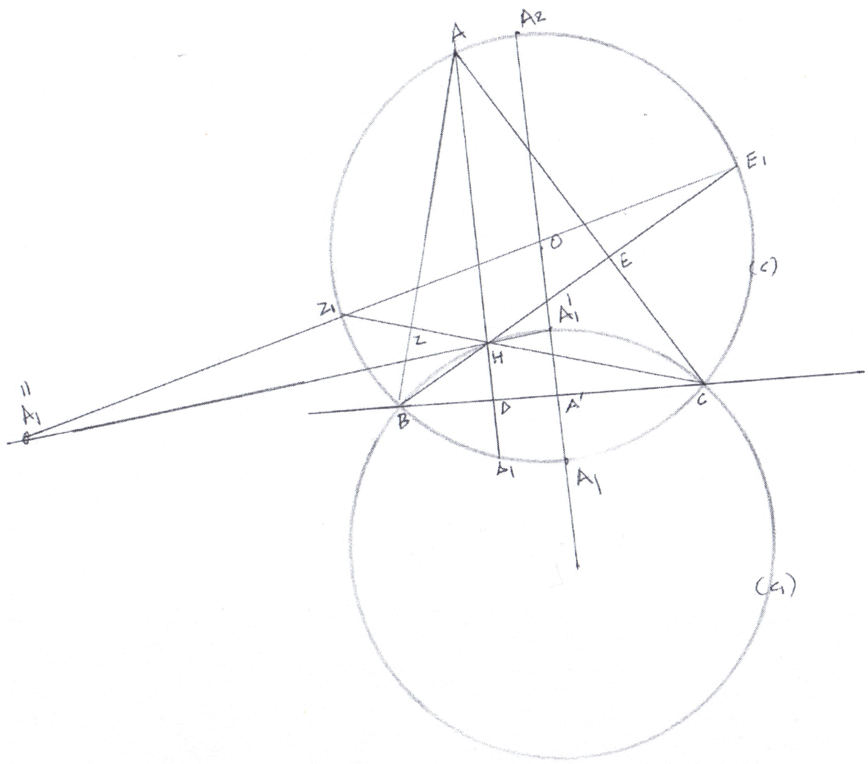
Πρόβλημα1.

Εστω το τρίγωνο ABC, A_1, B_1, C_1 τα μέσα των τόξων $C, C,$ και A_1', B_1', C_1' τα συμμετρικά των μέσων των τόξων προς τις αντίστοιχες πλευρές, H το ορθόκεντρο. Δείξατε οτι το $HA_1'B_1'C_1'$ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

O κύκλος BHC είναι συμμετρικός του ABC προς την πλευρά BC άρα το σημείο A_1' είναι συμμετρικό του μέσου A_1 του τόξου BC.
Θεωρούμε την αντιστροφή I με πόλο το H και δύναμη $AH.HD_1 = BH.HE_1 = CH.HZ_1$.
Θα έχουμε βλ.σχήμα.



$(c) \to (c) \qquad (c_1) \to Z_1E_1.$
B $\to E_1 \qquad A_1 \to A_1''$

$(C) \to Z_1$

Το σημείο A_1'' είναι το ίχνος της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Z_1HE_1 αρα θα έχουμε

$$\frac{Z_1A_1''}{E_1A_1''} = \frac{ZH}{EH}$$

Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν για τα σήμεια B_1'', C_1'' . Απο το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $D_1E_1Z_1$ προκύπτει οτι Τα σημεία A_1'', B_1'', C_1'' κείνται επ' ευθείας (ε). Η αντιστροφή I^{-1} δίνει τη λύση.

Βιβλιογραφία

1.Advanced Euclidean Geometry ,R.A.Johnson pag. 228 Theorem of Fuhrmann Dover Pub.
2.Γεωμετρία, Γ. Τσίντσιφας τεύχος 1, ασκ 1091,1481

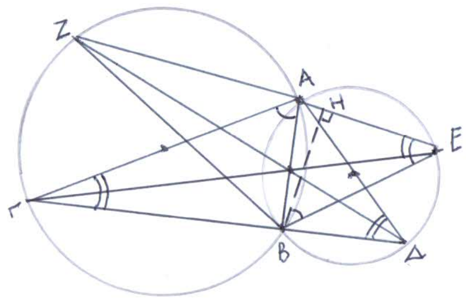
Πρόβλημα 2

.

Δίδονται δύο άνισοι κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) τεμνόμενοι στα σημεία Α και Β. Από το Β φέρνουμε κάθετο στην ΑΒ τέμνουσα τους κύκλους (O_1R_1) και (O_2, R_2) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Εστω Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ. Οι ΔΜ και ΓΜ τέμνουν τους κύκλους στα Ζ και Ε. Δείξατε οτι Ζ,Α,Ε όχι επ'ευθείας.

Απόδειξη

Ατοπος απαγωγή.
Εστω Ζ,Α,Ε ευθεία. Τα τρίγωνα ΓΑΔ,ΖΒΕ όμοια. ΑΒ είναι κάθετος στην ΓΔ. Τα υψη ΑΒ ,ΒΗ κάθετος στη ΖΕ. Οι αντίστοιχες γωνίες ειναι ίσες Αρα <ΗΒΕ=<ΒΑΓ αλλά τότε <ΒΕΗ=<ΒΓΑ. Δηλαδή το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές. ΑΤΟΠΟ.



Προβλημα 3.

Let $A_1A_2A_3$ be a triangle and inside the points M and M' . Prove that $|M - M''| \leq d$ where d is the diameter of the triangle.

Proof

We suppose that $N(p_1, p_2, p_3)$ and $M'(p_1', p_2', p_3')$ the barycentric coordinates of the points M, M'. We have $p_i, p_i' \geq 0$ and $\sum p_i = 1, \sum p_i' = 1$.
Therefore $M = \sum p_i A_i, \quad M' \sum p_i'$. so we have

$$M - M' = \sum p_i A_i - M' = \sum p_i - (\sum p_i)M' = \sum p_i(A_i - M')$$

But

$$A_i - M' = (\sum p_i')A_i - (\sum p_i' A_i) = p_1'(A_i - A_1) + p_2(A_i - A_2) + p_3'(A_i - A_3)$$

So we take

$$M - M' = \sum p_i \sum p_i'(A_i - A_j = \sum p_i p_i'(A_i A_j)$$

but $d = max|A_i - A_j|$ so $|M - M'| \leq d$

Problem 4

Let x,y,z,t be stricly positive real numbers. We suppose that

$$\sum xy/6 = xyzt \qquad (1)$$

where $\sum$ for the cyclic summation.
Prove
$4-8^{1/2}+8^{1/2}.(xyzt)^{1/2} \leq x+y+z+t \leq 4-8^{1/2}+8^{1/2}.(xyzt)$

Proof
we easily fund from (1) and A.M-G.M that $xyzt \geq 1$
For the first inequality, we obviously have
$(4-8^{1/2})[1-(xyzt)^{1/2}] \leq 0$
that is $4-8^{1/2}+8^{1/2}.(xyzt)^{1/2} \leq 4(xyzt)^{1/2} \qquad (a)$
but,using (1) we easily find that $4(xyzt)^{1/2} \leq x+y+z+t \qquad (b)$
From (a) and (b) follows the first inequality

For the second inequality

$$x+y+z+t \leq 4-8^{1/2}+8^{1/2}.(xyzt) \tag{2}$$

things are quite difficult. So we need some preliminary results.
(1).
From the AM-GM inequality in (1), we easily found that

$$xyzt \geq 1 \tag{3}$$

If $x,y,z,t \geq 1$ then $\sum xy \leq xyzt+xyzt+...xyzt = 6xyzt$
So it is impossible to be all the variables bigger than 1
Similarly, we see that is impossible all the variables to be smaller than 1.
That is impossible to be all the variables bigger or smaller than 1. Here we have to point out, in the case of $x,y,z,t \geq 1$ the inequality (2) is correct. Put $x = 1+a, y = 1+b, z = 1+c, t = 1+d$ and use the Bernouli'ineqality.
(2)
We use the Newton and MacLorin `s inequalities. See Ref. (1),(2) or(3).
Let

$$d_1 = \frac{\sum x}{4}, \quad d_2 = \frac{\sum xy}{6}, \quad d_3 = \frac{\sum xyz}{4}, \quad d_4 = xyzt$$

Newton's theorem asserts

$$d_2^2 \geq d_1 d_3 \quad d_3^2 \geq d_2 d_4$$

From the above we find

$$d_2 \geq d_1$$

Also using the Maclaurin inequality

$$d_1 \geq \sqrt{d_2}$$

we find

$$d_1^2 \geq d_2 \geq d_1 \geq 1 \tag{4}$$

Equality $d_1 = d_2$ for $x = y = z = t$ and holds the opposite.
From the given we easily see that $d_2 = d_4 \geq 1$.
If we suppose now that

$$t \geq x \geq y \geq z \tag{5}$$

the condition $d_1 = 1$ means that $x = y = z = t = 1$.
(3).
From (1) follows that

$$t = \frac{xy + yz + zx}{6xyz - x - y - z}, \qquad t \geq 0$$

From here we see that

$$6xyz - x - y - z > 0 \tag{6}$$

but

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq xyz$$

or

$$\frac{6}{27}(x+y+z)^3 \geq 6xyz > x + y + z$$

and finally

$$x + y + z \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Now we will prove the inequality (2)
We assume that the relation (5) holds and we consider the polynomial

$$f(t) = (\sqrt{8}xyz - 1)t + 4 - \sqrt{8} - (x + y + z) \tag{8}$$

We suppose $f(t)$ as function of t. We fix at the moment x,y,z. We will prove that $f(t)$ is positive so the inequality (2) is correct.
(a).
We will prove that $\sqrt{8}xyz - 1 \geq 0$
Let us suppose the opposite, that $\sqrt{8}xyz - 1 < 0$. then

$$6xyz < \frac{3}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

But we know that

$$x + y + z > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

see(7), hence

$$6xyz < x + y + z$$

The last is impossible according (6).
(b).
The function f(t) is continuous and increasing. Indeed, for $t = t_1, t_2$ and $t_2 \geq t_1$ we have

$$f(t_2) - f(t_1) = (\sqrt{8}xyz - 1)(t_2 - t_1) \geq 0$$

therefore $f(t_2) \geq f(t_1)$. So according (4) and (5) for $t = t_1 = 1$ we will have $t = x = y = z = 1$ and $f(1) = 0$, that is for $t > 1$ we have $f(t) > 0$. That is the inequality (2) is correct.

References

(1) D.S.Mitrinovic, Analytic Inequalities page 95
(2) E. Beckenbach and R.Belman Inequalities page 11
(3) G. Hardy E. Littlewood and G. Polya page 104