Τα τετράγωνα

Γ.Τσίντσιφας]

Πρόβλημα.

Εστω A είναι τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς 1 καί $G = (a_1, a_2 ... a_n)$, ένα σύνολο τετραγώνων με άθροισμα εμβαδών 1/2. Να δειχθεί ότι το G μπορεί να χωρέσει μέσα στο A , χωρίς τα τετράγωνα να επικαλύπτωνται.

Απόδειξη

Τοποθετούμε τα τετράγωνα a_i κατά σειρά μεγέθους με τις πλευρές παράλληλες προς A, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο και από το αριστερό κάτω άκρο του A, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Εστω η πλευρά του a_1 είναι η x_1^1 . Στη σειρά 1 συμβολίζουμε τις πλευρές των τετραγώνων ως x_1^1, x_2^1, x_3^1... κ.λ., στη δεύτερη σειρά x_1^2, x_2^2, x_3^2.... στη τρίτη σειρά $x_1^3, x_2^3, x_3^3, ...$ κ.λ. όπως φαίνεται στο σχήμα. Θα τοποθετηθούν δηλαδή στη βάση τα a_1, a_2, a_3...κ.λ. με πλευρές x_i^1. Κάποιο απο τα τετράγωνα θα βγαίνει έξω απο το A και έστω ότι είναι το a_k με πλευρά x_1^2 , δηλαδή τοποθετείται σαν πρώτο τετράγωνο της δεύτερης σειράς με πλευρές x_2^2, x_3^2..... κ.λ. Θα είναι

$$x_1^1 + x_2^1 + ... + x_k^1 (= x_1^2) > 1$$

ή

$$x_2^1 + x_3^1 + ... + x_k^1 > 1 - x_1^1$$

Προφανώς

$$(x_2^1 + x_3^1 + ... = x^1) x_1^2 > (1 - x_1^1) x_1^2$$

Αλλά

$$(x_2^1)^2 + (x_3^1)^2 + ... + (x_k^1)^2 > x_2^1 x_1^2 + ... + x_k^1 x_1^2 > (1 - x_1^1) x_1^2 \tag{1}$$

Ομοια προκύπτει ότι

$$(x_2^2)^2 + (x_3^2)^2 + ... + (x_m^2)^2 > (1 - x_1^2) x_1^3 \tag{2}$$

Βλέπουμε όμως ότι

$$1 - x_1^2 > 1 - x_1^1$$

Αρα

$$(x_2^2)^2 + (x_3^2)^2 + ...(x_m^2)^2 > (1 - x_1^1)x_1^3 \tag{3}$$

Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου τελειώσουν τα τετράγωνα έστω στη σειρά n με πρώτο τετράγωνο πλευράς x_1^n. Προκύπτει μιά σειρά ανισοτήτων. Οι ανισότητες προστίθενται κατά μέλη. Στο πρώτο μέλος είναι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων, εκτός του a_1. Αρα έχουμε

$$1/2 - (x_1^1)^2 > (1 - x_1^1)(a - x_1^1) \tag{4}$$

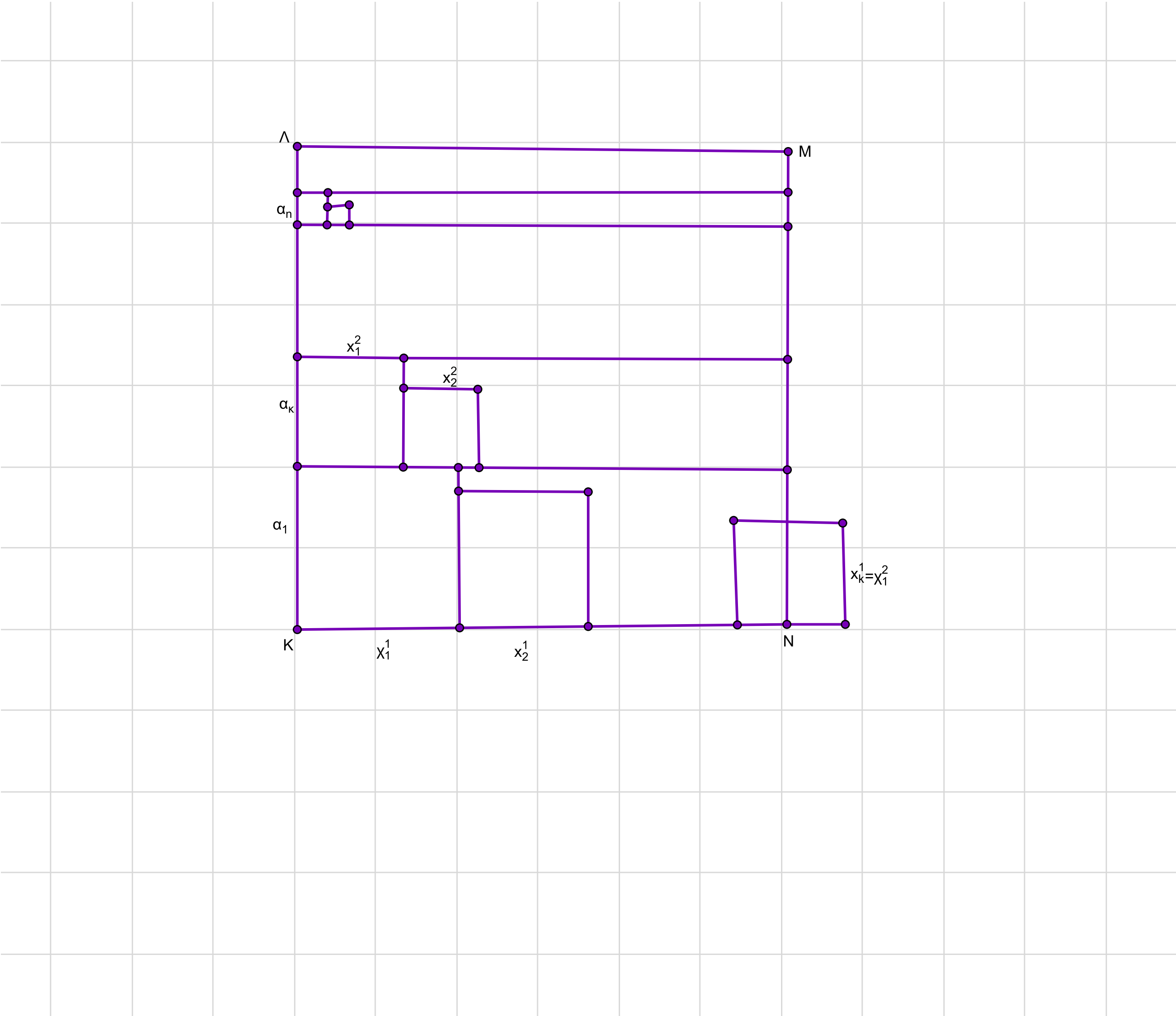
όπου

$$a = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + ...x_1^n$$

Αν το άθροισμα α είναι μικρότερο του 1 σημαίνει ότι τα τετράγωνα a_i τοποθετούνται στο τετράγωνο Α, στο εσωτερικό του και χωρίς επικάλυψη.
Αυτό είναι απλό, διότι

$$a < \frac{1 - 4p^2 + 2p}{2(1 - p)} < 1$$

όπου $p = x_1^1$



Παρατηρήσεις

(1). Αποδεικνύετα ότιι αν μέσα σε τετράγωνο A πλευράς 1 περιέχεται τετράγωνο B πλευράς 1/2, τότε το B περιέχει το κέντρο του A. Εχοντας υπόψη το παραπάνω πρέπει , σύμφωνα με την λύση που δώσαμε στο πρόβλημα, να υποθέσουμε οτι το τετράγωνο a_1 έχει πλευρά μικρότερη απο 1/2.

(2).Στο πρόβλημα θεωρήσαμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων είναι 1/2. Αν θεωρήσουμε b το άθροισμα των εμβαδών, η ερώτηση θα ήταν. Ποιό

είναι το όριο του b ?. Η απάντηση είναι ότι $b \leq 1/2$.
Προκύπτει από την ίδια διαδικασία και καταλήγουμε στο τύπο

$$b - p^2 < (1-p)(a - p^2)$$

ή

$$1 > \frac{b - 2p^2}{1-p} > a$$

ή

$$0 > -2p^2 + 2p + b_1$$

Το παραπάνω τριώνυμο γιά να είναι αρνητικό πρέπει $b \leq \frac{1}{2}$.

(3).Ενα αξιόλογο προβλημα πού θα μπορούσαμε να λύσουμε παίρνωντας σαν λήμμα το αρχικό πρόβλημα είναι το ακόλουθο. Ειναι $P = (q_1, q_2, ...q_n....)$ ένα σύνολο τετραγώνων με άθροισμα εμβαδών q. Να ευρεθεί πόσο είναι δυνατόν να είναι το q και πώς είναι δυνατόν να μεταφερθούν τα q_i (translation) στο εσώτερικο του τετραγώνου πλευράς 1 χωρις επικάλυψη
Η λύση δίδεται με το αρχικό πρόβλημα. Πρέπει να θεωρήσουμε τα q_i', περιγεγραμμένα τετράγωνα στα q_i με πλευρές παράλληλες προς το μοναδιαίο τετράγωνο. Προκύπτει $q = 1/4$

(4). Μιά δεύτερη λύση στο αρχικό πρόβλημα μπορεί να γίνει ως εξής.
Εστω A_1 είναι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων τησ πρώτης γραμμής, A_2 της δεύτερης γραμμής κ.λ. είναι

$$A_1 > (1 - x_1^1)x_1^2 + (x_1^1)^2$$

¨οπου οι όροι του προηγουμένου αθροίσματος είναι υπολογισμένοι σε εμβαδά. Ακόμη

$$A_2 > (1 - x_1^1)x_1^3$$

Το δύτερο μέλος είναι το ορθογώνιο με πλεύρες $(1 - x_1^1), x_1^3$. Ακολουθούν παρόμοιες ανισότητες γιά A_3, A_4....... κ.λ. και τελικά

$$A_{n-1} > (1 - x_1^1)x_1^n$$

Η πρόσθεση κατά μέλη δίνει την (4)

(5).Στίς αρχές της δεκατίας του 90 το πρόβλημα των τετραγώνων το συζητήσαμε με τον φίλο μου Murray Klamkin. Η ιδέα να τοποθετηθούν τα τετράγωνα κατά διαδοχικές σειρές 1,2, κ.λ. ήταν δική του. Τελικά το πρόβλημα δεν είχε λυθεί εκείκη την εποχή. Σε σημειώσεις μου το ξαναβρήκα και αποφάσισα να κάνω μιά προσπάθεια. Πράγματι το έλυσα με τις γραμμές που προανέφερα. Αναζήτησα στο Internet την αφετηρία του προβλήματος και ίσως μιά πιό εύκολη λύση. Βρήκα ότι το πρόβλημα είναι δημοσιευμένο στο A.M.M. προτεινόμενο απο τον D.J.Newman , Yeshiva University, to E 2041 (1967, 1262) και λυμένο με περίπου τον ίδιο τρόπο απο τον ίδιο. Φέρεται ότι υπήρξαν άλλες τρεις λύσεις από τους, R.B.Eggleton, Michael Golderg και J.G.Mauldon. Η δεύτερη λύση που προτείνω στη παρατήρηση 4 είναι πιό Γεωμετρική και ισως λίγο πιό εύκολη.