Γεωμετρία Affine - Εφαρμογές

Δόρτσιος Κων/νος, Μαθηματικός
Email:kdortsi@sch.gr
Τσίντσιφας Γεώργιος, Μαθηματικός
Email :gtsintsifas@yahoo.com

Εισαγωγή

Η Γραμμική Γεωμετρία περιέχει τρία είδη Μετασχηματισμών και σύμφωνα με το πρόγραμμα του **Erlangen** του **F. Klein** διαιρείται σε τρία τμήματα. Την Προβολική, την Affine και την Μετρική (ή Γεωμετρία των στερεών κινήσεων).

Στο επίπεδο οι εξισώσεις μετασχηματισμού για τις τρεις Γεωμετρίες αντίστοιχα είναι:

1^{o}) **Προβολική Γεωμετρία:**

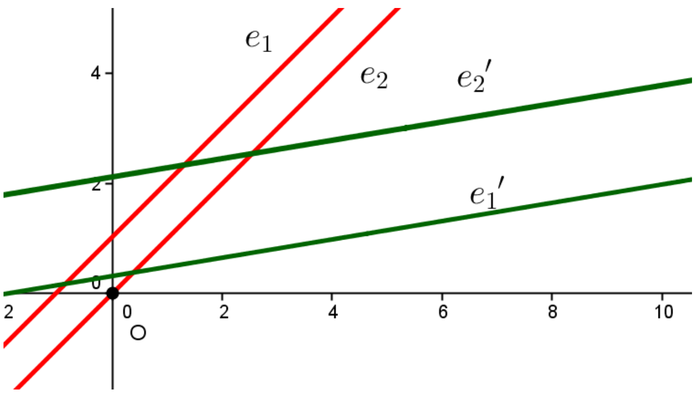
$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Οι ανωτέρω μετασχηματισμοί (1) περιέχουν οκτώ(8) παραμέτρους και έτσι αναφέρονται ως G_8.

2^{o}) **Γεωμετρία Affine**:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= a_1x + b_1y + c_1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Στους μετασχηματισμούς αυτούς υπάρχουν έξι(6) παράμετροι και



Σχήμα 1

έτσι αναφέρονται ως G_6. Σημειώνουμε εδώ ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί διατηρούν το επ' άπειρο σημείο της ευθείας. Αυτό σημαίνει ότι δύο παράλληλες ευθείες δίνουν ως εικόνες δύο άλλες ευθείες που είναι μεταξύ των παράλληλες *(Σχ.1)*. Για το λόγο αυτό και η γεωμετρία αυτή στην ελληνική ορολογία αναφέρεται ως ***Ομοπαραλληλική Γεωμετρία***.

3°) **Μετρική Γεωμετρία**:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= a_1x + b_1y + c_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

με

$$|\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}| = 1$$

ή ακόμα:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta + c \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta + c_1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι οι εφαρμογές της Γεωμετρίας Affine σε διάφορα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Θα αναφέρουμε τα θεμελιώδη Θεωρήματα της Γεωμετρίας αυτής χωρίς τις αποδείξεις των οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν ασκήσεις για κάποιον που θα δείξει ενδιαφέρον. Εξάλλου τις αποδείξεις αυτές μπορεί κανείς να τις αναζητήσει στα βιβλία που αναφέρονται στη Βιβλιογραφία.

1. Θεμελιώδη Θεωρήματα της Γεωμετρίας Affine

Σε ένα μετασχηματισμό affine ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

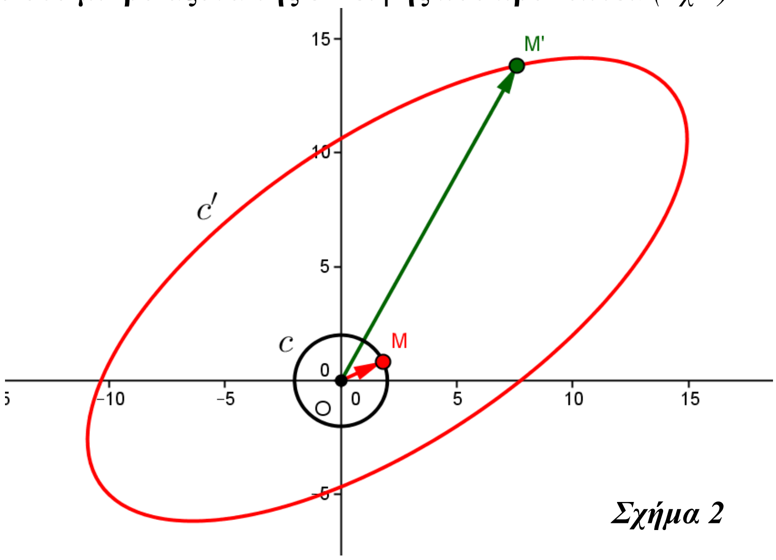
1. Παράλληλες ευθείες παραμένουν παράλληλες

2. Διατηρείται ο λόγος των παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων.

3. Οι μετασχηματισμοί Affine αποτελούν ομάδα η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως affinity ή affinité. Μια υποομάδα αυτής είναι η γνωστή ομοιότητα καθώς και η ομάδα των στερεών κινήσεων.

4. Ο κύκλος μετασχηματίζεται γενικά σε έλλειψη(ή κύκλο). Αν $\vec{r}(\theta)$ **είναι μια ακτίνα του κύκλου με** $0 \le \theta \le 2\pi$**, τότε ο λόγος** $\dfrac{f\left(\vec{r}(\theta)\right)}{\left|\vec{r}(\theta)\right|}$ **έχει**

ακρότατα και το μέγιστο αντιστοιχεί στο μεγάλο ημιάξονα και το ελάχιστο στο μικρό άξονα της έλλειψης που προκύπτει. *(Σχ.2)*



Σχήμα 2

5. Στο επίπεδο ο λόγος των εμβαδών των σχημάτων παραμένει σταθερός.

6. Στον τρισδιάστατο (και στον n-διάστατο) χώρο το εμβαδόν(όγκος) των σχημάτων σε παράλληλα επίπεδα παραμένει σταθερός.

7. Κάθε προβολή σε επίπεδο είναι ένας affine μετασχηματισμός.

8. Αν (A,B,C) και (A',B',C') είναι δύο τριάδες σημείων στο επίπεδο, τότε υπάρχει affine μετασχηματισμός f τέτοιος ώστε:

$$A' = f(A), \quad B' = f(B), \quad C' = f(C)$$

Γενικά σε ένα χώρο E^n αν έχουμε τα S_n, S_n' δύο $n-simplex$ τότε υπάρχει μετασχηματισμός f τέτοιος ώστε:

$$S_n' = f(S_n)$$

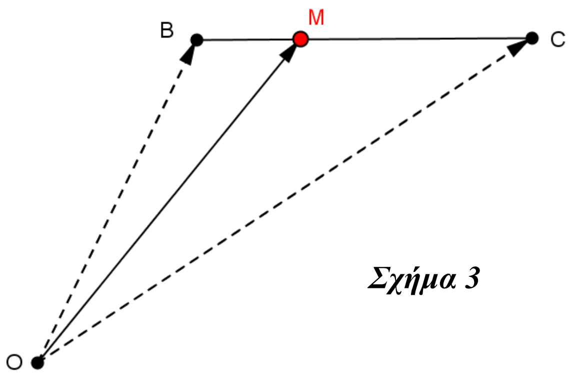
2. Το Affine επίπεδο

Το Affine επίπεδο μπορεί να οριστεί και στο διανυσματικό χώρο R^3 με τον ακόλουθο τρόπο:

Κατ' αρχήν συμφωνούμε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ να συμβολίζεται μόνο με το σημείο το οποίο βρίσκεται στο πέρας του. Αυτό σημαίνει ότι αντί για $\overrightarrow{OM}$ θα γράφουμε απλά M.

Έστω λοιπόν ότι $M \in BC$ (Σχ.3) κι ακόμα ότι:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{m}{n} \quad (m, n \in R) \quad (1)$$



Σχήμα 3

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{MC} \Rightarrow n(M-B) = m(C-M)$$

και τελικά:

$$\boxed{M = \frac{nB+mC}{m+n} \quad (2)}$$

Η ανωτέρω σχέση (2) ισχύει για κάθε σημείο M που ανήκει στο φορέα των B, C.

Θεωρούμε στη συνέχεια το τρίγωνο ABC και ένα εσωτερικό του σημείο M *(Σχ. 4)*. Οι AM, BM, CM λέγονται σεβιανές ***(cevians)*** και τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου στα σημεία A', B', C'.

Αν θέσουμε:

$$\lambda_1 = \frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{(BMC)}{(ABC)}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} = \frac{(CMA)}{(ABC)},$$

$$\lambda_3 = \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} = \frac{(AMB)}{(ABC)} \quad (3)$$

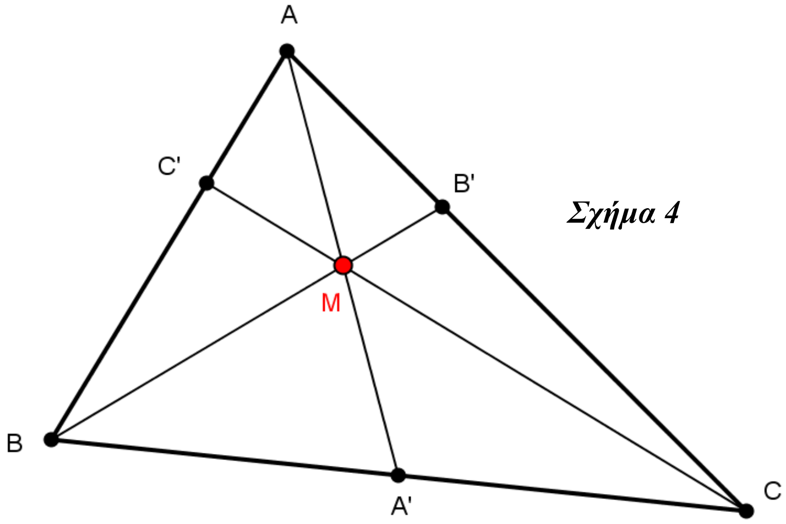
όπου οι παρενθέσεις δηλώνουν το εμβαδόν των αντιστοίχων τριγώνων, τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Ακόμα από το σχήμα 4 θα είναι:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \frac{(AMC)}{(AA'C)} = \frac{(AMB)}{(AA'B)} = \frac{(AMC)+(AMB)}{(ABC)}$$

δηλαδή: $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - \lambda_1$



Σχήμα 4

Η σχέση αυτή θα μπορούσε να δειχθεί και με τη βοήθεια των σχέσεων (3).

Μια άλλη κατηγορία σχέσεων που μπορεί εύκολα να αποδειχθούν είναι:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (4)$$

Τέλος από τις σχέσεις (4) προκύπτει ο υπολογισμός της θέσης του σημείου M. Δηλαδή:

$$M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C,$$
$$\mu\varepsilon \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda_i \geq 0, i = 1,2,3. \quad (5)$$

Γενικά ο τύπος αυτός ισχύει και για κάθε σημείο M του επιπέδου του τριγώνου ABC με την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{\begin{gathered} M = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, \\ \mu\varepsilon \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda_i \in R, i = 1,2,3. \quad (6) \end{gathered}}$$

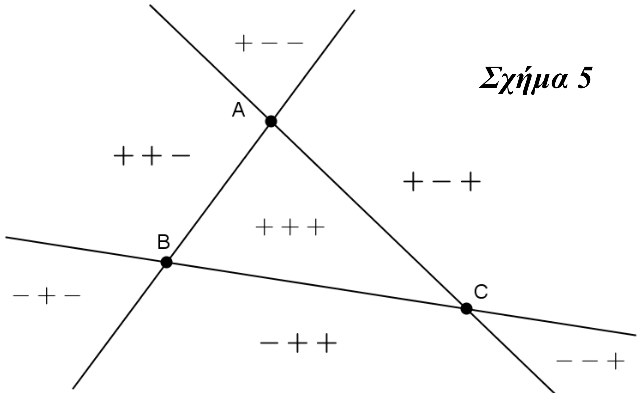
Είναι λοιπόν φανερό ότι όταν έχουμε τα σημεία $A, B, C \in R^3$ τότε το επίπεδο που αυτά ορίζουν, προσδιορίζεται από τη σχέση (6).

Ανάλογοι τύποι αντιστοιχούν και στο χώρο με βάση ένα τετράεδρο και σε Simplex S_n.

Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι κάθε σημείο του επιπέδου του τριγώνου ABC εκφράζεται συναρτήσει των σημείων A,B,C. Ακόμα διατηρείται το επ' άπειρον σημείο, δηλαδή δύο παράλληλες ευθείες εξακολουθούν να είναι παράλληλες κατά ένα μετασχηματισμό affine. Άρα το επίπεδο που προσδιορίστηκε με την προηγούμενη ανάλυση είναι ένα affine επίπεδο με την affinity όπως αυτή ορίστηκε με τις αλγεβρικές εξισώσεις του affine μετασχηματισμού. *(Εισαγωγή τύπος (2)).*

Οι αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ της σχέσης (6) λέγονται ***βαρυκεντρικές συντεταγμένες.***

Όταν το σημείο M κινηθεί και εκτός του τριγώνου ABC τότε τα



Σχήμα 5

πρόσημα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων περιγράφονται σύμφωνα με το ανωτέρω σχήμα. *(Σχ.5)*

3. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η.

Αν E το εμβαδόν τριγώνου περιγεγραμμένου σε έλλειψη (c) εμβαδού k^2, τότε θα είναι:

$$E \geq \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\kappa^2 \quad (1)$$

Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή θα δείξουμε δύο βοηθητικά λήμματα.

Ια) Αν M είναι ένα σημείο μιας κυρτής γωνίας xOy, τότε η ευθεία που διέρχεται από αυτό και τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A,B θα ορίζει τρίγωνο OAB ελαχίστου εμβαδού αν και μόνο αν

$AM = MB$. *(Σχ. 6)*

Απόδειξη

Αν $MC = p_1$ και $MD = p_2$ τότε θα είναι:

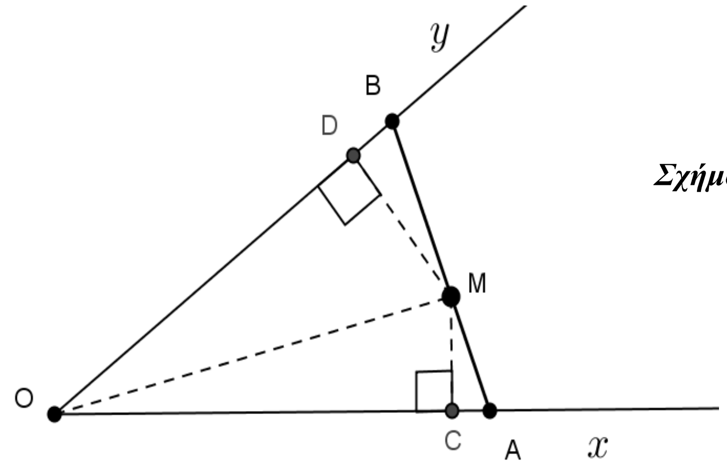
$$2E_{(MAO)} = p_1(OA), \quad 2E_{(MBO)} = p_2(OB) \quad (1)$$

άρα:

$$2E_{(AOB)} = p_1(OA) + p_2(OB) \quad (2)$$

Όμως:

$$2(AOB) = (OA)(OB)\sin a, \quad \mu\varepsilon \quad a = (AOB) \quad (3)$$



Σχήμα 6

Από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$p_1(OA) + p_2(OB) = (OA)(OB)\sin a \Leftrightarrow \frac{p_1}{(OB)} + \frac{p_2}{(OA)} = \sin a \quad (4)$$

Όμως:

$$\frac{p_1}{(OB)} + \frac{p_2}{(OA)} \geq 2\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(OA)(OB)}} \quad (5)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν:

$$\frac{p_1}{(OB)} = \frac{p_2}{(OA)} \Leftrightarrow p_1(OA) = p_2(OB) \Leftrightarrow E_{(OAM)} = E_{(OBM)}$$

δηλαδή όταν:

$$AM = MB \quad (6)$$

Η σχέση (5) σύμφωνα με την (4) δίνει:

$$\sin a \geq 2\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(OA)(OB)}} \overset{\sin a>0}{\Rightarrow} \sin^2 a \geq 4\frac{p_1 p_2}{(OA)(OB)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(OA)(OB)\sin a \geq 2\frac{p_1 p_2}{\sin a} \Rightarrow E_{(OAB)} \geq 2\frac{p_1 p_2}{\sin a}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου AOB είναι:

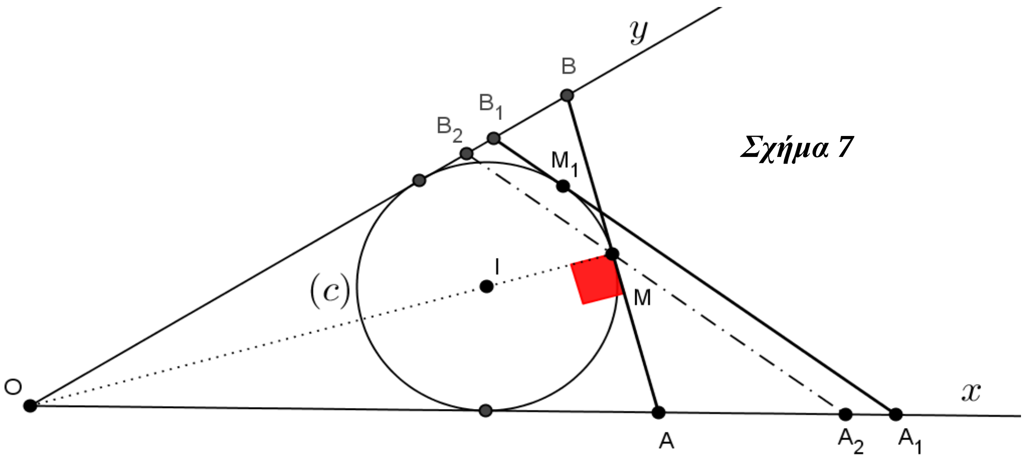
$$E_{\min} = 2\frac{p_1 p_2}{\sin a} \quad (7)$$

και λαμβάνεται όταν ισχύει η (6) δηλαδή M μέσον του τμήματος AB.

Ιβ) Δίνεται κυρτή γωνία xOy και κύκλος (c) εγγεγραμμένος σ' αυτή. Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου (c) που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B έτσι ώστε το τρίγωνο OAB που περιέχει τον κύκλο (c) ως εγγεγραμμένο, να έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

Απόδειξη

Έστω M ένα από τα σημεία που η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει τον κύκλο (c), όπως φαίνεται ανωτέρω *(Σχ.7)*. Αν φέρουμε την



Σχήμα 7

εφαπτομένη AB του κύκλου (c) στο σημείο αυτό, τότε θα είναι

$$AM = MB \ (1) \quad \text{και} \quad OA = OB \ (2)$$

Έτσι λοιπόν το σημείο Μ είναι ένα σταθερό σημείο εντός της γωνίας xOy και σύμφωνα με το λήμμα ***(Ια)*** και λόγω της (1) θα είναι:

$$E_{(OAB)} \leq E_{(OA_2B_2)} \quad (3)$$

όπου η A_2B_2 μια τυχαία τέμνουσα τις πλευρές της γωνίας που διέρχεται από το σημείο M.

Αν τώρα φέρουμε μια νέα εφαπτομένη A_1B_1 του κύκλου (c) παράλληλη προς την A_2B_2 τότε προφανώς θα ισχύει:

$$E_{(OA_2B_2)} \leq E_{(OA_1B_1)} \quad (4)$$

Έτσι από τις (3) και (4) προκύπτει:

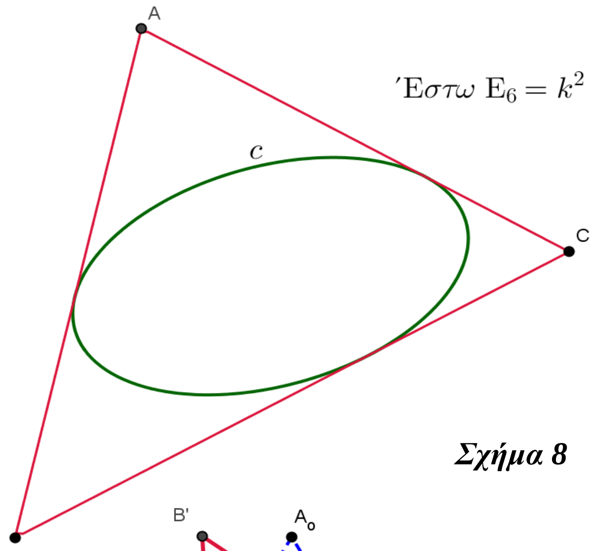
$$E_{(OAB)} \leq E_{(OA_2B_2)} \leq E_{(OA_1B_1)} \quad (5)$$

Από την (5) προκύπτει ότι:

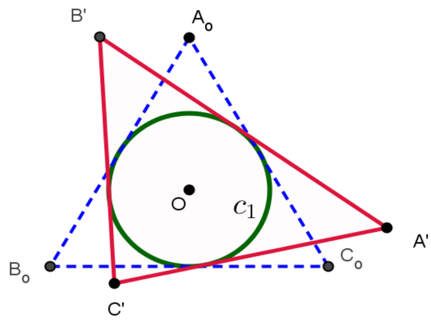
$$E_{(OAB)} = \min$$

Παρατήρηση:

Με τα λήμματα ***(Ι$_α$)*** και ***(Ι$_β$)*** ουσιαστικά αποδείξαμε ότι **το περιγεγραμμένο ελαχίστου εμβαδού τρίγωνο σε κύκλο είναι το ισόπλευρο**. Ακριβώς με τη ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι το περιγεγραμμένο πολύγωνο ελαχίστου εμβαδού είναι το κανονικό. Το θεώρημα επεκτείνεται σε κάθε κυρτό σχήμα



Σχήμα 8



Απόδειξη της 1ης εφαρμογής

Θεωρούμε την έλλειψη (c) και ένα τυχαίο τρίγωνο ABC περιγεγραμμένο σ' αυτήν. Μετασχηματίζουμε την έλλειψη (c) με έναν affine μετασχηματισμό f σε ένα κύκλο (c) *(Σχ.8)* Κατά το μετασχηματισμό αυτό το τρίγωνο ABC μετασχηματίζεται στο $A'B'C'$.

Σύμφωνα με το 6^{ο} Θεμελιώδες θεώρημα της Γεωμετρίας affine *(σελ.3)* ισχύει:

$$\frac{E_{(ABC)}}{E_c}=\frac{E_{(A'B'C')}}{E_{c_1}}\Rightarrow\frac{E_{(ABC)}}{k^2}=\frac{E_{(A'B'C')}}{E_{c_1}}\quad(1)$$

Επίσης σύμφωνα με την παρατήρηση των λημμάτων Ια, Ιβ ισχύει:

$$E_{(A'B'C')}\geq E_{(A_oB_oC_o)}\quad(2)$$

όπου $A_oB_oC_o$ είναι το περιγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο στον κύκλο c_1.

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{E_{(ABC)}}{k^2}\geq\frac{E_{(A_oB_oC_o)}}{E_{c_1}}\quad(3)$$

Αν τώρα θέσουμε r την ακτίνα του κύκλου c_1, τότε θα είναι:

$$\frac{E_{(A_oB_oC_o)}}{E_{c_1}}=\frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}/4}{\pi r^2}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\quad(4)$$

από τις (3) και (4) προκύπτει:

$$E_{(ABC)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{\pi}k^2$$

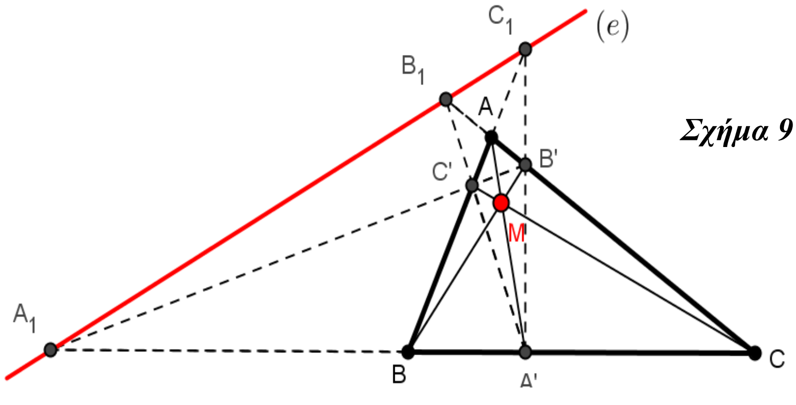
δηλαδή η ζητούμενη σχέση (1) της εφαρμογής 1.

Εφαρμογή 2$^{\eta}$

Στο τρίγωνο ABC δίνεται εσωτερικό σημείο M. Οι ευθείες AM, BM, CM τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα σημεία A', B', C'. Να δειχθεί ότι τα σημεία $A_1=B'C'\cap BC,\quad B_1=C'A'\cap CA,\quad C_1=A'B'\cap AB$ είναι συνευθειακά. *(Σχ.9)*

Απόδειξη

Το παραπάνω πρόβλημα είναι απλό και λύνεται, όπως ξέρουμε, στη



Σχήμα 9

Στοιχειώδη Γεωμετρία με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Μενελάου. Αν ακόμα αναφερθούμε σε ένα ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα η λύση είναι απλή, αλλά έχει αρκετές πράξεις. Η λύση με βαρυκεντρικές συντεταγμένες***(affine)*** απλοποιείται.

Έστω λοιπόν ότι: $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ και

$$M(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \text{ με } \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

τότε θα είναι:

$A'\left(0,\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3},\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right), B'\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3},0,\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}\right), C'\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},0\right)$ και η εξίσωση της $B'C'$ θα είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3} & 0 & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3} & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_3} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x\lambda_2\lambda_3 + y\lambda_1\lambda_3 + z\lambda_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{z} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_3} \Rightarrow A_1 = \left(0,\frac{-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2},\frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_2}\right)$$

Όμοια υπολογίζεται ότι:

$$B_1 = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1},0,\frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1}\right)$$

$$C_1 = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1},\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1},0\right)$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντεταγμένων των σημείων αυτών διαπιστώνεται ότι αυτή είναι μηδέν κατά συνέπεια τα A_1, B_1, C_1 είναι συνευθειακά. *(Σχ.9)*

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι τα μέσα των τμημάτων $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ είναι συνευθειακά καθώς επίσης και τα τμήματα AM', BN', CP' διέρχονται από το ίδιο σημείο όπου M' μέσο του τμήματος $B'C'$, N' μέσο του τμήματος $C'A'$ και P' μέσο του τμήματος $A'B'$.

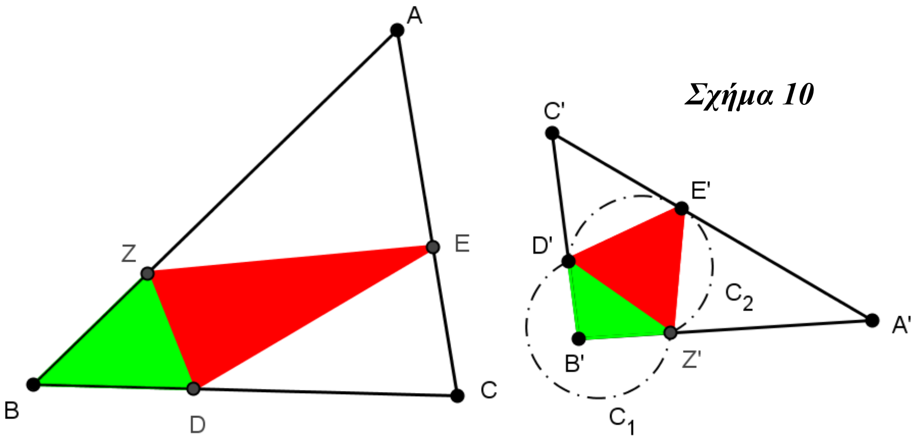
Εφαρμογή 3^η^

Στις πλευρές BC, CA, AB τριγώνου ABC θεωρούμε τα σημεία D, E, Z αντίστοιχα. *(Σχ. 10)* **Να δειχθεί ότι τότε θα είναι:**

$$(DEZ) \geq \min\{(AEZ),(BDZ),(CED)\} \quad (1)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε έναν affine μετασχηματισμό f ο οποίος οδηγεί το τρίγωνο ABC στο τρίγωνο $A'B'C'$ *(Σχ.10)* και τέτοιο ώστε το τρίγωνο DEZ να μετασχηματίζεται στο ισόπλευρο τρίγωνο $D'E'Z'$. Τέτοιος μετασχηματισμός εξασφαλίζεται από το ***Θεώρημα 8*** των αφφινικών μετασχηματισμών. *(σελ.5)*



Σχήμα 10

Το τρίγωνο $A'B'C'$ έχει μία τουλάχιστο γωνία μεγαλύτερη των 60^o και έστω ότι αυτή είναι η γωνία B'. Δηλαδή:

$$B' \geq 60^o \quad (2)$$

Θεωρούμε στη συνέχεια το τόξο C_2 με χορδή την $D'Z'$ και με γωνία ίση με 60^o καθώς και το συμμετρικό του C_1 ως προς την $D'Z'$. Επομένως, λόγω της (2) το σημείο B' ανήκει στο τόξο C_1 ή εντός του κυκλικού τμήματος που αυτό ορίζει.

Ύστερα από αυτά ισχύει:

$$(D'Z'E') \geq (D'Z'B') \quad (3)$$

Όμως, σύμφωνα με το ***Θεώρημα 5*** των αφφινικών μετασχηματισμών *(σελ.5)* το οποίο εξασφαλίζει τη διατήρηση του λόγου των εμβαδών, θα είναι:

$$(DZE) \geq (DZB) \quad (4)$$

και επειδή:

$$(DZB) \geq \min\{(AEZ),(BDZ),(CED)\} \quad (5)$$

άρα από τις (4) και (5) προκύπτει:

$$(DZE) \geq \min\{(AEZ),(BDZ),(CED)\}$$

δηλαδή η ζητούμενη (1).

Επίλογος

Στην ανωτέρω εργασία έγινε προσπάθεια να αναδειχθεί η χρήση των αφφινικών μετασχηματισμών καθώς και των βαρυκεντρικών συντεταγμένων στη λύση προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ταυτόχρονα σε όλη την επεξεργασία της εργασίας χρησιμοποιήθηκε η νέα τεχνολογία των σύγχρονων λογισμικών, ώστε τα σχήματα και η δυναμικότητά τους να βοηθούν σε μεγάλο βαθμό την αντίληψη και την βαθύτερη κατανόηση των μετασχηματισμών αυτών καθώς και τη λειτουργία των βαρυκεντρικών συντεταγμένων.

Βιβλιογραφία

1. *W. C. Graustein. Introduction to Higher Geometry. McMillan Company.*
2. *P. S. Modenov and A.S. Parkhomenko. Geometric transformations vol. 1. Academic press.*
3. *I. M. Yaglon. Geometry transformation III. Random House.*
4. *M. M. Day. Polygons circumscribed about closed convex sets. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 62, pp315-319, 1958.*
5. *G. D. Chakevian and L. H. Lange. Magazine, vol44, No2, pp. 57-69.*