ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΚΩΝΙΚΗΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΑΠΟ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ, ΑΠΌ ΤΗ ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΤΗΣ. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΤΩΝ ΕΝΝΕΑ ΣΗΜΕΙΩΝ

Δόρτσιος Κων/νος, Μαθηματικός
Τσίντσιφας Γεώργιος, Μαθηματικός

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία καταβλήθηκε προσπάθεια να μελετηθεί και να παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά μια κωνική τομή με δεδομένα τρία σημεία μη συνευθειακά από τα οποία αυτή διέρχεται και από ένα τέταρτο σημείο το οποίο θα αποτελεί το κέντρο της ζητούμενης κωνικής τομής.

Για το ζήτημα αυτό αξιοποιήθηκαν οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες οι οποίες απουσιάζουν παντελώς από το σχολικό πρόγραμμα στη χώρα μας. Για το λόγο αυτό στην εργασία αυτή γίνεται και μια εισαγωγική αναφορά στον ορισμό καθώς και σε κάποιες ιδιότητες αυτών.

Τέλος στην εργασία αυτή προστέθηκε και η γενίκευση του κύκλου των εννέα σημείων (Euler) η οποία οδηγεί στη λεγόμενη έλλειψη των εννέα σημείων ενός δοθέντος τριγώνου.

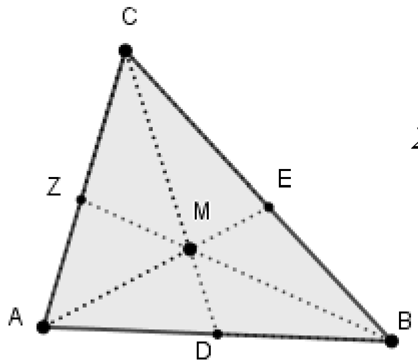
Εισαγωγικά

1. Βαρυκεντρικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Αν σε ένα επίπεδο έχουμε ως δεδομένο ένα τρίγωνο ABC το οποίο να μην εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα τότε κάθε σημείο M του επιπέδου μπορεί να οριστεί από τη διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) με $x, y, z \in R$ για την οποία ισχύει:

1^{o}) $x + y + z = 1$

2^{o}) Αν τα x, y, z θεωρηθούν ως βάρη τοποθετημένα αντίστοιχα στις κορυφές A, B, C του τριγώνου τότε το σημείο M θα είναι το κέντρο

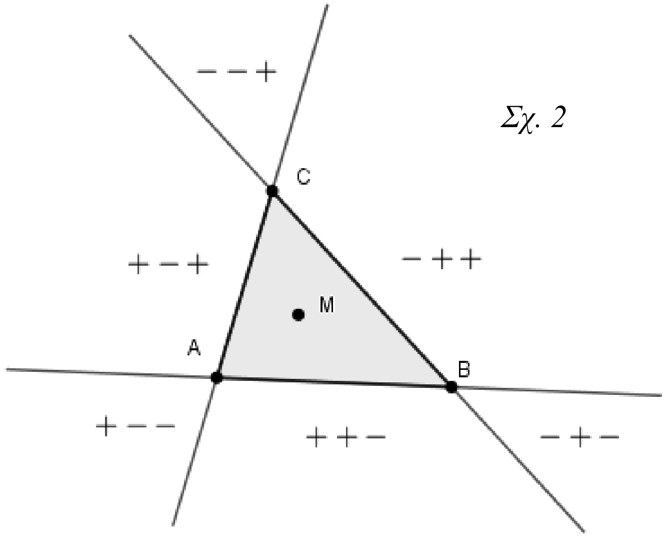


Σχ. 1

βάρους του συστήματος αυτού των βαρών. *(Σχ.1)*

Οι αριθμοί τότε x, y, z λέγονται **κανονικές βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου M . [1]**

Στο σχήμα 2 το σημείο $M(x, y, z)$ μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε θέση του επιπέδου του τριγώνου ABC ανάλογα με τα πρόσημα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων του.



Σχ. 2

Με χρήση αυτών των συντεταγμένων μπορούμε να ορίσουμε την εξίσωση της ευθείας, του κύκλου και γενικά των κωνικών τομών. Για την εμφάνιση επομένως αυτών των σχημάτων αρκεί σε ένα λογισμικό να προσθέσουμε εντολές με τις οποίες λειτουργούν οι συντεταγμένες αυτές.

2. Εξίσωση και κατασκευή ευθείας

2α. Μορφή της εξίσωσης:

Η εξίσωση της ευθείας σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι της μορφής:

$$ux + vy + wz = 0, \quad (1)$$

όπου $u, v, w \in R$ και (x, y, z) οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της ευθείας αυτής.

2β. Κατασκευή της ευθείας:

Θα αναφερθούμε σε ένα συγκεκραμένο παράδειγμα χωρίς να στερείται γενικότητας η αναφορά μας αυτή. Έστω η ευθεία (e) με εξίσωση:

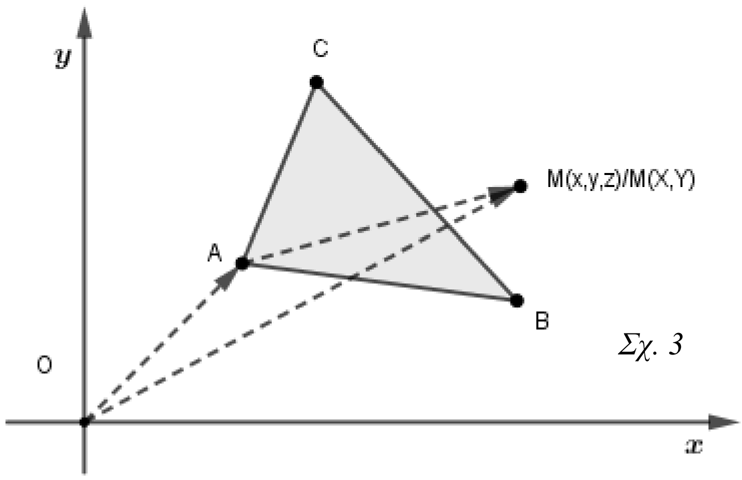
$$2x+3y+z=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε ένα σημείο M της ευθείας αυτής με: $x=1$ και $y=1$. Τότε από την (2) θα είναι: $z=-5$. Άρα προκύπτει η τριάδα $(1,1,-5)$. Επειδή όμως πρέπει $x+y+z=1$, διαιρούμε τα μέλη της τριάδας αυτής με το άθροισμα $1+1-5=-3$ και έτσι προκύπτει η τριάδα βαρυκεντρικών συντεταγμένων: $M\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$.

Όμοια θεωρούμε ένα άλλο σημείο της ευθείας αυτής με $x=-1$ και $y=1$. Τότε πάλι από την (2) θα είναι: $z=-1$. Έτσι προκύπτει η τριάδα $(-1,1,-1)$. Διαιρούμε πάλι με το άθροισμα $-1+1-1=-1$ και έτσι προκύπτει η τριάδα βαρυκεντρικών συντεταγμένων: $N(1,-1,1)$. Κατασκευάζοντας τα σημεία M,N λαμβάνουμε τη θέση της ευθείας (e).

2γ. Αλλαγή από τις βαρυκεντρικές στις καρτεσιανές συντεταγμένες

Γενικά όταν έχουμε μια καμπύλη (c) σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες με εξίσωση $F(x,y,z)=0$ (3), όπου $x+y+z=1$ και ζητούμε την



Σχ. 3

αντίστοιχη εξίσωση αυτής $G(X,Y)=0$, όπου το ζεύγος (X,Y) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε εργαζόμαστε στο ακόλουθο σχήμα *(Σχ.3)* με τον ακόλουθη διαδικασία:

Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου M αναφέρονται στο τρίγωνο ABC όπως ορίστηκαν στην αρχική παράγραφο και οι καρτεσιανές στο ορθοκανονικό σύστημα xOy. Άρα θα είναι:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad (4)$$

Όμως:

$$\overrightarrow{OA} = X(A)\vec{i} + Y(A)\vec{j} \quad (5)$$

Επίσης από τη θεωρία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων μπορεί να δειχθεί ότι είναι: ***(*)***

$$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = y\left(X(\overrightarrow{AB})\vec{i} + Y\left(\overrightarrow{AB}\right)\vec{j}\right) + z\left(X(\overrightarrow{AC})\vec{i} + Y\left(\overrightarrow{AC}\right)\vec{j}\right) \quad (6)$$

Επομένως η σχέση (4) από ενός (5) και (6) έχουμε:

$$X(M)\vec{i} + Y(M)\vec{j} = X(A)\vec{i} + Y(A)\vec{j} + y\left(X(\overrightarrow{AB})\vec{i} + Y\left(\overrightarrow{AB}\right)\vec{j}\right) + z\left(X(\overrightarrow{AC})\vec{i} + Y\left(\overrightarrow{AC}\right)\vec{j}\right)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{r} X(M) = X(A) + yX\left(\overrightarrow{AB}\right) + zX\left(\overrightarrow{AC}\right) \\ Y(M) = Y(A) + yY\left(\overrightarrow{AB}\right) + zY\left(\overrightarrow{AC}\right) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις τα σύμβολα $X(A), X\left(\overrightarrow{AB}\right)$ δηλώνουν τις τετμημένες αντίστοιχα του σημείου A και του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Όμοια τα σύμβολα $Y(A), Y\left(\overrightarrow{AB}\right)$ δηλώνουν τις τεταγμένες των στοιχείων αυτών.

Οι σχέσεις (7) θεωρούμενες ως ένα σύστημα με αγνώστους τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες y, z είναι ένα γραμμικό σύστημα το οποίο γενικά έχει ως λύση την:

$$y = y(X,Y), \quad z = z(X,Y) \quad (8)$$

Αν τώρα στην εξίσωση της καμπύλης (c), δηλαδή στην $F(x,y,z) = 0$, αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές καθώς και την $x = 1 - y(X,Y) - z(X,Y)$ τότε θα προκύψει η ακόλουθη:

$$F(x,y,z) = F\left(1 - y(X,Y) - z(X,Y), y(X,Y), z(X,Y)\right) = G(X,Y)$$

Άρα η εξίσωση:

$$G(X,Y) = 0 \quad (9)$$

είναι η εξίσωση της καμπύλης (c), σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

3. Το πρόβλημα

Να βρεθεί η κωνική τομή (g) η οποία διέρχεται από τρία δοσμένα A,B,C σημεία μη κείμενα επ' ευθείας και να έχει ως κέντρο ένα δοσμένο σημείο $M(x_1,y_1,z_1)$.

Επεξεργασία

Θεωρούμε ως βάση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων το τρίγωνο ABC που ορίζεται από τα δοθέντα σημεία A,B,C. Έστω τώρα $P(x,y,z)$ ένα τυχαίο σημείο ενός ζητούμενης κωνικής τομής (g) όπου x,y,z οι βαρυκεντρικές του συντεταγμένες του. Τότε, σύμφωνα με τη σχετική θεωρία, η εξίσωση ενός κωνικής που ζητούμε θα έχει εξίσωση:

$$(g): f(x,y,z) = pyz + qzx + rxy = 0 \quad (1)$$

Για να διακρίνουμε τη μορφή μιας κωνικής τομής που εκφράζεται από την εξίσωση (1), τότε, σύμφωνα με τη θεωρία μελετούμε το πρόσημο της ποσότητας.

$$D = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2qr - 2rp \quad (2)$$

Έτσι σύμφωνα με το πρόσημο της παράστασης (2) ισχύει:

- Αν $D<0$, τότε η (g) είναι ***έλλειψη. (α)***
- Αν $D=0$, τότε η (g) είναι ***παραβολή ή ζεύγος παραλλήλων ευθειών***, ανάλογα αν το κέντρο της κωνικής τομής είναι ή όχι επ' άπειρον σημείο. ***(β)***
- Αν $D>0$, τότε η (g) είναι ***υπερβολή ή ζεύγος τεμνομένων ευθειών***. ***(γ)***

Σύμφωνα πάλι από τη σχετική θεωρία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων το κέντρο $M(x_1,y_1,z_1)$ μιας κωνικής (g) θα ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial f(x_1,y_1,z_1)}{\partial z_1} \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας τον ανωτέρω τύπο (3) στην (1) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$qz_1 + ry_1 = pz_1 + rx_1 = py_1 + qx_1 \quad (4)$$

τις οποίες θεωρούμε ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές $p,q,r \in R$.

Για τη λύση του συστήματος (4) θεωρούμε, χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα, ότι ισχύει:

$$z_1 + y_1 - x_1 \neq 0 \quad (5)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι είναι $x_1 \neq 0$

Η λύση τότε του συστήματος (4) θα είναι:

$$q = \frac{x_1 y_1 + z_1 y_1 - y_1^2}{x_1 z_1 + x_1 y_1 - x_1^2} p, \quad r = \frac{y_1 z_1 + z_1 x_1 - z_1^2}{x_1 z_1 + x_1 y_1 - x_1^2} p \quad (6)$$

Το πρόσημο της παράστασης D από τη σχέση (2), σύμφωνα με τις τιμές της σχέσης (6), και μετά από πράξεις ισοδυναμεί με το πρόσημα της παράστασης:

$$D_1 = x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 - 2\left(x_1^2 y_1^2 + y_1^2 z_1^2 + z_1^2 x_1^2\right) \quad (7)$$

- Αν $D_1 < 0$, τότε η (g) είναι ***έλλειψη. (α)***
- Αν $D_1 = 0$, τότε η (g) είναι ***παραβολή ή ζεύγος παραλλήλων ευθειών***, ανάλογα αν το κέντρο ενός κωνικής τομής είναι ή όχι επ' άπειρον σημείο. ***(β)***
- Αν $D_1 > 0$, τότε η (g) είναι ***υπερβολή ή ζεύγος τεμνομένων ευθειών. (γ)***

Τέλος η παράσταση D_1, σύμφωνα με την ταυτότητα του De Moivre, ισοδυναμεί με την ακόλουθη:

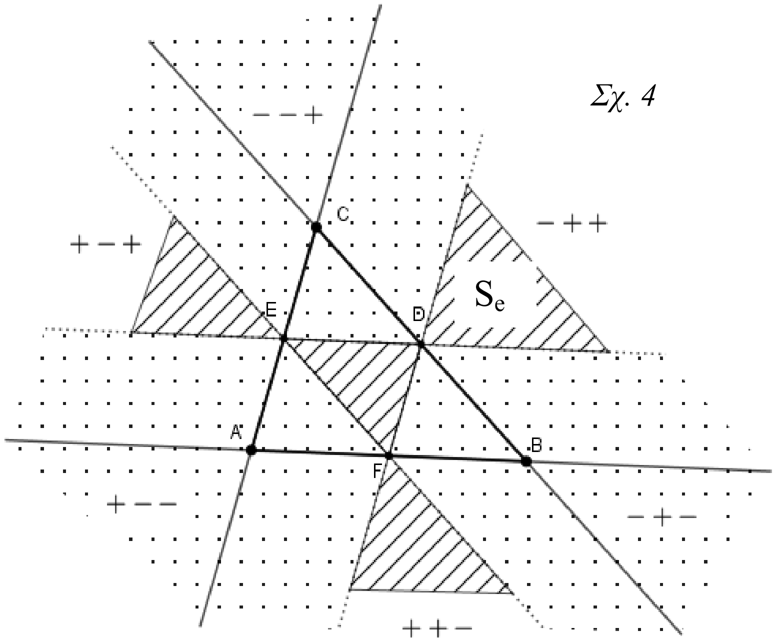
$$D_2 = (1-2x_1)(1-2y_1)(1-2z_1) = -D_1 \quad (8)$$

και συνεπώς η διερεύνηση καταλήγει:

- Αν $D_2 > 0$, τότε η (g) είναι ***έλλειψη. (α)***
- Αν $D_2 = 0$, τότε η (g) είναι ***παραβολή ή ζεύγος παραλλήλων ευθειών***, ανάλογα αν το κέντρο ενός κωνικής τομής είναι ή όχι επ' άπειρον σημείο. ***(β)***
- Αν $D_2 < 0$, τότε η (g) είναι ***υπερβολή ή ζεύγος τεμνομένων ευθειών. (γ)***

Όλα τα ανωτέρω συμπεράσματα μπορούν να ερμηνευτούν και να λάβουν συγκεκριμένη μορφή πάνω στο επίπεδο του τριγώνου ABC, το οποίο φαίνεται στο επόμενο σχήμα. *(Σχ.4)*

Στο σχήμα αυτό οι ευθείες EF, FD, DE, όπου D, E, F είναι τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB του τριγώνου ABC, έχουν εξισώσεις αντίστοιχα ενός εξισώσεις $2x-1=0$, $2y-1=0$, $2z-1=0$ και σχεδιάστηκαν



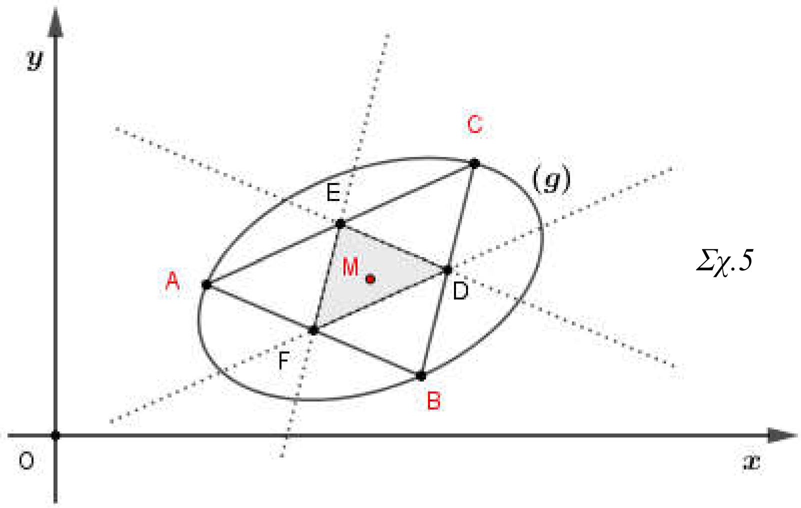
Σχ. 4

σύμφωνα με την παράγραφο 2γ.

Από το πρόσημο της παράστασης D_2 και σύμφωνα με την αναφερθείσα διερεύνηση προκύπτει:

Η κωνική (g) είναι:

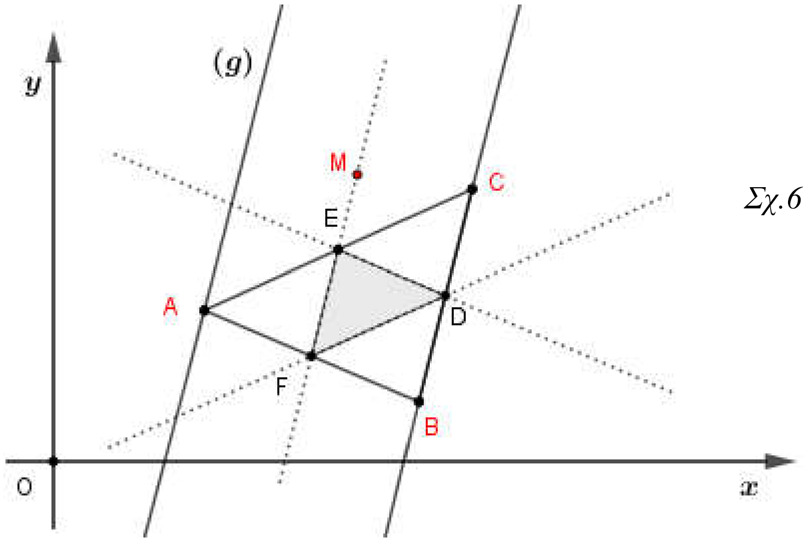
1^o. Έλλειψη, όταν το κέντρο της $M(x_1, y_1, z_1)$ βρίσκεται στη γραμμοσκιασμένη περιοχή S_e. *(Σχ.5)*



Σχ.5

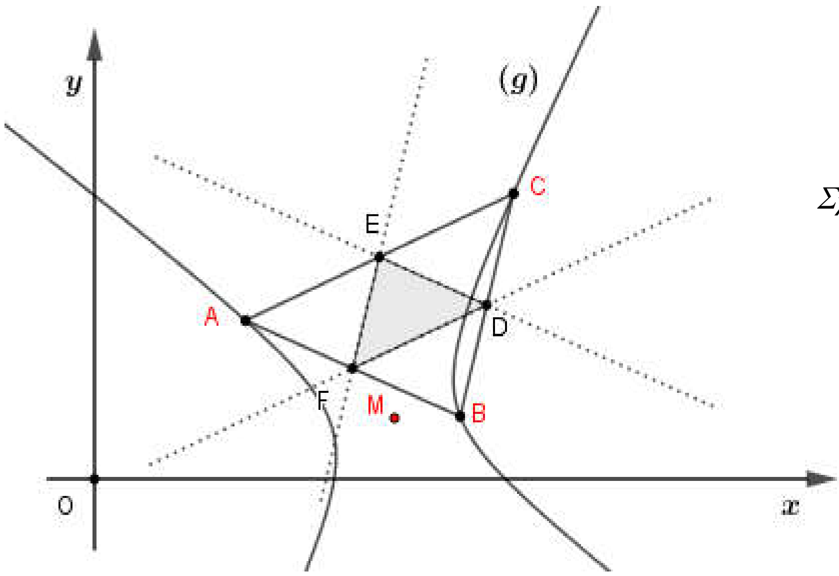
2^o^. Ζεύγος παραλλήλων ευθειών, όταν το M βρίσκεται στο άπειρο ή στο σημειοσύνολο:

$$T = DE \cup EF \cup FD - \{D, E, F\} \text{ } (\Sigma\chi.6)$$



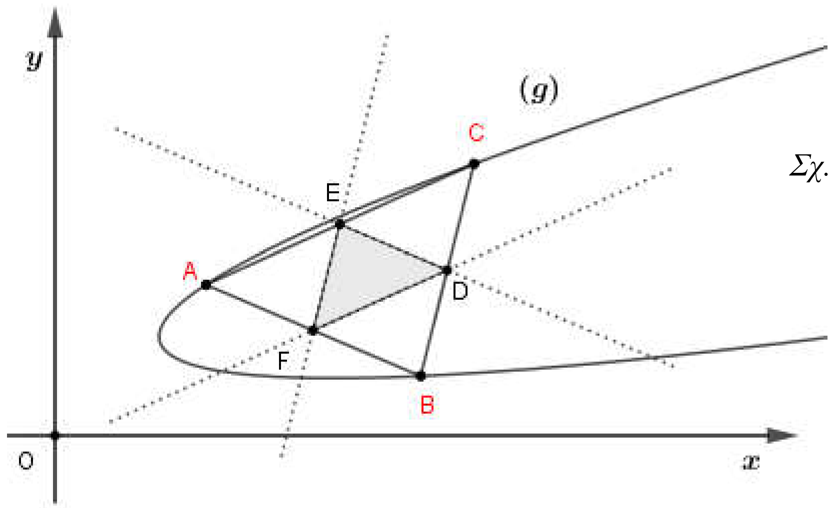
Σχ.6

3^o^. Υπερβολή ή ζεύγος τεμνομένων ευθειών, όταν το M βρίσκεται στο υπόλοιπο επίπεδο «με τις τελίτσες». *(Σχ.7)*



Σχ.7

4°. ***Παραβολή ή ζεύγος παραλλήλων ευθειών***, όταν το σημείο M βρίσκεται ***στο άπειρο.*** *(Σχ. 8)*



Σχ. 8

2η περίπτωση.

Έστω ότι είναι: $x_1 = 0$

Τότε από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$qz_1 + ry_1 = pz_1 = py_1 \Rightarrow z_1 = y_1 \quad (9)$$

και επειδή $x_1 + y_1 + z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = z_1 = \frac{1}{2}$. Άρα για το σημείο M θα είναι:

$$M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Με δεδομένο αυτό το συμπέρασμα και από την (4), εύκολα πάλι διαπιστώνεται ότι θα είναι:

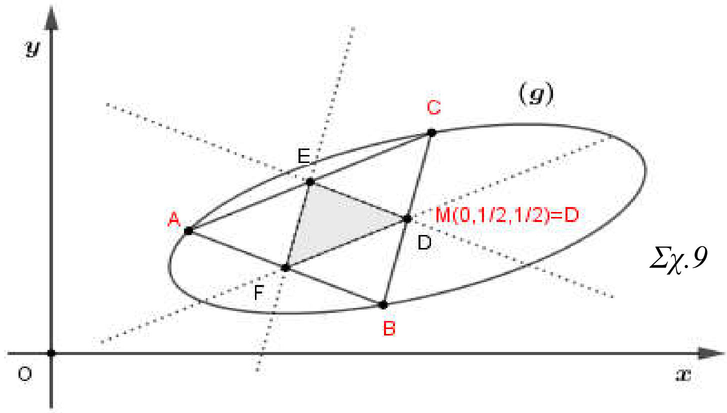
$$p = q + r \quad (10)$$

Άρα από τη σχέση (2) και από τη σχέση (10) προκύπτει:

$$D = -4qr \quad (11)$$

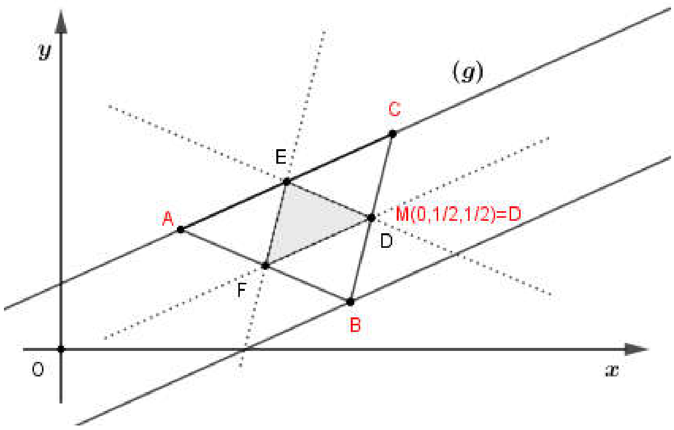
Κάτω από τις προϋποθέσεις αυτές η διερεύνηση της μορφής που θα έχει η κωνική τομή (g) είναι πλέον η εξής:

α) Αν $4qr > 0$, τότε η (g) είναι ***έλλειψη.*** *(Σχ.9)*



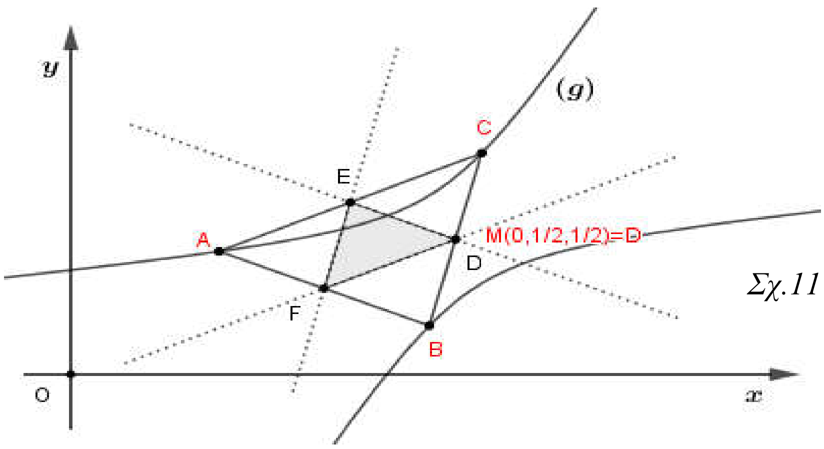
Σχ.9

β) Αν $4qr = 0$, τότε η (g) είναι εκφυλισμένη ***παραβολή (ζεύγος παραλλήλων ευθειών).*** *(Σχ.10)*



Σχ.10

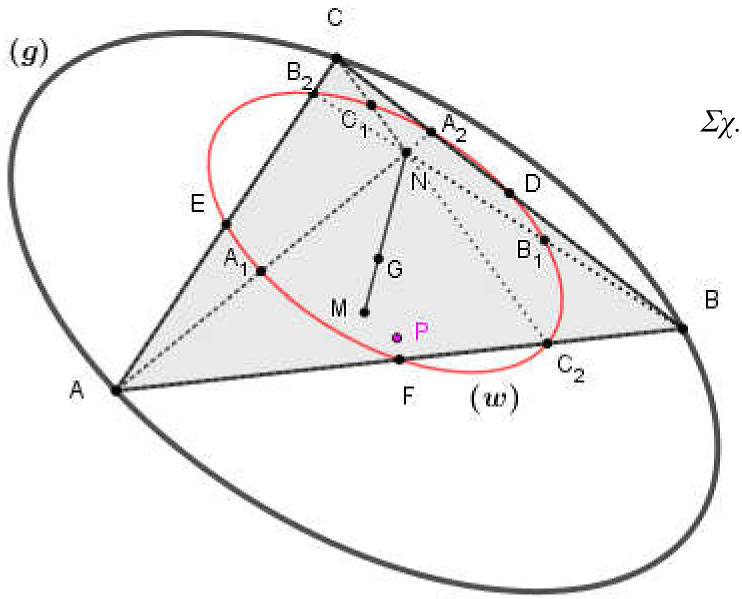
γ) Αν $4qr < 0$, τότε η (g) είναι ***υπερβολή ή ζεύγος τεμνομένων ευθειών.*** *(Σχ.11)*



Σχ.11

4.Έλλειψη των εννέα σημείων(*Γενίκευση του κύκλου του Euler*)

Αν υποθέσουμε ότι το κέντρο M μιας κωνικής τομής *(Σχ.12)* ανήκει στην περιοχή S_e (γραμμοσκιασμένη περιοχή) του σχήματος 4. Τότε ως γνωστόν η κωνική τομή (g) θα είναι μια έλλειψη που θα διέρχεται από τις κορυφές του θεμελιώδους τριγώνου ABC. Αν στο σημείο M αυτό εφαρμόσουμε μια ομοιοθεσία με κέντρο το κέντρο βάρους G του τριγώνου ABC και με λόγο $l=-2$, τότε αυτό μετασχηματίζεται στο σημείο N.

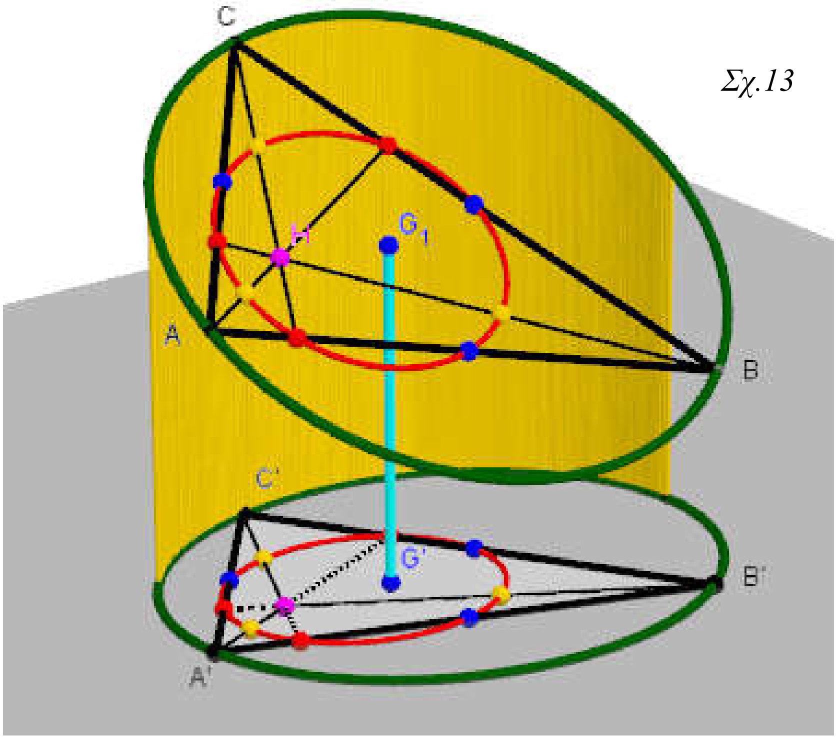


Σχ.12

Έστω A_1, B_1, C_1 είναι τα μέσα των τμημάτων NA, NB, NC και A_2, B_2, C_2 οι τομές των ευθειών NA, NB, NC με ενός BC, CA, AB αντίστοιχα και τέλος έστω D, E, F τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB του τριγώνου ABC αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει έλλειψη (w) που διέρχεται από τα εννέα σημεία $D, E, F, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$. Αυτή είναι η έλλειψη των εννέα σημείων του τριγώνου του τριγώνου ABC.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αν το σημείο M συμπέσει με το περίκεντρο P του τριγώνου ABC τότε η περιγεγγραμμένη έλλειψη (g) είναι κύκλος και η έλλειψη των εννέα σημείων (w) είναι ο κύκλος του Euler.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι η (g) είναι η προβολή κύκλου (g') και κάθε σημείο Q του επιπέδου ενός έλλειψης (g) είναι η προβολή του σημείου Q' του επιπέδου του κύκλου (g') . Τότε είναι προφανές ότι η προβολή του κύκλου (w') των εννέα σημείων του τριγώνου $A'B'C'$ είναι ή έλλειψη (w) που διέρχεται από τα εννέα σημεία $D, E, F, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$. *(Σχ.13).*



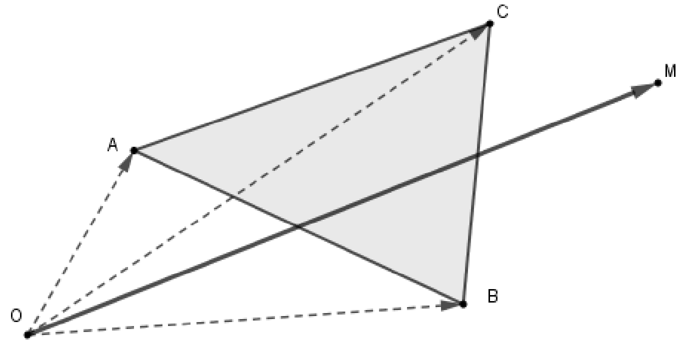
Σχ.13

Επίλογος

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εισαγωγή και η χρήση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων έριξε ένα φως στη συμπεριφορά των κωνικών τομών και στη μορφή που αυτές λαμβάνουν ανάλογα με τα δεδομένα στοιχεία των.

Ακόμα μπορεί κανείς να συνεχίσει τη μελέτη όχι μόνον της έλλειψης των εννέα σημείων ενός τριγώνου, αλλά και γενικά μιας κωνικής τομής των εννέα σημείων ενός τριγώνου.

(*) Σχόλιο: *Στο κατωτέρω σχήμα ισχύει:*



Αν ABC το βασικό τρίγωνο των βαρυκεντρικών συντεταγμένων και O τυχαίο σημείο του επιπέδου του τριγώνου αυτού, τότε από τον ορισμό των συντεταγμένων αυτών για το κάθε σημείο M του επιπέδου αυτού, θα είναι:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \quad \mu\varepsilon \quad x + y + z = 1$$

Αν τώρα αντί του O θεωρήσουμε το σημείο A τότε η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

δηλαδή η σχέση (6) της παραγράφου 2γ.

Βιβλιογραφία

[1] *C. Smith, conic sections, Mac Millan and co, New York 1956.*

[2] *Christina Koblbauer, Barycentric Coordinates, Waterloo, 2012.*

[3] *Zachary Abel, Barycentric Coordinates, August 17, 2007.*

[4] *Paul Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Summer 2001.*

[5] *L.Ripert, La dualité et l`homographie dans le triangle et le tetraèdre, Paris 1898.*

[6] *Θεόκλητος Παραγυίου, Η χρήση των βαρυκεντρικών συντεταγμένων στη λύση προβλημάτων ευκλείδειας Γεωμετρίας. Περιφερειακό Γυμνάσιο – Λύκειο Λευκάρων. Λάρνακα Κύπρου.*

[7] *Γεώργιος Α.Καπέτης, Γεωμετρία του τριγώνου. Θεσσαλονίκη 1996.τόμος Α'.*

Λογισμικό: *Geogebra*