB$.

Στη συνέχεια ο H. Holditch διαπίστωσε ότι το ίδιο ισχύει και αν αντί του κύκλου (O,R) έχουμε μια κυρτή καμπύλη (c) *(Σχ. 2)*.



Σχήμα 2

Θεώρημα 1

Αν ένα τμήμα AB σταθερού μήκους κινείται έχοντας τα άκρα του πάνω σε μια κυρτή καμπύλη (c) τότε το σημείο M του τμήματος αυτού που χωρίζει το τμήμα αυτό σε μερικό λόγο $l = \frac{a}{b}$, $AB = a + b$, θα διαγράφει μια άλλη καμπύλη (c'). Αν η (c') είναι απλή κλειστή καμπύλη τότε το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζεται από τις δύο αυτές καμπύλες θα είναι:

$$\boxed{E(c,c') = \pi ab \quad (1)}$$

Απόδειξη της σχέσης (1)

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Έστω λοιπόν ότι είναι: $\overrightarrow{OA} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r_2}$ τα διανύσματα θέσης των άκρων του τμήματος AB ως προς κάποια αρχή O και $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου M.*(Σχ.3)*,

Έτσι θα είναι:

$$\vec{r} = \frac{b\vec{r_1} + a\vec{r_2}}{a+b} \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$(a+b)^2 \vec{r}^{\,2} = b^2 \vec{r}_1^{\,2} + a^2 \vec{r}_2^{\,2} + 2ab\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2^{\,2} \quad (2)$$

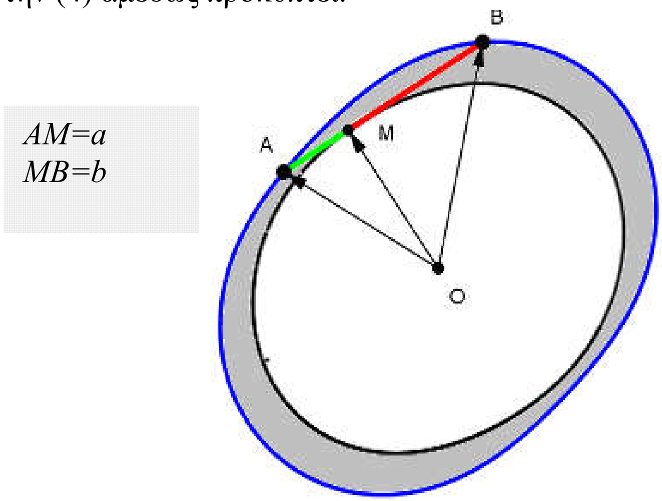
Επίσης είναι:

$$a+b = |r_1 - r_2| \quad (3)$$

κι έτσι υψώνοντας κι αυτή στο τετράγωνο θα έχουμε:

$$(a+b)^2 = \vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2} - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \quad (4)$$

Από την (4) αμέσως προκύπτει:



Σχήμα 3

$$ab(a+b)^2 = ab\vec{r}_1^{\,2} + ab\vec{r}_2^{\,2} - 2ab\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \quad (5)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (5) κατά μέλη προκύπτει:

$$ab(a+b)^2 + (a+b)^2 \vec{r}^{\,2} = a^2 \vec{r}_2^{\,2} + b^2 \vec{r}_1^{\,2} + ab\vec{r}_1^{\,2} + ab\vec{r}_2^{\,2}$$

και τελικά:

$$(a+b)^2 \vec{r}^{\,2} = a^2 \vec{r}_2^{\,2} + b^2 \vec{r}_1^{\,2} + ab\vec{r}_1^{\,2} + ab\vec{r}_2^{\,2} - ab(a+b)^2 \quad (6)$$

Είναι γνωστός ο τύπος:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta \quad (7)$$

που δίνει το εμβαδόν που περικλείεται από μια καμπύλη:

$$c: r = r(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Τέλος ολοκληρώνοντας την (6) κατά μέλη

$$(a+b)^2 \int_0^{2\pi} \vec{r}^{\,2} d\theta =$$

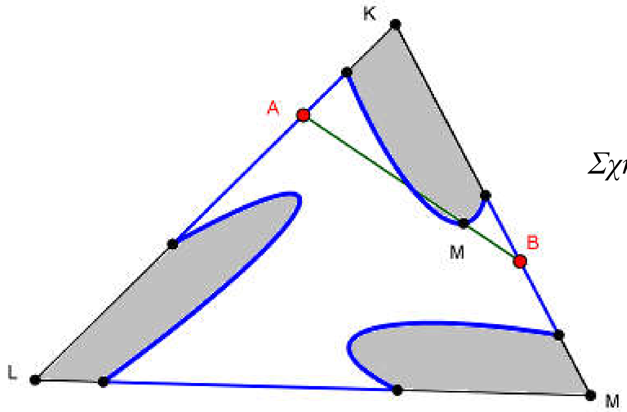
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \vec{r}_2^{\,2} d\theta + b^2 \int_0^{2\pi} \vec{r}_1^{\,2} d\theta + ab\int_0^{2\pi} \vec{r}_1^{\,2} d\theta + ab\int_0^{2\pi} \vec{r}_2^{\,2} d\theta - ab(a+b)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \quad (6)$$

και σύμφωνα με τον τύπο (7) θα είναι:

$$(a+b)^2 2E_{c'} = a^2 2E_c + b^2 2E_c + ab2E_c + ab2E_c - ab(a+b)^2 2\pi \Rightarrow$$
$$(a+b)^2 E_{c'} = \left(a^2+b^2+2ab\right)E_c - ab(a+b)^2 \pi \Rightarrow$$
$$E_{c'} = E_c - \pi ab \Rightarrow E_c - E_{c'} = \pi ab.$$

Το Θεώρημα αυτό του Holditch ισχύει και για μη κυρτές καμπύλες με την προϋπόθεση ότι μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος (7) που δίνει το εμβαδόν καμπύλης με πολικές συντεταγμένες. Επίσης για την εφαρμογή αρκεί το τμήμα $l = AM + MB = AB$, να μπορεί να κινηθεί ολισθαίνοντας μέχρι και την αρχική του θέση.

Τέλος απαραίτητη προϋπόθεση για την ισχύ του θεωρήματος είναι το τμήμα αυτό να έχει μήκος το πολύ ίσο με το ελάχιστο εύρος της καμπύλης c.



Σχήμα 4

Υπάρχουν βέβαια και σχήματα που μπορεί μια διάμετρος αυτών μπορεί να κάνει μια πλήρη περιστροφή και είναι τα σχήματα σταθερού εύρους.

Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση κλειστών και κυρτών πολυγωνικών γραμμών, όπου το σημείο M διαγράφει μικτόγραμμες τροχιές, δηλαδή τροχιές που αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα και από τόξα κωνικών τομών. *(Σχ.4)*

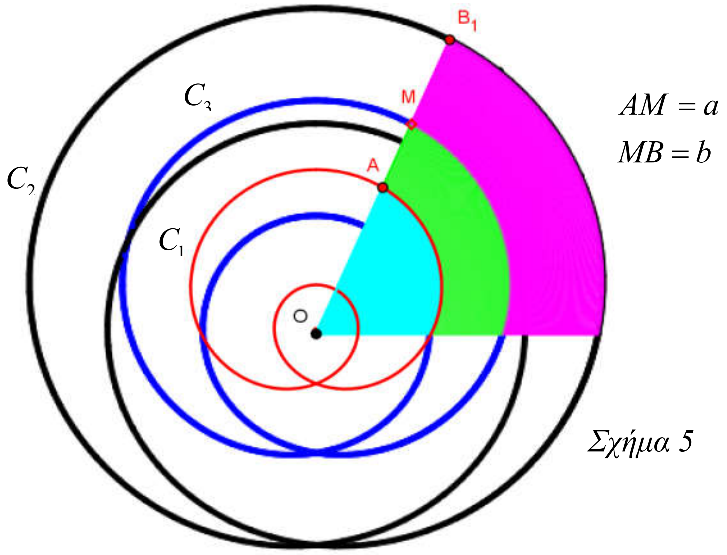
Θεώρημα 2

Έστω δύο κλειστές καμπύλες $(C_1),(C_2)$ με την προϋπόθεση να ικανοποιούνται οι συνθήκες ολοκλήρωσης. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σταθερού μήκους $a+b$ κινείται έτσι ώστε $A \in C_1$ και $B \in C_2$ τότε το σημείο $M \in AB : AM = a \; και \; MB = b$ γράφει μια κλειστή καμπύλη C_3 και αν κατά την κίνηση του τμήματος αυτού ο αριθμός περιτύλιξης

(winding number) **είναι** $n \in N^*$ **τότε τα εμβαδά των τριών αυτών κλειστών καμπυλών θα ικανοποιούν τη σχέση:**

$$E(C_3) = \frac{a}{a+b} E\left(C_2\right) + \frac{b}{a+b} E\left(C_1\right) - n\pi ab \quad (1)$$

Στο σχήμα 5*(στιγμιότυπο)* φαίνεται μια περίπτωση με τρεις καμπύλες τις C_1, C_2, C_3 με αντίστοιχα χρώματα το κόκκινο, μαύρο και γαλάζιο. Τα αντίστοιχα εμβαδά αυτών που επικαλύπτονται είναι αντίστοιχα το θαλασσί, το ρόζ και το πράσινο και τέλος ο αριθμός περιτύλιξης είναι $n = 2$ που δηλώνει ότι αν ένα σημείο για παράδειγμα το A ξεκινήσει να κινείται κατά μια συγκεκριμένη φορά τότε για να επανέλθει στην αρχική θέση θα πρέπει να κάνει δύο περιστροφές γύρω από το σημείο O.



Σχήμα 5

Επομένως στην περίπτωση αυτή το πράσινο εμβαδόν που γράφει το σημείο M δίνεται από τη σχέση:

$$E(C_3) = \frac{a}{a+b} E\left(C_2\right) + \frac{b}{a+b} E\left(C_1\right) - 2\pi ab$$

Από τη σχέση (1) γίνεται φανερό ότι αν οι καμπύλες C_1 και C_2 ταυτίζονται τότε για το εμβαδόν της καμπύλης C_3 που διαγράφει το σημείο Μ θα είναι:

$$E(C_3) = \frac{a}{a+b} E\left(C_2\right) + \frac{b}{a+b} E\left(C_1\right) - 2\pi ab =$$

$$= \frac{a}{a+b} E\left(C_1\right) + \frac{b}{a+b} E\left(C_1\right) - 2\pi ab =$$

$$= \frac{a+b}{a+b} E\left(C_1\right) - 2\pi ab = E\left(C_1\right) - 2\pi ab$$

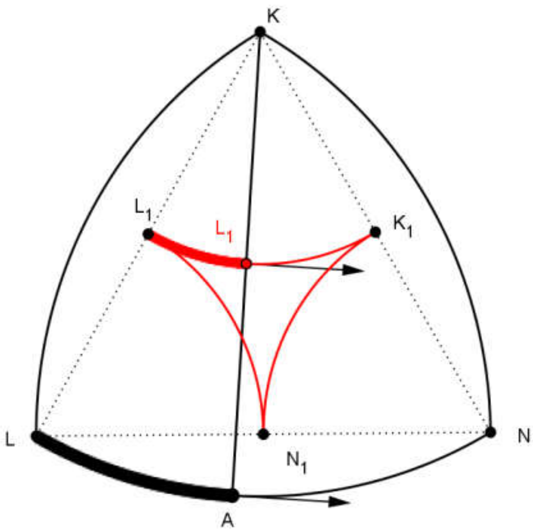
άρα:

$$E(C_3) = E\left(C_1\right) - 2\pi ab \quad (2)$$

δηλαδή το Θεώρημα 1 με την παρατήρηση ότι εδώ έχουμε $n = 2$

Εφαρμογή στο τρίγωνο Rouleaux

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών έχουμε στο τρίγωνο Rouleaux το οποίο είναι μια κλειστή καμπύλη που παράγεται από ένα ισόπλευρο τρίγωνο KLM πλευράς *a (Σχήμα 6).*



Σχήμα 6

Στο σχήμα αυτό η "διάμετρος" KA καθώς κινείται επί της καμπύλης του τριγώνου αυτού, το μέσον αυτής L_1 γράφει κάθε φορά τα τόξα του καμπυλόγραμμου τριγώνου $K_1L_1N_1$ και μάλιστα κατά την αντίθετη φορά από εκείνη της περιστροφής της "διαμέτρου" KA.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) του Θεωρήματος 2 και θέτοντας:

$$E\left(C_3\right) = -2E\left(K_1L_1N_1\right), \quad E\left(C_1\right) = E\left(KLN\right) \text{ και } n = 1$$

προκύπτει:

$$-2E\left(K_1L_1N_1\right) = E\left(KLN\right) - \pi ab \quad (3)$$

Ακόμα είναι:

$$E\left(KLM\right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Τελικά από τις (3) και (4) υπολογίζουμε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου:

$$E\left(K_1L_1N_1\right)=\frac{a^2}{8}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$$

μια σχέση που μπορεί να προκύψει και με στοιχειώδη τρόπο.

Παρατήρηση: *Στον τύπο (2) έχουμε θέσει* $E\left(C_3\right)=-2E\left(K_1L_1N_1\right)$ *γιατί η φορά διαγραφής του τριγώνου* $\left(K_1L_1N_1\right)$ *είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ωρολογίου και μάλιστα όταν η χορδή* KL *πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή στο τρίγωνο Rouleaux* $\left(KLN\right)$ *τότε το μέσον αυτής διαγράφει κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου δύο φορές το τρίγωνο* $\left(K_1L_1N_1\right)$.

Από τα ανωτέρω παραδείγματα γίνεται φανερό ότι το πρόβλημα προσδιορισμού της μορφής που διαγράφει το σημείο M της κινούμενης χορδής AB το οποίο χωρίζει αυτή σε συγκεκριμένο λόγο, είναι εξαιρετικά χρήσιμο σε εφαρμογές πρακτικές ή ακόμα και σε θεωρητικές. Παρακάτω θα λύσουμε ένα σχετικά απλό πρόβλημα.

Θεώρημα 3

Έστω F κυρτό σχήμα με σύνορο την κυρτή γραμμή c. Το ευθύγραμμο τμήμα $AB=l, l=ct$ ολισθαίνει επί της c. Αν το μέσο M του AB διαγράφει κύκλο τότε να δειχθεί ότι και η καμπύλη c θα είναι επίσης κύκλος.

Για την απόδειξη του ανωτέρω Θεωρήματος θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα το οποίο είναι χρήσιμο και για πολλά προβλήματα της Γεωμετρίας και όχι μόνο.

Λήμμα 1

Έστω A_o σημείο ενός κύκλου $\left(O,r_1\right)$ και G η αβελιανή ομάδα στροφών R περί το κέντρο O και μια γωνία ϑ, όπου ϑ άρρητος αριθμός κι ακόμα $\frac{2\pi}{\vartheta}$ επίσης άρρητος.

Τότε το σύνολο:

$$H=\left\{A_n=R^n\left(A_o\right)/\,n\in Z\right\}$$

είναι πυκνό στο κύκλο $\left(O,r_1\right)$.

Θυμίζουμε ότι: ένα σύνολο A, $(A \subseteq B)$ **λέγεται πυκνό στο σύνολο** B, αν και μόνον αν όλα τα **σημεία συσσώρευσης** του συνόλου A ανήκουν στο σύνολο B. Βέβαια τα σύνολα A, B θεωρούνται ως υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X, δηλαδή ενός συνόλου μέσα στο οποίο έχει οριστεί μια "απόσταση" δύο σημείων αυτού με τις ιδιότητες της **ταυτότητας**, της **συμμετρικότητας** και της **τριγωνικής.**

Απόδειξη

Με **δεδομένη τη γωνία** ϑ ορίζουμε τη σχέση:

$$\vartheta_n = n\vartheta \bmod (2\pi) \Leftrightarrow \vartheta_n = n\vartheta + 2m\pi, \quad n \in Z, m \in Z$$

$$\text{Π.χ. } \vartheta_2 = 2\vartheta + 2m\pi, \quad m \in Z$$

η οποία είναι μια γωνία *(μια κλάση γωνιών ή τόξων)* με αρχή την αρχή του κύκλου και μετά από m "περιστροφές" καταλήγει στην θέση της γωνίας 2ϑ.

Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο: $S = \{\vartheta_n : n \in Z\}$ και τη δομή $(S, +)$ η οποία εύκολα δείχνεται ότι είναι μια αθροιστική **αβελιανή ομάδα**. Βέβαια το σύνολο S και το σύνολο H βρίσκονται σε μια σχέση αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το σύνολο S **έχει άπειρα στοιχεία**. Πράγματι:

Επειδή σε κάθε ακέραιο αριθμό n αντιστοιχεί κι ένα στοιχείο ϑ_n, αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία αυτά μεταξύ των είναι διαφορετικά. Έστω λοιπόν ότι τα στοιχεία ϑ_k, ϑ_l με $k \neq l (k > l)$ είναι μεταξύ των ίσα. Τότε θα είναι:

$$\vartheta_k = \vartheta_l \Leftrightarrow$$

$$k\vartheta + 2m_1\pi = l\vartheta + 2m_2\pi \Leftrightarrow$$

$$(k-l)\vartheta = 2(m_2 - m_2)\pi \Leftrightarrow$$

$$\vartheta = \frac{m_2 - m_1}{k-l}(2\pi) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{m_2 - m_1}{k-l} \; (1)$$

η σχέση (1) όμως είναι άτοπη γιατί το πρώτο μέλος είναι άρρητος αριθμός και το δεύτερο μέλος είναι ρητός.

Άρα το σύνολο S έχει άπειρα στοιχεία.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο αυτό έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

Το σύνολο S είναι και περατωμένο διότι οι εικόνες ϑ_n των στοιχείων του είναι άπειρες και διαφορετικές μεταξύ των και επιπλέον ανήκουν σε ένα περατωμένο σύνολο σημείων που είναι το μήκος $2\pi r_1$ του κύκλου $C(O,r_1)$. Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano – Weierstrass ***[1]*** το σύνολο αυτό θα έχει τουλάχιστον ένα οριακό αριθμό ή αλλιώς ένα σημείο συσσώρευσης το οποίο προφανώς ανήκει στον κύκλο (O,r_1).

Στη συνέχεια θα **δείξουμε ότι το σύνολο** H **είναι πυκνό στο σύνολο των σημείων που ορίζει ο κύκλος:** (O,r_1)

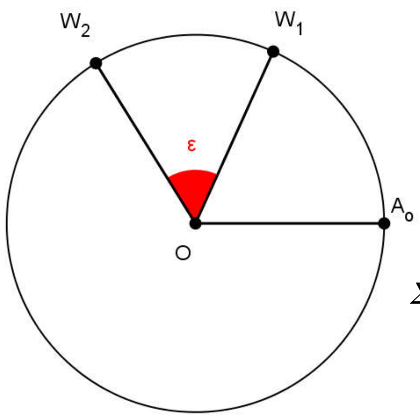
Για τούτο θα πρέπει δείξουμε ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων του κύκλου (O,r_1) θα υπάρχει και ένα τουλάχιστον σημείο του συνόλου H.

Πράγματι:

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαία σημεία $W_1,W_2 \in (O,r_1)$ με $W_1 \neq W_2$. Θεωρούμε ως

$$\varepsilon = \left|\widehat{W_1 O W_2}\right| \quad (2)$$

το θετικό αριθμό που δηλώνει το μέτρο της γωνίας $\widehat{W_1 O W_2}$. *(Σχ.7)*



Σχήμα 7

Στη συνέχεια θεωρούμε μια ακολουθία $(\vartheta_n), n \in N$ γωνιών που τείνει σε έναν οριακό αριθμό του συνόλου S, τότε σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $k \in N$ τέτοιο ώστε για κάθε $n_1, n_2 > k$ να ισχύει:

$$\left|\vartheta_{n_1} - \vartheta_{n_2}\right| < \varepsilon \quad (3)$$

Αν τώρα θέσουμε: $\varphi_k = \vartheta_{n_1} - \vartheta_{n_2}$ τότε θα είναι:

$$\varphi_k = \vartheta_{n_1} - \vartheta_{n_2} = n_1\vartheta + 2m_1\pi - n_2\vartheta + 2m_2\pi = (n_1 - n_2)\vartheta + 2(m_1 - m_2)\pi$$

Άρα:

$$\boxed{\varphi_k \in S}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$|\varphi_k| < \left|\widehat{W_1OW_2}\right| = \left|\widehat{A_oOW_2} - \widehat{A_oOW_1}\right| \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός p τέτοιος ώστε:

$$\widehat{A_oOW_1} < |p\varphi_k| < \widehat{A_oOW_2} \quad (5) \quad \textbf{\textit{[2]}}$$

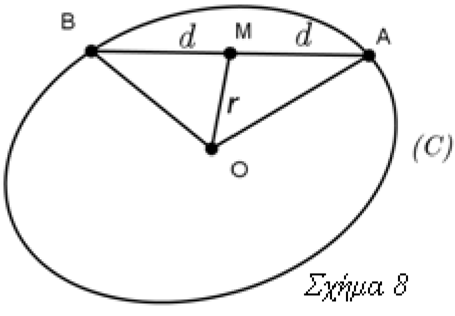
Η σχέση (5) δηλώνει ότι η γωνία $p\varphi_k$ έχει αρχή το σημείο A_o και πέρας ένα σημείο $M_{p\varphi_k} \in H$ επί του κύκλου (O, r_1) που είναι η στροφή του σημείου A_o γύρω από το κέντρο O του κύκλου κατά γωνία ίση με $|p\varphi_k|$ και το οποίο βρίσκεται μεταξύ των δοθέντων σημείων W_1 και W_2 του κύκλου αυτού. **Άρα το σύνολο H είναι πυκνό στον κύκλο (O, r_1). *[3]***

Απόδειξη του Θεωρήματος 3

<u>1η περίπτωση</u>:

Έστω ότι η γωνία $\widehat{AOB}$ **είναι σταθερή**. *(Σχ 8)* Τότε το τρίγωνο AOB είναι κατασκευάσιμο γιατί γνωρίζουμε την πλευρά του $AB = 2d = l = ct$, τη διάμεσό του ίση με r και τέλος τη γωνία $\widehat{AOB}$.

Άρα κατά την περιστροφή της χορδής AB το σημείο A κάποια στιγμή έρχεται στη θέση του σημείου B και συνεπώς $OA = OB$ που σημαίνει ότι η καμπύλη (C) είναι κύκλος.



Σχήμα 8

<u>2η περίπτωση:</u>

Έστω ότι η γωνία $\widehat{AOB}$ **είναι μεταβλητή** και μάλιστα **συνεχής συνάρτηση της θέσης του σημείου A επί της καμπύλης (C)**.*(Σχ.9)*

Επιλέγουμε το σημείο $A = A_o$ ως αρχή εκκίνησης της κίνησης του τμήματος AB επί της (C) και επιλέγουμε τη γωνία ϑ με τιμή άρρητη και όχι πολλαπλάσια του π ή αλλιώς το $\dfrac{2\pi}{\vartheta}$ να είναι άρρητος αριθμός κι ακόμα $\vartheta = 2\left(\pi - \widehat{A_oOB_o}\right)$ με B_o την αρχική θέση του πέρατος B του τμήματος AB.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία των σημείων επί της (C):

$$A_{-1},\ B_{-1},\ A_o,\ B_o,\ A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ A_\rho,\ B_\rho,\ \ldots$$

τέτοια ώστε:

$$A_{-1}B_{-1} = A_oB_o = A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_\rho B_\rho = \ldots = l = 2d$$

ή ακόμα:

$$A_\rho B_\rho = A_{\rho+1}B_{\rho+1} = 2d, \quad \forall \rho \in \mathbb{Z}$$

Από το πρώτο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο $A_\rho OB_\rho$ και στο τρίγωνο $B_\rho OA_{\rho+1}$ προκύπτει:

$$OB_\rho^2 + OA_{\rho+1}^2 = 2r^2 + 2d^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad OA_\rho^2 + OB_\rho^2 = 2r^2 + 2d^2, \quad OM = r$$

άρα:

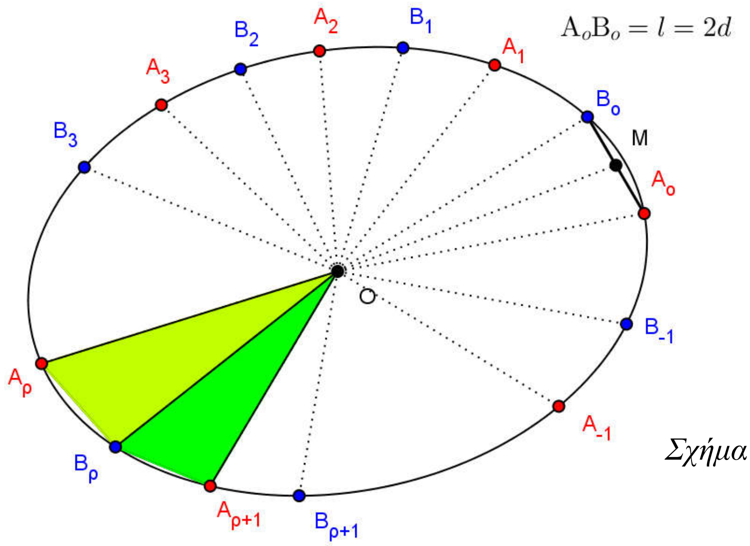
$$OA_\rho^2 = OA_{\rho+1}^2 \text{ δηλαδή } \boxed{OA_\rho = OA_{\rho+1} \quad (1)}$$

όμοια δείχνεται και η σχέση:

$$\boxed{OB_\rho = OB_{\rho+1} \quad (2)}$$

Από τις (1) και (2) και από το γεγονός ότι:

$$\boxed{A_\rho B_\rho = B_\rho A_{\rho+1}}$$



Σχήμα 9

τα τρίγωνα $\left(A_\rho OB_\rho\right), \left(B_\rho OA_{\rho+1}\right)$ είναι ίσα και συνεπώς θα είναι ακόμα:

$$\boxed{\widehat{A_\rho O B_\rho} = \widehat{B_\rho O A_{\rho+1}}, \quad \forall \rho \in \mathrm{Z} \quad (3)}$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το σημείο $A_{\rho+1}$ προκύπτει από τη στροφή του σημείου A_ρ γύρω από το σημείο O κατά γωνία ίση με: $\vartheta = 2\left(\pi - \widehat{A_\rho O B_\rho}\right)$, όπου $\widehat{A_\rho O B_\rho} = \widehat{A_o O B_o}$.

Ύστερα από αυτά προκύπτει ότι τα σημεία

$$A_{-1},\ A_o,\ A_1,\ A_2,\ ...,\ A_\rho,\ ...$$

της ακολουθίας $\{A_n, n \in Z\}$ ανήκουν στην καμπύλη c αλλά και στο ίδιο κύκλο $w = (O, OA_o)$ ο οποίος ταυτίζεται με το σύνολο:

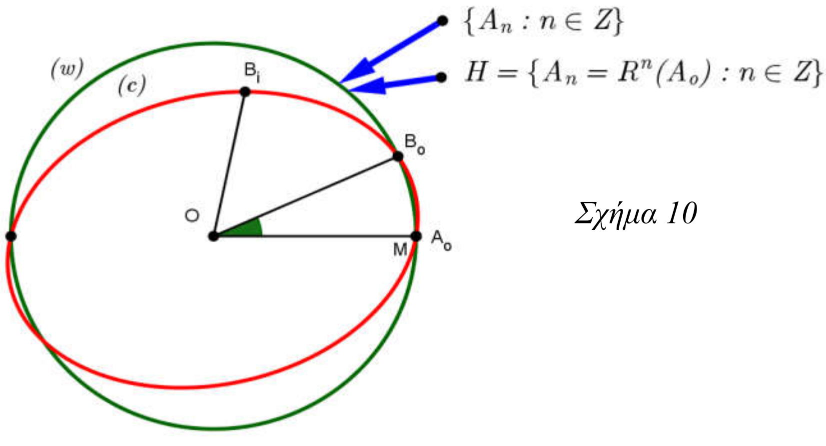
$$H = \left\{A_n = R^n\left(A_o\right) / n \in Z\right\},$$

το οποίο σύμφωνα με το λήμμα 1 είναι πυκνό στον κύκλο w. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι και τα σημεία της ακολουθίας:

$$B_{-1}, B_o, B_1, B_2,\ ..., B_\rho,\ ... \quad (a)$$

τα οποία ανήκουν στην καμπύλη c θα ανήκουν και κύκλο w.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι για ένα σημείο της ακολουθίας (a), έστω το $B_i \in c$ ισχύει: $OB_i < OA_o$, δηλαδή ότι το σημείο αυτό βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου w, όπως δείχνει το σχήμα 10.



Σχήμα 10

Τότε όμως το σημείο αυτό επειδή ανήκει στην καμπύλη (c) πάνω στην οποία ανήκει και η απειρία των σημείων $A_n, n \in Z$ θα είναι και ένα σημείο συσσώρευσης, που σημαίνει πολύ κοντά του θα πρέπει να βρίσκονται άπειρα σημεία του συνόλου H πράγμα που θα ήταν άτοπο.

Όμοια απορρίπτεται και η περίπτωση $OB_i > OA_o$. Άρα και τα σημεία της ακολουθίας: $B_{-1}, B_o, B_1, B_2, \ldots, B_\rho, \ldots$ (a) θα ανήκουν στον κύκλο (w). Επομένως η καμπύλη (c) θα είναι ο κύκλος (w)πράγμα που ζητούσαμε.

Επίλογος

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή όπου παρουσιάστηκε σε γενικές γραμμές η ιδέα του Θεωρήματος του H. Holditch μπορούμε να πούμε ότι μένει ανοιχτός ο δρόμος για πλούσιες εφαρμογές και ενδιαφέρουσες περιπλανήσεις στον όμορφο κόσμο της Γεωμετρίας.

Σημειώσεις

[1] *Θεώρημα Bolzano – Weiestrass: Κάθε άπειρο και περατωμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον έναν οριακό αριθμό.*

[2] *Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την αντίστοιχη πρόταση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:*

«Αν $a,b,x \in R\,(b<a)$ *και ισχύει:* $|x|<|a-b|$ *τότε* $\exists p \in R:\ b<|px|<a$ *»*

[3] *Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να δειχθεί και με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Kronecker. Αναφέρουμε ότι το σύνολο:*

$Z[\vartheta]=\{x+y\vartheta\,/\,x,y\in Z\}$ *και* $\vartheta \in R-Q$ *είναι πυκνό στο* R

Βιβλιογραφία

1. *Arne Broman, Holditch's theorem, Math.Magazine, vol 54 No 3, pp108.*
2. *JU.Edwards, A treatise on the integral calculus, Chelsea publ. Company page 503 (art 478).*
3. *Παπαδοπούλου Ιωάννα, Το θεώρημα του Holditch και ορισμένες γενικεύσεις του. Διπλωματική Εργασία, Θεσ-νίκη Δεκ. 2009.*