ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΤΟΥ STEINER

Θεματικός άξονας:
Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα.

Δόρτσιος Κων/νος, Μαθ/κός, kdortsi@sch.gr, Κινητό: 6946384148
Τσίντσιφας Γεώργιος, Μαθ/κός gtsintsifas@yahoo.gr, Κιν: 6972273186

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει ως κεντρικό θέμα την αλυσίδα του Steiner. Δηλαδή της ακολουθίας των κύκλων που εφάπτονται μεταξύ των καθώς και δύο άλλων κύκλων όπου ο ένας βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου.

Ειδικότερα η εργασία αυτή έχει ως στόχο την κατασκευή της αλυσίδας αυτής, στηριζόμενη σε μια θεμελιώδη πρόταση, σύμφωνα με την οποία έχοντας ως δεδομένο τους δύο κύκλους, όπου ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου, υπολογίζει το κέντρο και τη δύναμη του μετασχηματισμού της αντιστροφής η οποία οδηγεί τελικά στη ζητούμενη αλυσίδα. Ακόμα στην εργασία αυτή επιχειρείται να λυθεί το πρόβλημα που ζητά τις συνθήκες εκείνες όπου η αλυσίδα που περιβάλλει τον εσωτερικό κύκλο εφαπτομενικά και εγγράφεται στον εξωτερικό κύκλο είναι κλειστή.

Τέλος η προσπάθεια κατασκευής στηρίχθηκε στην ψηφιακή τεχνολογία. Το λογισμικό του ***Geogebra*** υπηρέτησε πιστά την όλη διαδικασία και αυτό βέβαια φαίνεται μερικώς στα καταχωρημένα στιγμιότυπα.

Abstract

The major topic of the present work is the Steiner chain. Namely a sequence of circles tangent to each other as well as two other circles that one lies inside the other.

Specifically this paper aims to construct that chain, based on a fundamental proposal, which states that given the two circles, that one is inside the other, the center and the power of the transformation of the inversion can be computed, which ultimately leads to the desired chain. Furthermore this work attempts to solve the problem seeking those certain conditions, that the chain that surrounds tangentially the inner circle and forms the outer circle is closed.

The effort of the construction is based on digital technology. The software ***Geogebra*** faithfully served the whole process and it is certainly evident, to an extent, by the posted snapshots.

Εισαγωγή

Με αφορμή το όμορφο πρόβλημα της «Αλυσίδας του Steiner», προέκυψε ο προβληματισμός:

Με ποιο τρόπο σήμερα ο δάσκαλος των Μαθηματικών θα μπορούσε να μεταφέρει στην τάξη την όλη επεξεργασία της κατασκευής της «αλυσίδας αυτής» χωρίς να καταντά η δουλειά του μια «γραφική αφήγηση» επεξεργασιών με φόντο «ζωγραφιές» στον πίνακα με το χέρι, πρόχειρες και ουτοπικές τις περισσότερες φορές;

Σήμερα στην εποχή της νέας πλέον τεχνολογίας και με εφόδια πλήθος λογισμικών το πρόβλημα αυτό και όχι μόνο, έρχεται στο προσκήνιο και απαιτεί επεξεργασίες οι οποίες στο παρελθόν ήταν αδιανόητες.

Έτσι το άρθρο που ακολουθεί είναι μια τέτοια απόπειρα εμπλοκής της νέας τεχνολογίας στο να αναδείξει την «αλυσίδα» αυτή η οποία συνεχίζει ακόμα και σήμερα να κρύβει αθέατες πλευρές που περιμένουν τον επισκέπτη και ερευνητή τους.

Ακόμα μπορεί να υποστηρίξει κανείς ότι το κυρίαρχο θεώρημα πάνω στο οποίο θα στηριχθεί η όλη επεξεργασία είναι μια πρόταση καταλυτική και δίνει με πολύ στοιχειώδη τρόπο το δρόμο της κατασκευής αυτής.

1. Βασικές έννοιες

Η όλη επεξεργασία στηρίζεται στο σημειακό μετασχηματισμό της ***αντιστροφής*** και μάλιστα στην ***ομόρροπη (ή θετική)*** αντιστροφή, δηλαδή στην αντιστροφή με θετική δύναμη.

Ορισμός.

Αντιστροφή με κέντρο ένα δοσμένο σημείο O και με δύναμη το θετικό αριθμό p, καλείται ο σημειακός μετασχηματισμός ο οποίος σε κάθε σημείο $M \neq O$ αντιστοιχίζει ένα άλλο σημείο M', το οποίο προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$(OM)\cdot(OM') = p$$

Κύκλος αντιστροφής.

Είναι ο κύκλος με κέντρο το κέντρο O της αντιστροφής και ακτίνα ίση με $r = \sqrt{p}$. Ο κύκλος αντιστροφής εκτός των άλλων είναι σημαντικός γιατί στο περιβάλλον των σύγχρονων λογισμικών στηρίζει σχεδόν όλες τις κατασκευές αντιστρόφων στοιχείων.

Θεώρημα Ι

Σε μια ομόρροπη αντιστροφή ένας τυχαίος κύκλος παραμένει αναλλοίωτος αν και μόνο αν είναι ορθογώνιος με τον κύκλο αντιστροφής.

Θεώρημα ΙΙ

Το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας δύο άνισων κύκλων είναι και κέντρο μιας αντιστροφής η οποία αν εφαρμοστεί στον πρώτο τότε δίνει εικόνα τον δεύτερο.

2. Θεώρημα ΙΙΙ *(Θεμελιώδης πρόταση)*

Δίνεται κύκλος $C(K,R)$ και εσωτερικά αυτού ένας άλλος κύκλος $C'(L,r)$. Ο σημειακός μετασχηματισμός της αντιστροφής $I\left(O,n^2\right)$, με το κέντρο O επί της ημιευθείας KL και σε απόσταση:

$$OK=\frac{d^2-r^2+R^2+\sqrt{\left(d^2-r^2+R^2\right)^2-4d^2R^2}}{2d}, \text{όπου } d=(LK)$$

και με δύναμη $n^2=(OK)^2-R^2$, αφήνει τον C αμετάβλητο και οδηγεί τον C' στον C'' που είναι ομόκεντρος του C.

Απόδειξη

Έστω ότι η ζητούμενη αντιστροφή έχει κέντρο το σημείο Ο και δύναμη το τετράγωνο του μέτρου n της ακτίνας του κύκλου C_a. Έστω δηλαδή ότι κύκλος της ζητούμενης αντιστροφής είναι ο κύκλος $C_a=(O,n)$.

Όπως φαίνεται στο ***(Σχ.1),*** ο αντίστροφος του κύκλου C' είναι ο κύκλος C'', ο οποίος είναι ομόκεντρος του αρχικού C κι ακόμα από το θεώρημα ΙΙ**,** ο κύκλος C'' είναι ομοιόθετος του C' με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο O και λόγο:

$$l=\frac{OK}{OL} \quad (1)$$

Από την αντιστροφή προκύπτει η σχέση:

$$OM\cdot OP=n^2=OK^2-R^2 \quad (2)$$

Από τη δύναμη του σημείου O ως προς τον κύκλο C'' επίσης προκύπτει:

$$ON \cdot OP = OK^2 - m^2 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OK^2 - R^2}{OK^2 - m^2} \quad (4)$$

Ακόμα από την ομοιοθεσία των C' και C'' προκύπτει:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OL}{OK} = \frac{r}{m} \quad (5)$$

Έτσι από τις (4) και (5) επομένως προκύπτει:

$$\frac{OK^2 - R^2}{OK^2 - m^2} = \frac{r}{m} \quad (6)$$

Από τη σχέση (5) επίσης προκύπτει:

$$\frac{OK}{m} = \frac{OL}{r} = \frac{OK - OL}{m - r} = \frac{d}{m - r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OK = \dfrac{md}{m - r} & (7) \\ OL = \dfrac{rd}{m - r} & (8) \end{cases}$$

Αν θέσουμε τώρα:

$$OK = x \quad (9)$$

τότε από την (7) προκύπτει:

$$m = \frac{rx}{x - d} \quad (10)$$

Από τις (9) και (10) η (6) μετά από πράξεις έχουμε:

$$\frac{x^2 - R^2}{x^2 - m^2} = \frac{r}{m} \Leftrightarrow \frac{x^2 - R^2}{x^2 - \left(\dfrac{rx}{x - d}\right)^2} = \frac{r}{\dfrac{rx}{x - d}} \quad (11)$$

Η (11) μετά από πράξεις γίνεται:

$$\boxed{d \cdot x^2 - \left(d^2 - r^2 + R^2\right)x + d \cdot R^2 = 0 \quad (12)}$$

Η εξίσωση (12) έχει διακρίνουσα:

$$D = b^2 - 4ac = \left(d^2 - r^2 + R^2\right)^2 - 4d^2R^2$$

Όμως

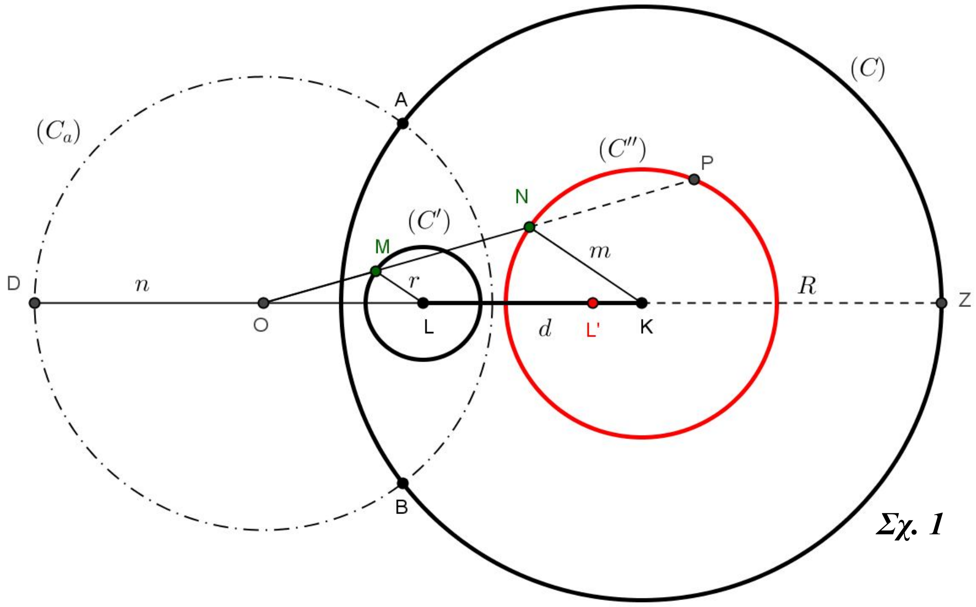
$$D = \left(d^2 - r^2 + R^2\right)^2 - 4d^2R^2 = \left(d^2 - r^2 + R^2 - 2dR\right)\left(d^2 - r^2 + R^2 + 2dR\right)$$

Για το πρόσημο της διακρίνουσας αυτής ισχύουν:

- $d^2 - r^2 + R^2 + 2dR = d^2 + \overbrace{\left(R^2 - r^2\right)}^{>0} + 2dR > 0 \quad (13)$

διότι $R > r$ εφόσον ο κύκλος C' εσωτερικός του κύκλου C.

- $d^2 - r^2 + R^2 - 2dR = (R - d - r)(R - d + r) > 0 \quad (14)$



Σχ. 1

διότι $R > d + r$ και $R > d$.

Από τις (13) και (14) προκύπτει ότι $D > 0$ και συνεπώς η εξίσωση (12) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Αυτές είναι:

$$x_{1,2} = \frac{d^2 - r^2 + R^2 \pm \sqrt{\left(d^2 - r^2 + R^2\right)^2 - 4d^2R^2}}{2d} \quad (15)$$

Για να δεχθούμε κάποια από τις ρίζες αυτές ως λύση του προβλήματός μας θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα R του αρχικού κύκλου C. Έτσι μελετούμε τη θέση του αριθμού R σε σχέση με τη θέση των ριζών του τριωνύμου:

$$f(x) = d \cdot x^2 - \left(d^2 - r^2 + R^2\right)x + d \cdot R^2$$

Για το λόγο αυτό μελετούμε το πρόσημο της παράστασης $d \cdot f(R)$.

Άρα:

$$d \cdot f(R) = d \cdot \left(d \cdot R^2 - \left(d^2 - r^2 + R^2\right)R + d \cdot R^2\right) =$$
$$= d \cdot R\left(d \cdot R - d^2 + r^2 - R^2 + d \cdot R\right) = d \cdot R\left(-R^2 + 2d \cdot R + r^2 - d^2\right) =$$
$$-d \cdot R(R - d - r)(R - d + r) < 0$$

Επομένως:

$$d \cdot f(R) < 0$$

και συνεπώς ο αριθμός R βρίσκεται ανάμεσα από τις πραγματικές ρίζες του τριωνύμου f. Δηλαδή:

$$x_1 < R < x_2$$

Έτσι δεκτή ρίζα είναι η

$$\boxed{x_2 = OK = \frac{d^2 - r^2 + R^2 + \sqrt{\left(d^2 - r^2 + R^2\right)^2 - 4d^2R^2}}{2d} \qquad (16)}$$

η οποία προσδιορίζει τη θέση του κέντρου της ζητούμενης αντιστροφής.

Τέλος από τη (2) προκύπτει και δύναμη της αντιστροφής η οποία θα είναι:

$$\boxed{n^2 = x_2^2 - R^2 \qquad (17)}$$

Παρατηρήσεις:

1η) Το σχήμα 1 κατασκευάστηκε ακριβώς με τη χρήση του τύπου (16). Δηλαδή με γνωστά τα μεγέθη R, r, d κατασκευάστηκε το σημείο O ώστε να είναι $OK = x_2$ και στη συνέχεια κατασκευάστηκε ο κύκλος αντιστροφής (C_a) με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ίση με n σύμφωνα με τον τύπο (17). Τέλος με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra βρέθηκε ο κύκλος (C'') ο οποίος είναι αντίστροφος του κύκλου (C'), ως προς την αντιστροφή που ορίζει ο κύκλος (C_a).

2η) Όπως φαίνεται κι από το σχήμα το αντίστροφο του κέντρου L του κύκλου (C') είναι το σημείο L' το οποίο δεν ταυτίζεται με το κέντρο K του κύκλου C.

3. Βασικό πρόβλημα της Αλυσίδας Steiner

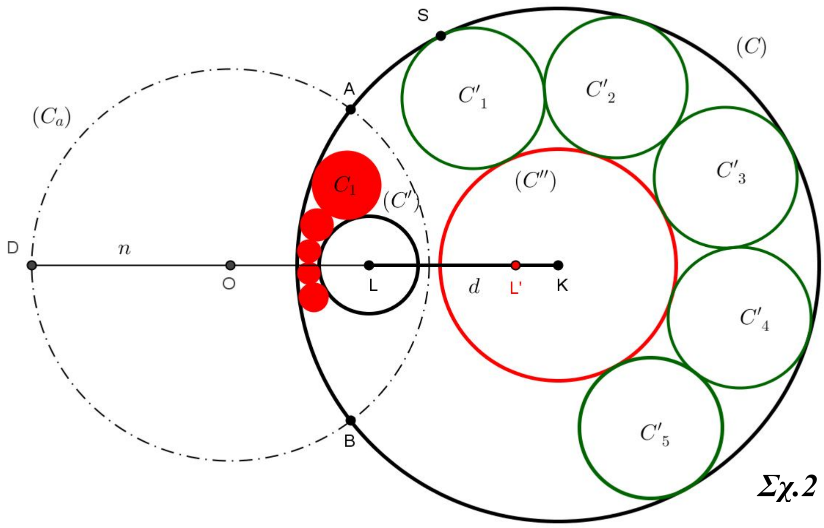
3.1 Δίνεται κύκλος $C(K, R)$ και εσωτερικά αυτού ένας άλλος κύκλος $C'(L, r)$. Ζητείται να κατασκευαστεί ακολουθία κύκλων

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ οι οποίοι να εφάπτονται στο C, C' καθώς και μεταξύ των.

Κατασκευή

Σύμφωνα με τους τύπους (16) και (17) της θεμελιώδους προτάσεως III κατασκευάζουμε το κέντρο O και τη δύναμη n^2 αντιστροφής και οδηγούμε τον κύκλο C' στον ομόλογό του C'' ομόκεντρο του C. Τώρα είναι εύκολο να κατασκευάσουμε την ακολουθία των κύκλων $C'_1, C'_2, C'_3, \ldots$ οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ των, εφάπτονται των C, C'' καθώς και μεταξύ των.

Στη συνέχεια με το λογισμικό εύκολα κατασκευάζονται οι αντίστροφες εικόνες της αλυσίδας αυτής με αποτέλεσμα να έχουμε το



Σχ.2

τελικό ***(Σχ.2).***

* * *

Η ακολουθία των κύκλων $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ονομάζεται ***«αλυσίδα του Steiner»*** και γενικότερα αποτελείται από άπειρους κύκλους οι οποίοι ***«περιτυλίγουν»*** απεριόριστες φορές εφαπτομενικά τον εσωτερικό κύκλο C' και περικλείονται εφαπτομενικά στον εξωτερικό κύκλο C. Γενικώς αυτή είναι μια ανοικτή αλυσίδα του Steiner. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η αλυσίδα αυτή κλείνει ***με μια μόνον «περιτύλιξη»*** τον εσωτερικό κύκλο.

3.2 Θεώρημα IV

Δίνεται κύκλος $C(K, R)$ και εσωτερικά αυτού ο κύκλος $C'(L, r)$.

Αν η κλειστή και μιας περιτύλιξης αλυσίδα του Steiner αποτελείται από τους $C_1, C_2, C_3, ..., C_\rho$ $(\rho = 3,4,5,...)$ κύκλους τότε θα ισχύει:

$$\frac{180^o}{\text{Τοξημ}\dfrac{R-m}{R+m}} = \rho \in N^* \quad (1)$$

όπου m η ακτίνα του αντιστρόφου κύκλου του $C'(L,r)$ που είναι ομόκεντρος του $C(K,R)$.

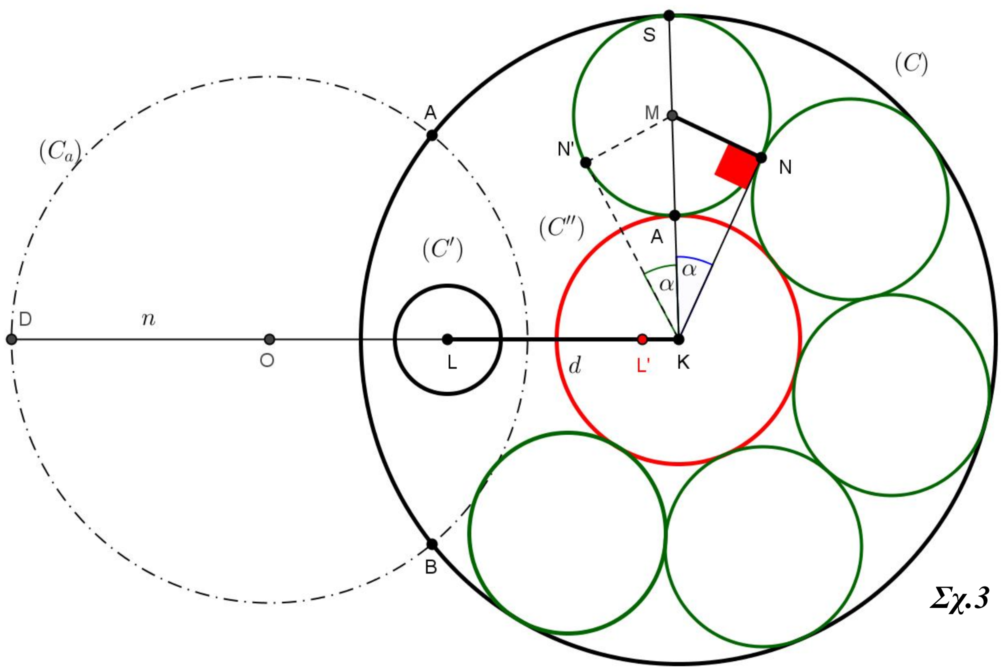
Απόδειξη

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο KMN, όπου η KN είναι η εφαπτομένη που άγεται από το κέντρο K προς τον πρώτο κύκλο μιας κλειστής αλυσίδας του Steiner ***(Σχ.3).*** Τότε είναι:

$$KM = \frac{R+m}{2}, \quad MN = \frac{R-m}{2} \quad (2)$$

επομένως θα είναι: $\eta\mu\alpha = \dfrac{R-m}{R+m}$

και συνεπώς: $\alpha = \text{Τοξημ}\dfrac{R-m}{R+m}$



Σχ.3

Εφόσον τώρα η αλυσίδα περιέχει ακέραιο αριθμό κύκλων, έστω ρ, τότε θα είναι:

$$\rho = \frac{360^o}{2a} = \frac{180^o}{\text{Τ}o\xi\eta\mu \dfrac{R-m}{R+m}}$$

Δηλαδή: $\dfrac{180^o}{\text{Τ}o\xi\eta\mu \dfrac{R-m}{R+m}} = \rho \in N^*$

3.3 Εφαρμογή

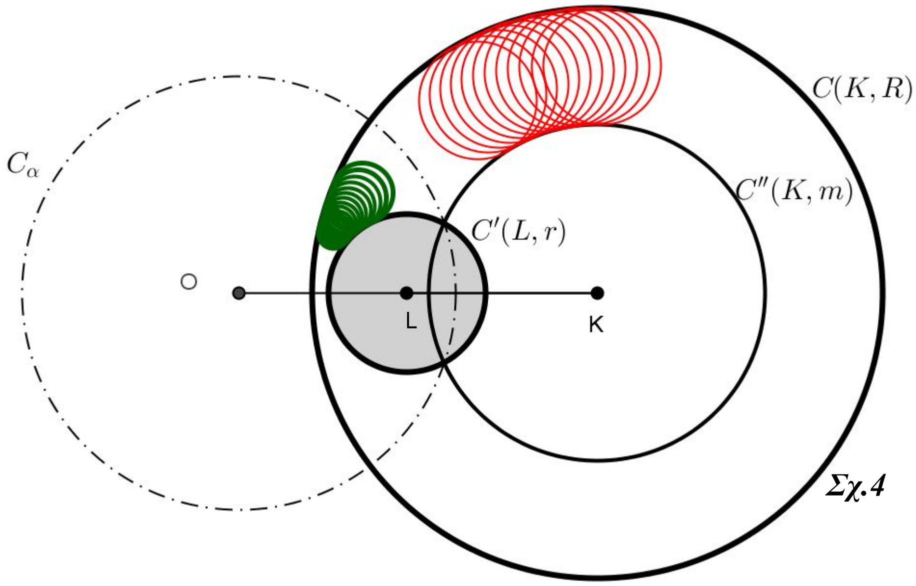
Δίνεται κύκλος $C(K,R)$ και εσωτερικά αυτού ένας άλλος κύκλος $C'(L,r)$. Ζητούμε τη συνθήκη εκείνη ώστε ανάμεσά τους η αλυσίδα του Steiner να έχει δώδεκα κύκλους.

Λύση:

Εφόσον η ζητούμενη αλυσίδα έχει δώδεκα κύκλους από τον τύπο (1) του Θεωρήματος IV προκύπτει:

$$\frac{180^o}{\text{Τ}o\xi\eta\mu \dfrac{R-m}{R+m}} = 12 \Leftrightarrow \frac{R-m}{R+m} = \eta\mu 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{άρα: } R = pm, \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ p = \frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}} \quad (1)$$



Σχ.4

Όμως από τον τύπο (10) του Θεωρήματος ΙΙΙ είναι: $m = \dfrac{rx}{x-d}$, $\mu\varepsilon\ x = OK$,

επομένως η σχέση (1) γίνεται τελικά: $R = \dfrac{prx}{x-d} \quad (2)$

Τέλος από τον προηγούμενο τύπο (2) καθώς και από τη σχέση (16) του Θεωρήματος **ΙΙΙ** προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{d^2 - r^2 + \left(\dfrac{prx}{x-d}\right)^2 + \sqrt{\left(d^2 - r^2 + \left(\dfrac{prx}{x-d}\right)^2\right)^2 - 4d^2\left(\dfrac{prx}{x-d}\right)^2}}{2d} = x \quad (3)$$

Λύνοντας με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra την εξίσωση αυτή υπολογίζουμε τη τιμή του x η οποία δίνει και την τιμή της ακτίνας R του κύκλου C. Από το σημείο αυτό και πέρα η κατασκευή της αλυσίδας είναι απλή και ένα στιγμιότυπο της κατασκευής της φαίνεται στο ***(Σχ.4)***.

Αν ακόμα τη σχέση (2) τη λύσουμε ως προς x τότε αυτή γίνεται: $x = \dfrac{Rd}{R-pr}$. Αντικαθιστώντας τέλος την τιμή αυτή στην εξίσωση (3) τότε προκύπτει ότι η ζητούμενη συνθήκη είναι:

$$\frac{d^2 - r^2 + R^2 + \sqrt{\left(d^2 - r^2 + R^2\right)^2 - 4d^2R^2}}{2d} = \frac{Rd}{R-pr} \quad (4)$$

* * *

Τέλος για την περίπτωση όπου η αλυσίδα του Steiner είναι κλειστή αλλά κάνει περισσότερες της μιας περιτυλίξεις ανάμεσα στους δύο κύκλους C και C' τότε εύκολα αποδείχνεται ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

3.4 Θεώρημα V

Δίνεται κύκλος $C(K,R)$ και εσωτερικά αυτού ο κύκλος $C'(L,r)$. Αν η κλειστή αλυσίδα του Steiner με λ (λ=2,3,4,…) περιτυλίξεις αποτελείται από τους $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\rho$ $(\rho = 3,4,5,\ldots)$ κύκλους τότε θα ισχύει:

$$\frac{180^o \lambda}{\text{Τ}o\xi\eta\mu \dfrac{R-m}{R+m}} = \rho \in N^* \quad (1)$$

όπου m η ακτίνα του αντιστρόφου κύκλου του $C'(L,r)$ που είναι

ομόκεντρος του $C(K,R)$**.**

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1$^{\eta}$) Αν στη σχέση (1) θέσουμε $\alpha = \text{Το}\xi\eta\mu\dfrac{R-m}{R+m}$, αναφερόμενοι στο ***(Σχ.3)*** του Θεωρήματος **IV,** τότε η σχέση αυτή γίνεται η εξίσωση:

$$180^{o} \cdot \lambda = \rho \cdot \alpha \quad (2),$$

όπου $\lambda \in \mathrm{N}\,(\lambda \geq 2)$ εκφράζει τον αριθμό των περιτυλίξεων και $\rho \in \mathrm{N}\,(\rho \geq 6)$ το πλήθος των κύκλων της αλυσίδας.

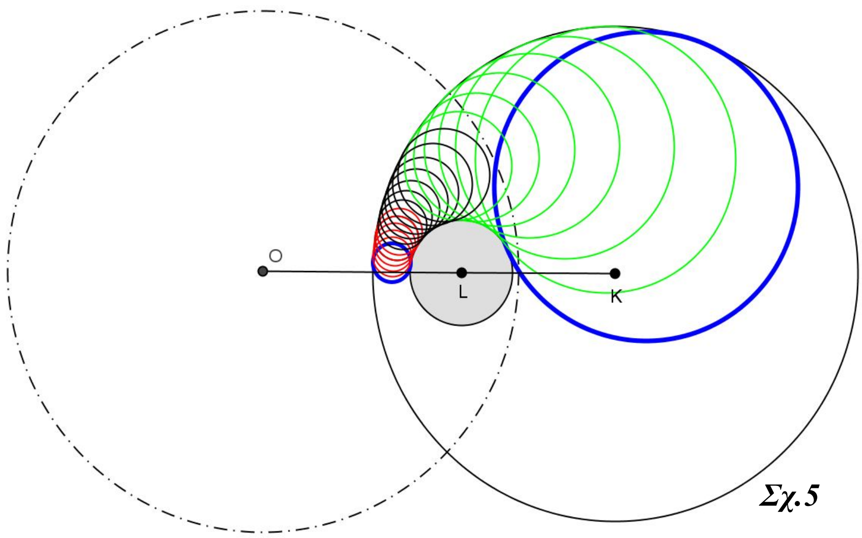
2$^{\eta}$) Για να υπάρχει κλειστή αλυσίδα του Steiner στην περίπτωση αυτή πρέπει προφανώς ο αριθμός α να μην είναι άρρητος .

3$^{\eta}$) Κατά τη λύση της (2) με αγνώστους τους φυσικούς λ, ρ και α έναν θετικό ρητό αριθμό προκύπτει:

$$\rho = 180^{o} \cdot \frac{\lambda}{\alpha} \quad (3)$$

Αν στην εξίσωση (3) θέσουμε διάφορες τιμές στο α τέτοιες ώστε όταν είναι ακέραιες να μη διαιρούν τον αριθμό 180^{o} τότε εύκολα υπολογίζουμε την ακέραια τιμή του λ ώστε να προκύψει ακέραια τιμή για τον άγνωστο ρ. Στη συνέχεια με την ίδια μέθοδο της εφαρμογής 3.3 κατασκευάζουμε τη ζητούμενη αλυσίδα.

Παράδειγμα: Έστω $\alpha = 27^{o}$ **τότε θα είναι** $\lambda = 3$**, δηλαδή τρεις περιτυλίξεις στους κύκλους** C, C' **και τότε σύμφωνα με την (3) ο**



Σχ.5

αριθμός των κύκλων της αλυσίδας θα είναι: $\rho = 20$ **κύκλοι και φυσικά οι δύο αρχικοί κύκλοι** C, C' **θα εξαρτηθούν από τα δεδομένα αυτά.**

Το ***(Σχ.5)*** παριστά ένα στιγμιότυπο της αλυσίδας αυτής η οποία έχει 20 κύκλους οι οποίοι εφάπτονται μεταξύ των καθώς επίσης και των δύο κύκλων C, C'. Αν η αλυσίδα αυτή αναπτυχθεί τότε θα κάνει τρεις περιελίξεις γύρω από τον εσωτερικό κύκλο και μάλιστα ο τελευταίος κύκλος της αλυσίδας θα έρθει στη θέση εκείνη ώστε να εφάπτεται με τον αρχικό.

Επίλογος

Είναι φανερό ότι στο ανωτέρω πρόβλημα προέκυψαν σχεδιαστικά στοιχεία το οποία με τον κλασσικό τρόπο δεν θα ήταν δυνατό να πραγματοποιηθούν. Η σχεδίαση των αντιστρόφων στοιχείων*(σημείων και κύκλων),* καθώς και η επίλυση της εξίσωσης (3) της εφαρμογής 3.3 έγιναν με τη χρήση λογισμικού και οδήγησαν σε σχήματα που καταφέρνουν να απεικονίσουν το όλο δρώμενο με πιστότητα και μεγάλη ακρίβεια.

Στη συγκεκριμένη εργασία η λύση της εξίσωσης (3) της εφαρμογής 3.3 είναι μια σημαντική αξιοποίηση της νέας αυτής τεχνολογίας η οποία μπορεί να προσφέρει πολλά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η άμεση λύση μέσω ενός λογισμικού περιβάλλοντος μας οδηγεί απ' ευθείας στον υπολογισμό και την κατασκευή όλων των στοιχείων της εφαρμογής αυτής.

Σήμερα υπάρχουν αρκετά λογισμικά που διαχειρίζονται τα θέματα αυτά και είναι καιρός να μπούνε στην καθημερινότητα του σχολείου και στην υπηρεσία της διδακτικής πράξης όχι μόνο των Μαθηματικών, αλλά και πολλών άλλων μαθημάτων.

Βιβλιογραφία

1. *Τσίντσιφας Γεώργιος. Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί. (Σημειώσεις)*
2. *Σπ. Γ. Κανέλλου. Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ΄,Ε΄,ΣΤ΄ Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως(ΟΕΔΒ 1975)*
3. *Δόρτσιος Κώστας, Αμαραντίδης Σάββας. Σημειακοί μετασχηματισμοί μέσα από το Cabri – geometryII (Θεώρημα Feuerbach. Αλυσίδα του Steiner). 2η Μαθηματική Εβδομάδα ΕΜΕ, Πρακτικά σελ. 255.*
4. *Jean-Claude Daniel. Les porismes de Steiner. Irem de Reims. No 11-avril 1993.*
5. *Miguel de Guzman. Aventures mathématiques. 1990, p.71*

Διαδίκτυο

1. http://eisatopon.blogspot.gr/2013/11/steiner-collier-des-cercles.html