Το κανονικό πεντάγωνο

Γ.Τσίντσιφας

14 Ιουνίου 2020

Επάνοδος σε μιά παλιά εικασία

Το 1893 ο J. Sylvester έθεσε το ακόλουθο πρόβλημα. Αν είναι Λ ένα σύνολο σημείων του επιπέδου ώστε στην ευθεία δύο σημείων του Λ να ευρίσκεται ένα τουλάχιστον ακόμη σημείο του Λ, τότε όλα τα σημεία του Λ θα κείνται επ'ευθείας. Οι P.Erdos, T. Gallai και L. Kelly έδοσαν λύση. Το πρόβλημα του Sylvester ήταν η αφορμή για να προκύψει το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα

Εστω το επίπεδο σημειοσύνολο $G = (A_1, A_2, ...A_n)$ σε γενική θέση, δηλαδή μη υπαγόμενα σε κάποια αλγερική συνθήκη π.χ. της μορφής $M = (|x|, y), |x| < 1, x, y$ πραγματικοί αριθμοί, ώστε ανά τρία σημεία να ευρίσκωνται εντός ζώνης εύρους Δ. Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι όλα τα σημεία θα ευρίσκωνται εντός ζώνης 2Δ. Πράγματ αυτό φαίνεταιι αν πάρουμε μιά διάμετρο του G και τις δύο παραλλήλους εκατέροθεν. Το πρόβλημα είναι, αν μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα πραγματικό αριθμό κ, όσο δυνατό μικρότερο, ώστε όλα τα σημεία του G να περιέχωνται σε ζώνη εύρους κΔ. Προφανώς κ<2.

Το πρόβλημα μου αυτό δημοσιεύτηκε το 1973 στο περιοδικό The Amer.Math. Monthly, problem 5973. Υπήρξαν διάφορα σχόλια. Αρχικά διατύπωσε την εικασία ο M. Golbert και αργότερα διάφοροι άλλοι Μαθηματικοί οτι $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Ακολούθησαν διάφορες γενικεύσεις σε χώρους E^n αλλά πάντα για είδικες περιπτώσεις. Εγιναν προσπάθειες για λύση απο εμένα και άλλους, αλλά χωρίς επιτυχία. Πρόσφατα αποφάσισα να ξαναδώ παλιά προβλήματα που παρέμεναν κλειστά. Τελικά άλλαξα τον τρόπο αντιμετώπισης. Εδω σκέφτηκα να δημιουργήσω ένα σύνολο $G = (A_1, A_2.....A_n)$ με την ιδιότητα της ζώνης Δ, δηλαδή ανά τρία σημεία να ευρίσκονται εντός της ζώνης εύρους Δ. Αυτά που παραθέτω παρακάτω νομίζω οτι είναι η λύση της εικασίας.

Ξεκινούμε απο ενα σύνολο $G = (A, B, C, D)$ τεσσαρων σημείων που ανα τρία ευρίσκονται σε ζώνη εύρους Δ. Προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τον ελάχιστο κ ώστε όλα τα σημεία να ευρίσκονται σε ζώνη εύρους κΔ. Εδώ το πρόβλημα είναι απλό και βλέπουμε οτι κ=1. Πράγματι αν το τετράπλευρο $ABCD$ είναι τραπέζιο προφανώς κ=1. Αν στις 4 κορυφές του τραπεζίου $ABCD$ προσθέσω ακόμη ενα σημείο θα προκύψουν 10 τρίγωνα Προσπαθώ να βρώ την θέση πέμπτου σημείου ώστε να μπορούν τα περισσότερα σημεία να έχουντην ιδιότητα της ζώνης η τουλάχιστον τα τρίγωνα να έχουν ίσα υψη.

Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής. Θεωρούμε την ευθεία Dx συμμετρική της DC προς DA

και την Cy συμμετρική της CD προς CB. Είναι $E = Dx \cap Cy$. Τα τρίγωνα AMD, BNC είναι ισοσκελή άρα τα παρά την βάση ύψη τους είναι ίσα. Στο σχήμα (α) τα έξη τρίγωνα $ABC, BCD, CDA, DAB, ADE, BCE$ έχουν όλα την ιδιότητα της ζώνης. Δηλαδή έχουν ένα ύψος ίσο προς Δ. fig. 1

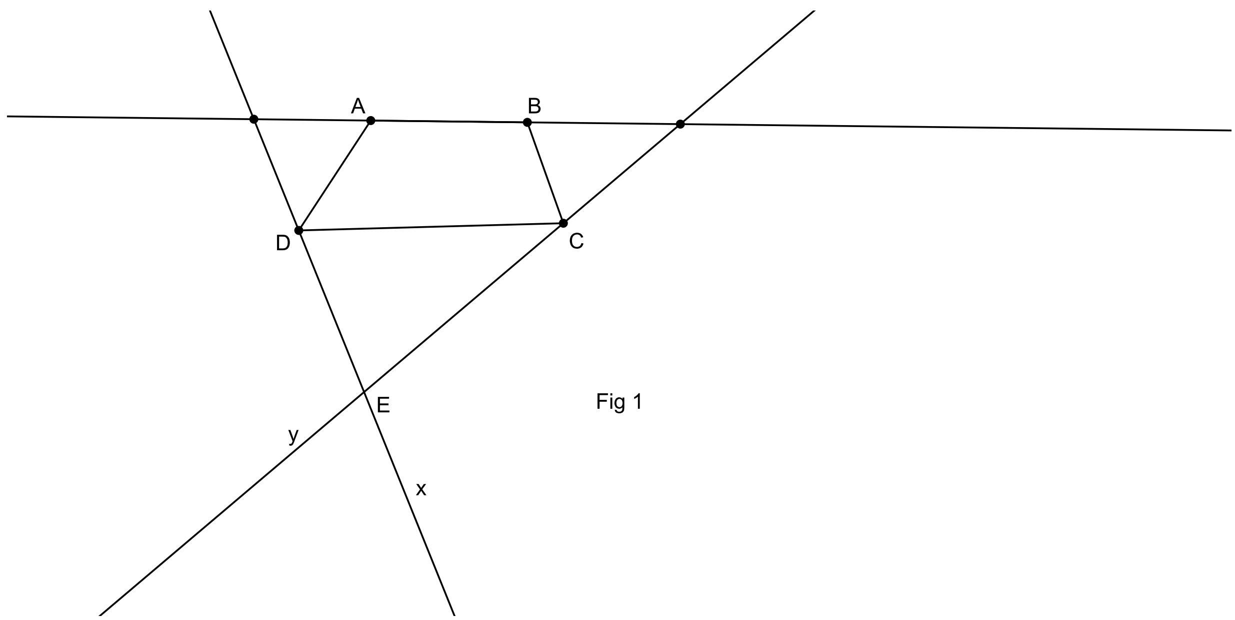


Fig 1

Πρέπει λοιπόν να γίνει τέτοια κατασκευή στο σχήμα (α) ώστε να δώσει και τα υπόλοιπα 4 τρίγωνα εντός ζώνες Δ. Αυτό γίνεται αν πάρουμε το τραπέζιο $ABCD$ ισοσκελές με $DA = AB/2 = BC$ και ακόμη $\angle DAB = 108^0$. Δηλαδή το πεντάγωνο $ABCED$ γίνεται το κανονικό πεντάγωνο.

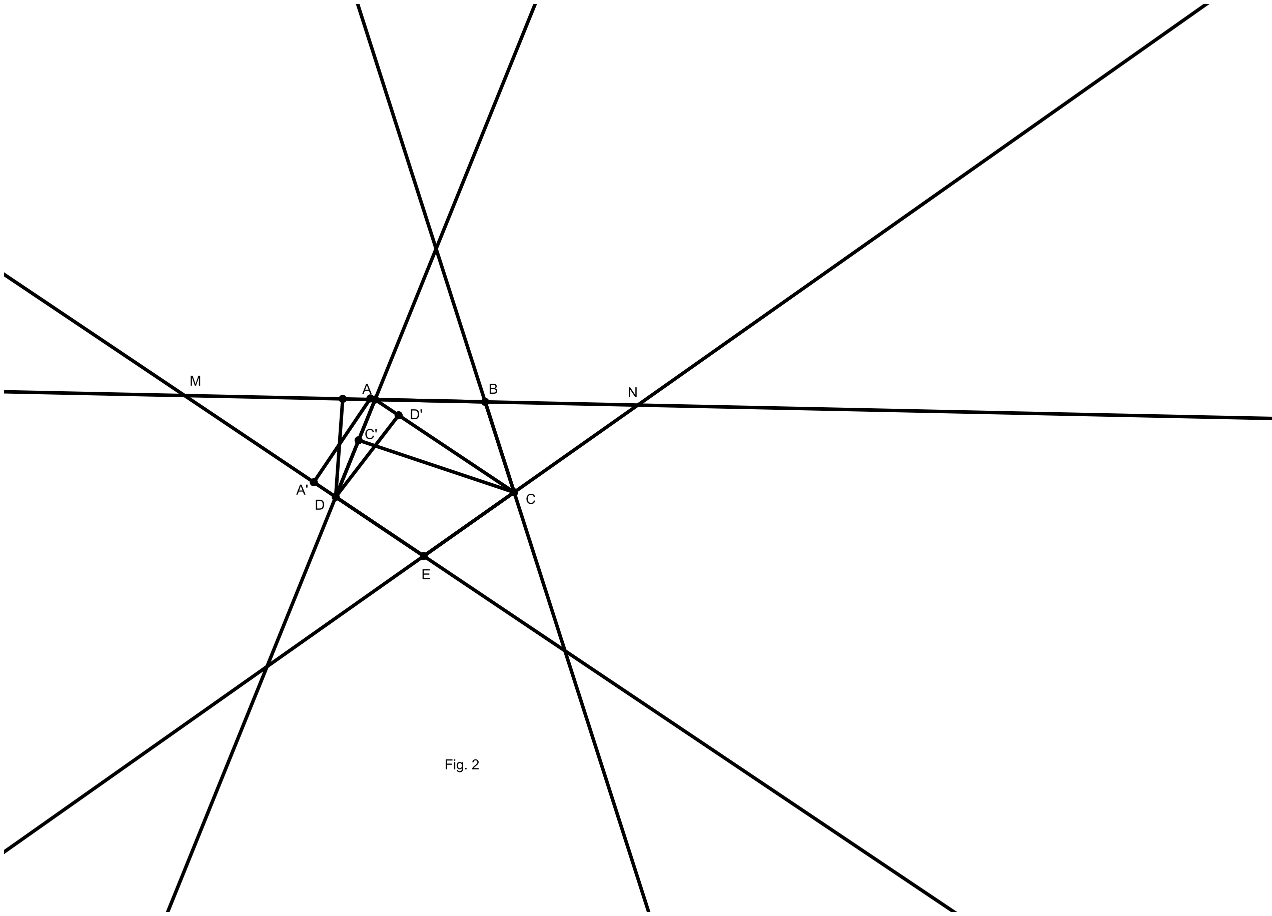
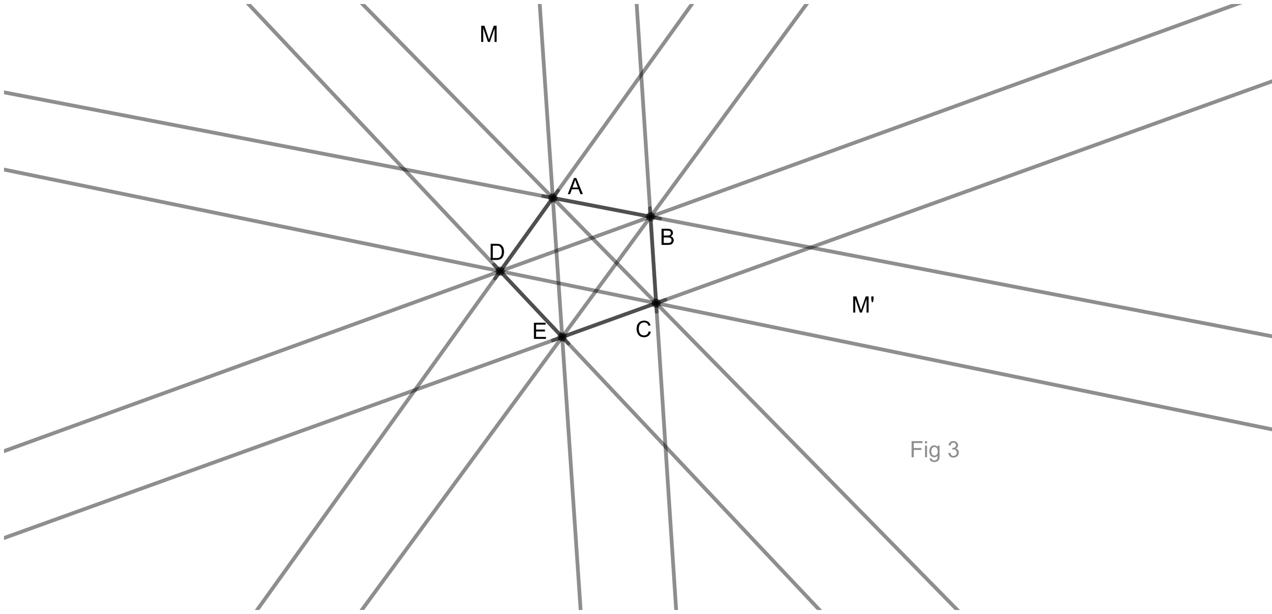


Fig. 2

Δηλαδή ουσιαστκά δείξαμε οτι αν έχουμε πέντε σημεία A, B, C, D, E ώστε ανα τρία να έχουν την ιδιότητα της ζώνης Δ , τότε τα σημεία αυτά θα είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου, με παρά την βάση ύψη ίσα προς Δ.
Στο σχήμα (2) μπορούμε εύκολα απο τα όμοια τρίγωνα ADA', CDC' να δούμε οτι

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{D}{d} = \frac{sin\angle CDA}{sin\angle ACD} = \frac{sin72^0}{\sin 36^0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

όπου Δ=d. fig. 2 Αν τώρα αποδείξουμε οτι κάθε σημείο M του G δεν είναι δυνατόν να είναι εκτός του κανονικού πενταγώνου $ABCED$ τότε θα έχουμε αποδείξει οτι το G θα ανήκει στο κανονικό πεντάγωνο και το πρόβλημα λύθηκε.
Εκτός του κανονικού πενταγώνου το σημείο M πρέπει να είναι στις γωνίες A, B, C, E, D ή στις ζώνε, $(AB, CD), (BC, EA), (EC), (DB), (ED, CA), (DA, BE)$ και στις γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ζώνες. fig. 3.



(α). Αν το σημείο Μ κείται στη γωνία Α, τότε το τρίγωνο MDB έχει ύψη μεγαλύτερα του Δ άρα $M \notin G$
(β). Αν το Μ΄ κείται στη ζώνη (AB, CD) , τότε το τρίγωνο $M'AE$ θα έχει ύψη μεγαλύτερα από Δ άρα $M' \notin G$
Το ίδιο γιά τις γωνίες των ζωνών.

Παρατήρηση
Στο προηγούμενο πρόβλημα είδαμε οτι από ένα σύνολο σημείων του επιπέδου $G = (A_1, A_2, ...A_n)$ με ιδιότητα ζώνης Δ ανά τρία σημεία σε γενική θέση αρκούν 5 σημεία να καθορίσουν το σχήμα (εδώ το κανονικό πεντάγωνο).
Αν προχωρήσουμε στην παρακάτω γενίκευση, στον E^3 το σύνολο $G = A_1, A_2...A_n)$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα . Ανά 4 σημεια (σε γενική θέση) ευρίσκονται εντός ζώνης που ορίζεται από δύο παράλληλα επίπεδα εύρους Δ. Εύκολα μπορούμε να δούμε οτι όλα τα σημεία ευρίσκονται σε ζώνη εύρους 2Δ. Διότι αν $A_m A_n A_k$ τρίγωνο μεγίστου εμβαδού, τότε τα υπόλοιπα σημεία απέχουν απόσταση Δ απο το επίπεδο $A_m A_n A$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι. Υπάρχει ελάχιστος πραγματικός αριθ. κ ώστε όλα τα σημεία να ευρίσκωνται σε ζώνη εύρους κΔ ? Ακόμη απο πόσα σημεία (ανάλογα με τα 5 στο επίπεδο) θα χαρακτιρίζεται ο E^3.

References
1.G.Tsintsifas, The Amer.Math.Monthly 1973 problem 5973
2.Peter Gritzmann and Marek Lassak, estimates fot the minimal width of polytopes insribed in convex bodies, 1987
3.Research problems in Discrete Geometry, Peter Brass, William Moser, Janos Pach ,pages 453,456 Problem 4, G.Tsintsifas