

## ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(το μοντέλο του Poincare)

Μέρος Α και μέρος Β

Μέρος Α.

*Δόρτσιος Κων/νος, Μαθηματικός*

*Email:kdortsi@sch.gr*

*Τσίντσιφας Γεώργιος, Μαθηματικός*

*Email :gtsintsifas@yahoo.com*

### Εισαγωγή

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη, το πρώτο επιστημονικό βιβλίο σε παραγωγική διαδικασία με τους κανόνες της Λογικής, τυπώθηκε για πρώτη φορά το 1482 στη Βενετία. Έκτοτε έχουν γίνει χιλιάδες εκδόσεις σε όλες σχεδόν τις γλώσσες του πλανήτη. Σε διάφορες παραλλαγές με το ίδιο περιεχόμενο τα Στοιχεία εξακολουθούν να είναι ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία παγκόσμια. Η διαίσθηση του Ευκλείδη, ώστε το 5<sup>ο</sup> αίτημα των παραλλήλων, να τεθεί αξιωματικά είναι αξιοθαύμαστη.

Η προσπάθεια πολλών Μαθηματικών διά μέσου των αιώνων να αποδείξουν ως θεώρημα το πέμπτο αίτημα, τελικά, οδήγησε τους Gauss(1777-1855), Lobatschewsky(1793-1856), Bolyai(1802-1870) στην υπερβολική Γεωμετρία και τον Riemann(1826-1866) στην ελλειπτική Γεωμετρία. Το 1899 μετά από έρευνα στις βάσεις της Γεωμετρίας ο D. Hilbert(1862-1943) παρουσίασε το βιβλίο του **Grundlagen der Geometrie**. Κλασσικό βιβλίο στο οποίο ανατρέχει κάθε ερευνητής της Γεωμετρίας.

Σήμερα, το κοινό κομμάτι σε όλες τις Γεωμετρίες λέγεται *Απόλυτη Γεωμετρία* και είναι βασισμένη στα ακόλουθα αξιώματα όπως τέθηκαν από τον Hilbert:

- I. Αξιώματα συμβολής*
- II. Αξιώματα διατάξεως*
- III. Αξιώματα ισότητας*
- IV. Αξιώματα συνεχείας*

Στην Ευκλείδειο Γεωμετρία δεχόμαστε τα αξιώματα της Απολύτου Γεωμετρίας και το αξίωμα των παραλλήλων, δηλαδή:

***V. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται ακριβώς μία παράλληλος προς αυτή.***

Στην Ελλειπτική Γεωμετρία(μετά από μια διαφοροποίηση σε ένα από τα αξιώματα συμβολής και σε ένα από τα αξιώματα διατάξεως) δεχόμαστε ότι:

***V<sub>e</sub>. Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου τέμνονται πάντα.***

Εφαρμογή της Ελλειπτικής Γεωμετρίας είναι η Γεωμετρία στην επιφάνεια μιας σφαίρας.

Στην Υπερβολική Γεωμετρία δεχόμαστε ως αξίωμα ότι:

***V<sub>u</sub>. Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν δύο τουλάχιστον παράλληλες προς την ευθεία αυτή στο υπερβολικό επίπεδο.***

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα για τα οποία ισχύει η Υπερβολική Γεωμετρία. Το πιο απλό και στο οποίο ισχύουν ιδιότητες προερχόμενες από την Ευκλείδειο Γεωμετρία είναι το μοντέλο του Poincaré. Τα μοντέλα εφαρμογής μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, εκτός του ότι είναι μια δικαίωση όσων δούλεψαν στις βάσεις της Γεωμετρίας, απεδείχθησαν ιδιαίτερα χρήσιμα στη γενική έρευνα των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Τα θεωρήματα της Απολύτου Γεωμετρίας ισχύουν στην Ευκλείδειο και Υπερβολική Γεωμετρία και σε γενικές γραμμές στην Ελλειπτική(υπάρχουν κάποιες διαφορές).

Μερικά τέτοια θεωρήματα είναι τα παρακάτω:

***Θ1. Αν δύο ευθείες τέμνονται, το άθροισμα των παρακειμένων γωνιών είναι 2 ορθές.***

***Θ2. Οι κατακορυφήν γωνίες δύο τεμνομένων ευθειών είναι ίσες.***

***Θ3. Οι ορθές γωνίες είναι ίσες.***

***Θ4. Ισχύουν οι ισότητες των τριγώνων Π-Γ-Π και Γ-Π-Γ.***

***Θ5. Οι παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.***

***Θ6. Οι μεσοκάθετοι στις πλευρές τριγώνου διέρχονται δια του αυτού σημείου.***

***Θ7. Σε κύκλο η ακτίνα που διχοτομεί την επίκεντρο γωνία, είναι μεσοκάθετος στην αντίστοιχη χορδή και διχοτομεί το τόξο που ορίζεται από αυτήν.***

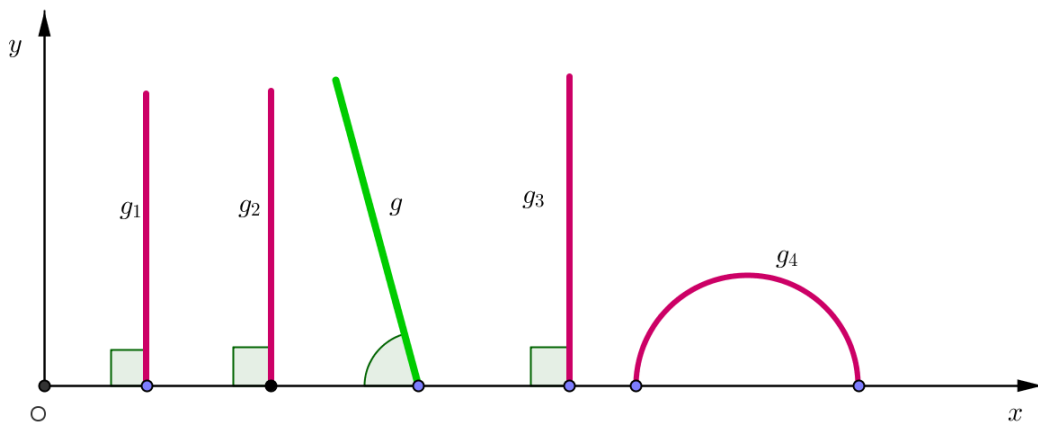
***Θ8. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία κάθετος προς την ευθεία αυτή.***

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι ένα πολύ μικρό μέρος της Απολύτου Γεωμετρίας. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή του μοντέλου του Poincaré και κατόπιν θα δούμε μερικά αξιολογικά θεωρήματα γνωστά από την Ευκλείδειο Γεωμετρία που συνεχίζουν να ισχύουν και στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

### Το μοντέλο του Poincaré

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  στο επίπεδο. Υπερβολικός χώρος που αναπτύσσεται στο μοντέλο του Poincaré είναι το ημιεπίπεδο  $y > 0$  που θα ονομάζεται στο εξής **h-επίπεδο**. Τα σημεία του h-επιπέδου θα λέγονται **h-σημεία**. Οι υπερβολικές ευθείες, **h-ευθείες**, είναι οι ημιπεριφέρειες με κέντρα πάνω στον άξονα των  $x$  και οι οποίες ανήκουν στο **h-επίπεδο**.

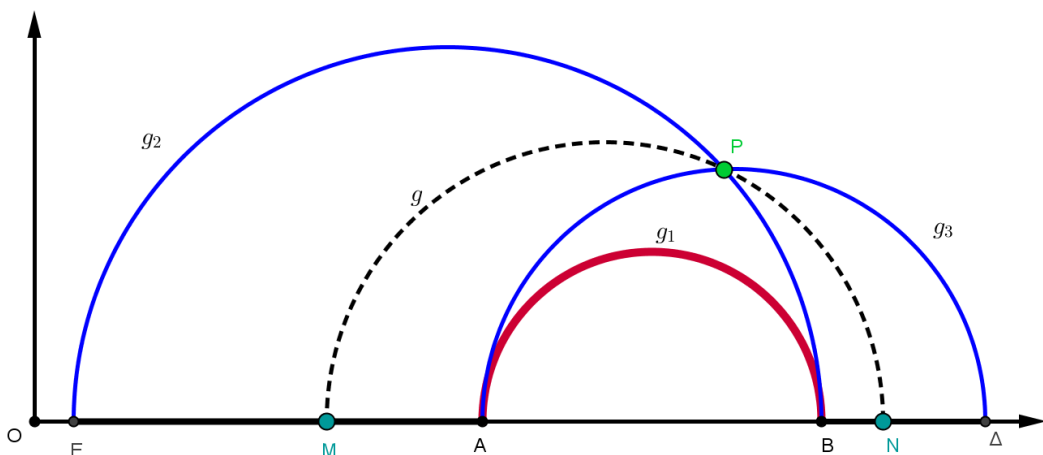
Στο παρακάτω σχήμα 1 οι  $g_1, g_2, g_3, g_4$  είναι **h-ευθείες** ενώ η  $g$  όχι.



Σχήμα 1

Οι  $g_1, g_2, g_3$  μπορούν να θεωρηθούν κύκλοι ακτίνας  $R = \infty$ .

Στο σχήμα 2 φαίνονται άπειρες ευθείες  $g$  από το h-σημείο P παράλληλες προς την  $g_1$ , με οριακές τις  $g_2, g_3$ .



Σχήμα 2

### h-απόσταση δύο σημείων

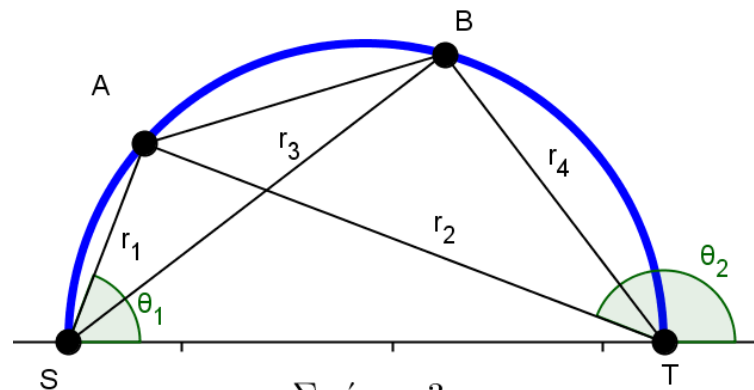
Ταυτίζουμε το h-επίπεδο με το μιγαδικό επίπεδο  $\gamma > 0$  και έστω  $A, B$  δύο h-σημεία. Οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία  $A, B$  θα συμβολίζονται με τα ίδια γράμματα.

Έστω τώρα η h-ευθεία που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ . (Σχήμα 3) Ορίζουμε ως h-απόσταση των  $A, B$  τον αριθμό που δίδεται από τον τύπο:

$$h-AB = R |\ln(ABST)| \quad (1)$$

όπου  $R$  σταθερά και  $(ABST)$  ο διπλός λόγος των σημείων  $A, B, S, T$  δηλαδή:

$$(ABST) = \frac{A-S}{B-S} : \frac{A-T}{B-T}$$



Σχήμα 3

Ο παραπάνω διπλός λόγος είναι θετικός, διότι:

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (\sigma\chi.3)$$

$$\frac{A-S}{A-T} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ακόμα:

$$\frac{B-S}{B-T} = \frac{r_3}{r_4} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

άρα:

$$(ABST) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3} > 0 \Rightarrow$$

$$h - AB = R \left| \ln \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3} \right| \quad (1)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία είναι  $T = \infty$  η περιφέρεια που διέρχεται από τα  $A, B$  γίνεται η ευκλείδεια ευθεία  $\varepsilon \perp Ox$  (Σχήμα 4)

Βλέπουμε ότι:

$$h - AB = R |\ln(ABST)|$$

για  $T = \infty$  γίνεται:

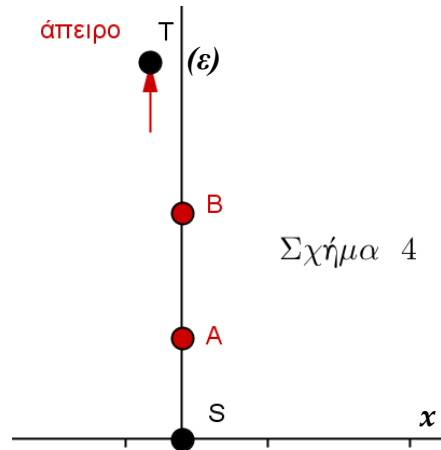
$$(ABST) = \frac{A-S}{B-S} : \frac{A-T}{B-T} = \frac{A-S}{B-S}$$

δηλαδή:

$$(ABST) = \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|}$$

και συνεπώς:

$$h - AB = R \left| \ln \frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|} \right| \quad (2)$$



### Μετασχηματισμός του Moebius

Λέγεται ο μετασχηματισμός  $F$  του μιγαδικού επιπέδου  $C$  στον εαυτό του και ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$F : z \rightarrow z' : z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{με } a, b, c, d \in C \text{ και } ad - bc \neq 0$$

#### Θεώρημα 1.

*Το σύνολο των μετασχηματισμών του Moebius αποτελεί ομάδα.*

Απόδειξη:

Έστω  $F_1, F_2$  δύο μετασχηματισμοί του Moebius και  $z \in C$ . Τότε:

$$z_1 = F_1(z), \quad \mu\epsilon \quad z_1 = \frac{az + b}{cz + d}$$

και

$$z_2 = F_2(z_1) \quad \mu\epsilon \quad z_2 = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}$$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$z_2 = F_2 F_1(z) = \frac{(a_1 a + b_1 c)z + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)z + (c_1 b + d_1 d)}$$

ακόμα:

$$\begin{vmatrix} a_1 a + b_1 c & a_1 b + b_1 d \\ c_1 a + b_1 c & c_1 b + d_1 d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

δηλαδή το γινόμενο των μετασχηματισμών του Moebius μετατράπηκε σε γινόμενο πινάκων. Έτσι η απόδειξη ότι αποτελούν ομάδα μπορεί να μεταφερθεί στο γινόμενο των πινάκων.

Το βασικό θεώρημα που είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου του Poincaré είναι το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.** Ο μετασχηματισμός του Moebius διατηρεί το διπλό λόγο.

Απόδειξη:

$$\text{Πράγματι αν είναι: } z_i' = F(z_i) \text{ όπου } T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mu\epsilon \quad |T| \neq 0 .$$

Τότε:

$$z_i' - z_j' = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}$$

και αν τεθεί:

$$k = \frac{(ad - bc)^2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)(cz_3 + d)(cz_4 + d)}$$

προκύπτει:

$$(z_1' - z_3')(z_2' - z_4') = k(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

κι ακόμα:

$$\frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_2' - z_3')(z_1' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

δηλαδή:

$$(z_1' z_2' z_3' z_4') = (z_1 z_2 z_3 z_4)$$

Η παραπάνω ιδιότητα των μετασχηματισμών Moebius μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Moebius ως την ισομετρική ομάδα για το μοντέλο του Poincaré. Άρα, η αντιστροφή, η μεταφορά και η ομοιοθεσία διατηρούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο μετασχηματισμός Moebius διατηρεί και τις γωνίες μεταξύ δύο γραμμών βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ισομετρικός για το συγκεκριμένο μοντέλο του Poincaré. Στην ουσία τα ανωτέρω είναι γνωστά από τη Στοιχειώδη Γεωμετρία, όπως για παράδειγμα η διατήρηση των γωνιών κατά την αντιστροφή.

Τις ιδιότητες αυτές μπορούμε με Στοιχειώδη Γεωμετρία να τις μελετήσουμε πώς λειτουργούν και στο μοντέλο του Poincaré.

### Διατήρηση της απόστασης δύο σημείων

Έστω  $h-AB$  με  $A, B$  στην περιφέρεια  $(c) = (O, OS = OT)$  (Σχήμα 5). Η αντιστροφή  $(T, k^2)$  μετασχηματίζει την ημιπεριφέρεια  $(c)$  στην ημιευθεία  $(c')$  και το τμήμα  $h-AB$  στο τμήμα  $h-A'B'$ .

Θα δείξουμε ότι είναι:

$$h - AB = h - A'B' \quad (3)$$

Πράγματι:

Θεωρώντας την αντιστροφή με κέντρο το σημείο  $T$  και δύναμη  $k^2$ , έχουμε:

$$S \rightarrow S', \quad A \rightarrow A', \quad B \rightarrow B', \quad T' \rightarrow \infty$$

άρα:

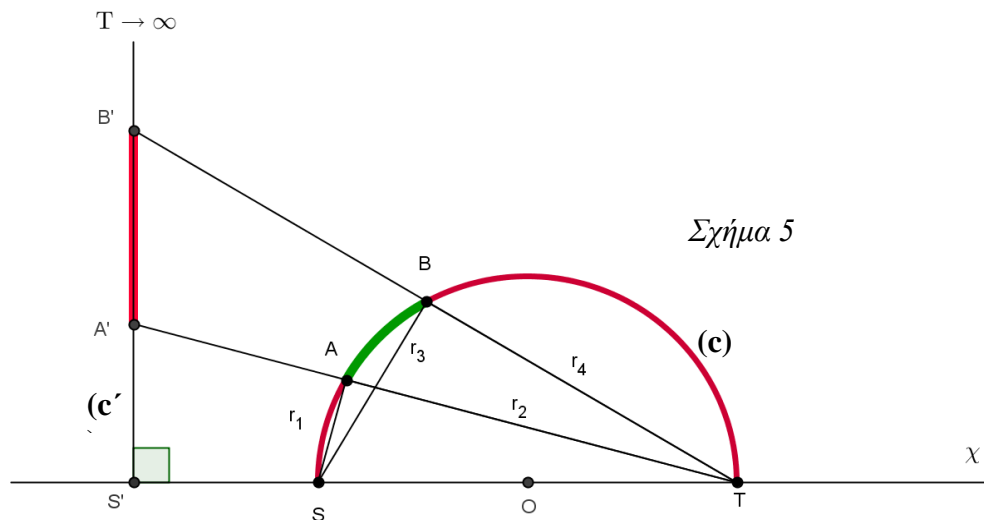
$$S'A' = \frac{k^2 r_1}{TS \cdot r_2}, \quad S'B' = \frac{k^2 r_3}{TS \cdot r_4}$$

και συνεπώς από τον τύπο (2) προκύπτει:

$$h - A'B' = R \left| \ln \frac{r_1 r_4}{r_2 r_3} \right| \quad (4)$$

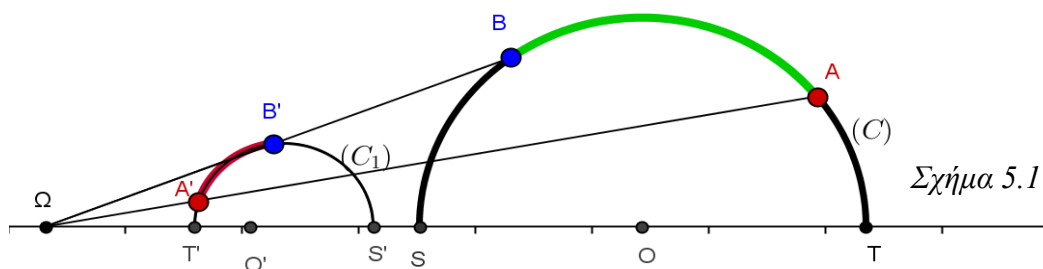
Επίσης από τον τύπο (1) είναι:

$$h - AB = R \left| \ln \frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3} \right| \quad (5)$$



Από τις (4) και (5) προκύπτει η ζητούμενη (3).

Αν τώρα ο πόλος αντιστροφής είναι αντί του σημείου  $T$  ένα άλλο σημείο εκτός του κύκλου ( $O$ ), τότε το αντίστροφο του κύκλου αυτού είναι άλλος κύκλος, η απόδειξη της (3) είναι περίπου η ίδια.





Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται η αντιστροφή ( $c'$ ) του κύκλου ( $c$ ) ως προς κέντρο το σημείο  $\Omega$  και δύναμη το  $k^2$  (Κύκλος αντιστροφής ( $\Omega, k$ )).

Τα  $h-AB=h-A'B'$  λέγονται συμμετρικά ως προς τον κύκλο ( $\Omega, k$ ).

### h – κύκλος

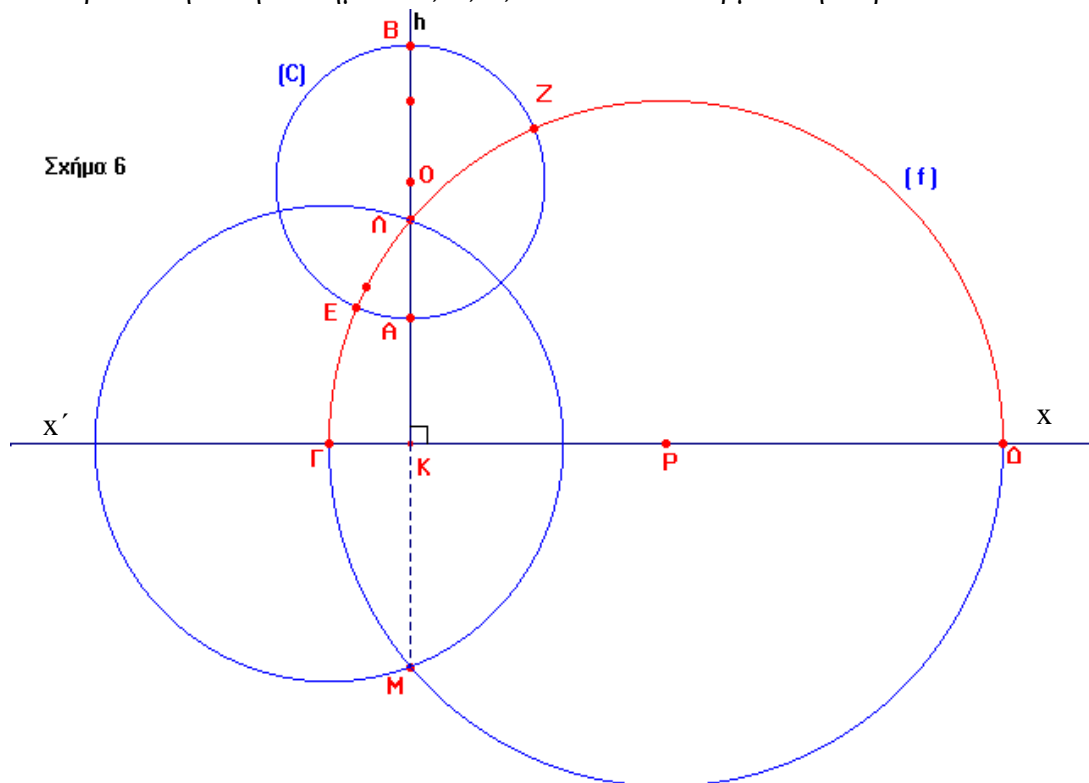
Είναι κάθε κύκλος που περιέχεται στο h-ημιεπίπεδο.

**Έστω ( $c$ ) κύκλος Ευκλείδειου κέντρου  $O$ . Θα προσδιορίσουμε το h-κέντρο.**

Από το κέντρο  $O$  (Σχ.6) φέρουμε την κάθετη  $OK$  (ευθεία  $h$ ) στον άξονα των  $x$  και  $A, B$  τα σημεία τομής αυτής με τον ο κύκλο ( $c$ ). Επιλέγουμε το σημείο  $\Lambda$  στο τμήμα  $AB$  τέτοιο ώστε:

$$K\Lambda^2 = KA \cdot KB \quad (1)$$

καθώς και το σημείο  $M$  στην προέκταση της  $\Lambda K$  ώστε:  $\Lambda K = KM$ . Στην περίπτωση αυτή τα σημεία  $B, A, \Lambda, M$  αποτελούν αρμονική τετράδα.



Ακόμα είναι:

$$h - \Lambda B = |\ln(\Lambda B K_\infty)| = \left| \ln \frac{\Lambda K}{BK} \right| = -\ln \frac{\Lambda K}{BK}, \quad (\Lambda K < BK) \quad (2)$$

$$h - \Lambda \Lambda = |\ln(\Lambda \Lambda K_\infty)| = \left| \ln \frac{\Lambda K}{\Lambda K} \right| = -\ln \frac{\Lambda K}{\Lambda K}, \quad (\Lambda K < \Lambda K) \quad (3)$$

Έτσι από την (1) και από τις (2), (3) προκύπτει:

$$h - \Lambda B = h = \Lambda \Lambda$$

Επίσης ο κύκλος  $(f)$  (κέντρον  $P$ ) που διέρχεται από τα σημεία  $\Lambda, M$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στα σημεία  $\Gamma, \Delta$ . Τέλος ο κύκλος  $(\Gamma, \Gamma\Lambda)$  ανήκει στη δέσμη με σημεία βάσης τα  $\Lambda, M$  (σημεία *Poncelet*) και είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο  $(c)$ .

Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια την αντιστροφή με κέντρο το σημείο  $\Gamma$  και κύκλο αντιστροφής τον  $(\Gamma, \Gamma\Lambda)$  τότε ως προς το μετασχηματισμό αυτό ο κύκλος  $(c)$  παραμένει αναλλοίωτος (κύκλος  $c$  και κύκλος  $(\Gamma, \Lambda)$  ορθογώνιοι), ενώ η ευθεία  $(h)$  απεικονίζεται στο ημικύκλιο  $\Gamma E Z \Delta$  του κύκλου  $(f)$ . Έτσι είναι:  $h - \Lambda E = h - B \Lambda$  και  $h - \Lambda Z = h - \Lambda \Lambda$ . Δηλαδή το  $h$ -κέντρο του  $(c)$  είναι το σημείο  $\Lambda$ .

Ο άξονας  $x'x$  είναι ο ριζικός άξονας του κύκλου  $(c)$  και του σημείου  $\Lambda$ .

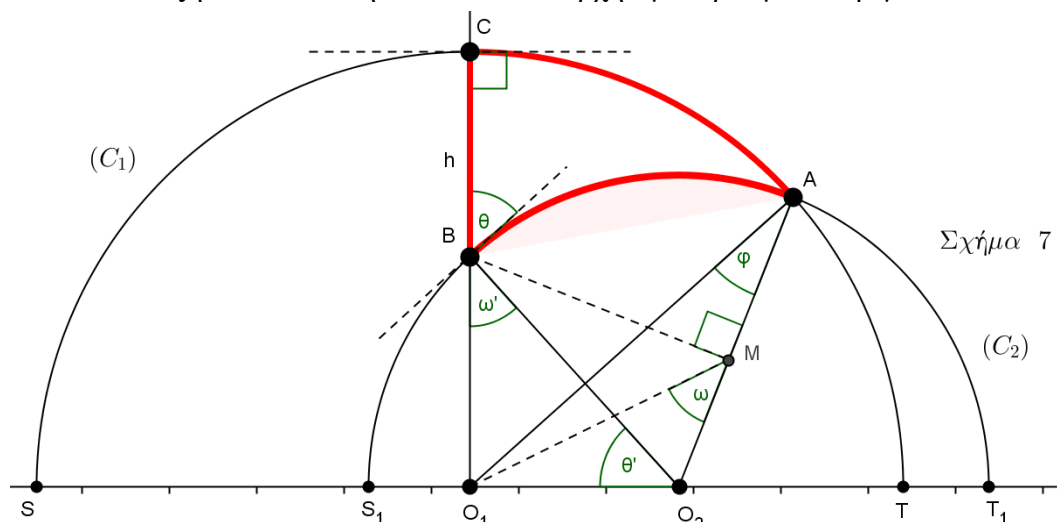
### Γωνία δύο $h$ -ευθειών

Είναι η γωνία των εφαπτόμενων των αντιστοίχων περιφερειών στο σημείο τομής των.

**Θεώρημα 3:** Σε κάθε  $h$ -τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Δηλαδή αν  $ABC$  τρίγωνο του  $h$ -επιπέδου θα είναι:  $A + B + C < 2$  ορθές.

Η απόδειξη είναι εύκολη. Γίνεται κατ' αρχήν για ορθογώνιο τρίγωνο. Έστω



$ABC$  τρίγωνο και  $C = 1$  ορθή. Θεωρούμε ότι  $h-BC$  είναι ευθεία κάθετος στον άξονα των  $x$ . Αν αυτό δεν ισχύει για το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο τότε με κατάλληλη αντιστροφή μετασχηματίζουμε το σχήμα.

Στο σχήμα 7 φαίνεται εύκολα ότι  $A + B < 1$  ορθή, διότι το σημείο  $A$  είναι εκτός του κύκλου διαμέτρου  $O_2B$  και επομένως:

$$A = \phi < \omega' \quad \text{και} \quad B = \theta = \theta'$$

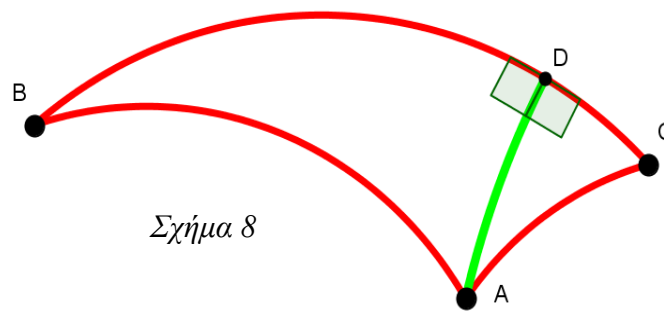
άρα:

$$A + B < \omega' + \theta' = 1 \text{ ορθή}$$

Δηλαδή στο ορθογώνιο  $h$ -τρίγωνο  $ABC$  έχουμε  $A + B + C < 2$  ορθές

Η απόδειξη για τυχαίο τρίγωνο  $ABC$  προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα 3. (Σχήμα 8)

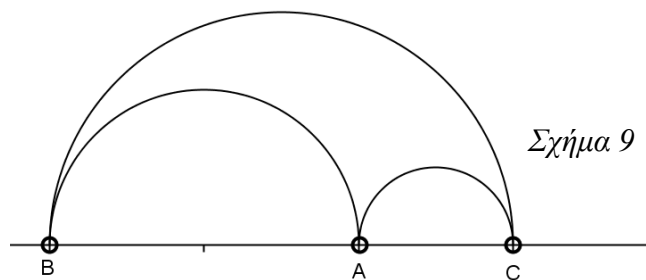
Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ύψος  $AD$  στο τρίγωνο  $ABC$ , τότε



Σχήμα 8

έχουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα με άθροισμα  $A + B + C < 2$  ορθές.

**Παρατήρηση:** Στο παρακάτω σχήμα 9 ισχύει:  $A + B + C = \varepsilon \rightarrow 0$ .



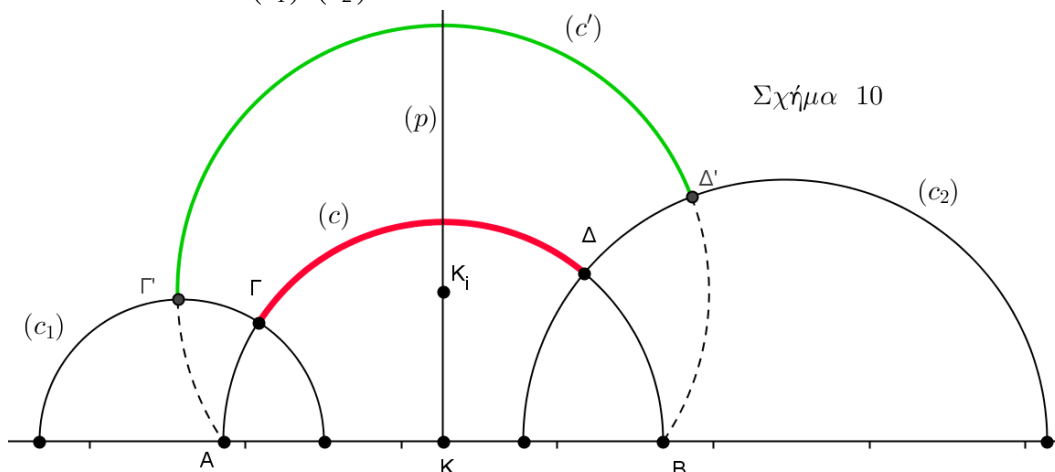
Σχήμα 9

#### Θεώρημα 4.

Στο  $h$ -επίπεδο(στο μοντέλο Poincaré) δύο παράλληλες  $h$ -ευθείες έχουν μια ακριβώς κοινή κάθετο.

Πράγματι.

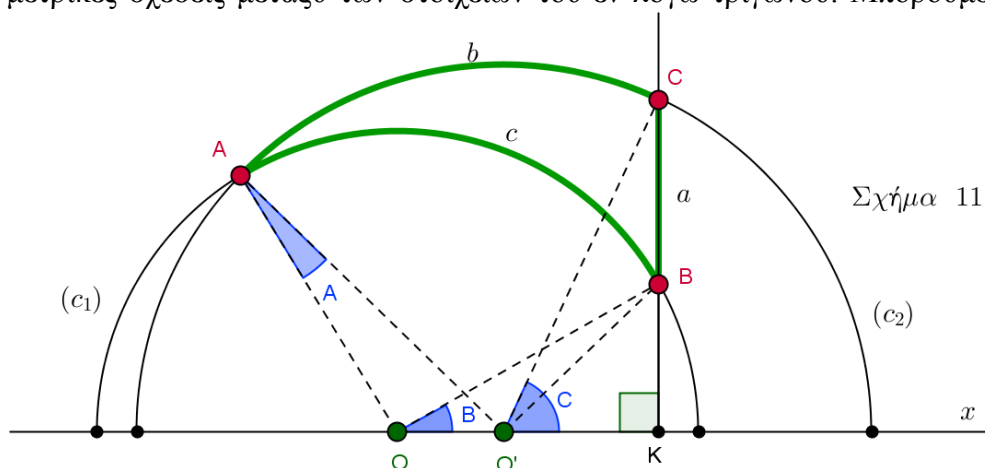
Αν  $(p)$  είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων  $(c_1), (c_2)$  τότε οι εφαπτόμενες από το σημείο  $K$  στους  $(c_1), (c_2)$  είναι ίσες προς  $\rho$ . Ο κύκλος  $(c) = (K, \rho)$  είναι ορθογώνιος προς τους  $(c_1), (c_2)$ . Κοινή απόσταση των  $(c_1), (c_2)$  είναι το τμήμα  $h$ -  $\Gamma\Delta$ .



Ο κύκλος  $(c')$  που διέρχεται από τα σημεία βάσης  $A, B$  της δέσμης των  $(c_1), (c_2)$  είναι συγχρόνως κάθετος στους  $(c_1), (c_2)$  αλλά δεν έχει το κέντρο στον άξονα των  $x$ .

### Μετρικές σχέσεις στο μοντέλο του Poincaré

Έστω το  $h-ABC$  τρίγωνο του  $h$ -επιπέδου. Θα αναζητήσουμε μετρικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του εν λόγω τριγώνου. Μπορούμε



για απλότητα να θεωρήσουμε ότι μια πλευρά π.χ. η  $h-BC$  βρίσκεται σε

ευθεία κάθετο στον άξονα των  $x$ . (Σχήμα 11)

I) Θέτουμε:  $h-BC=a$ ,  $h-AC=b$ ,  $h-AB=c$  και  $A, B, C$  τις αντίστοιχες γωνίες.

Τότε θα είναι:

$$a = R |\ln(BCK^\infty)| = R \ln\left(\frac{KC}{KB}\right)$$

Άρα:

$$\frac{a}{R} = \ln\left(\frac{KC}{KB}\right)$$

κι ακόμα:

$$\frac{a}{R} = \ln \frac{KC}{KB} \Leftrightarrow \frac{KC}{KB} = e^{\frac{a}{R}} \Leftrightarrow \frac{KB}{KC} = e^{-\frac{a}{R}}$$

αλλά:

$$\cosh \frac{a}{R} = \frac{e^{\frac{a}{R}} + e^{-\frac{a}{R}}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{KC}{KB} + \frac{KB}{KC} \right) = \frac{KB^2 + KC^2}{2KB \cdot KC} \quad (1)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα  $OKB, O'KC$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} KB^2 + KC^2 &= (OA^2 + O'A^2) - (OK^2 + O'K^2) = \\ &= (OO')^2 + 2OA \cdot O'A \cos(OAO') - (OK - O'K)^2 - 2OK \cdot O'K = \\ &= 2OB \cdot O'C \cos(OAO') - 2OK \cdot O'K. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1) έχουμε:

$$\cosh \frac{a}{R} = \frac{OB \cdot O'C}{KB \cdot KC} \cos OAO' - \frac{OK \cdot O'K}{KB \cdot KC} \quad (2)$$

αλλά:

$$\begin{aligned} \frac{OB}{KB} &= \frac{1}{\sin BOK}, \quad \frac{O'C}{KB} = \frac{1}{\sin CO'K} \\ BOK &= B, \quad CO'K = C, \quad OAO' = A \end{aligned}$$

ακόμα:

$$\frac{O'K}{KC} = -\cot C, \quad \frac{OK}{KB} = \cot B$$

και μετά τις αντικαταστάσεις στη σχέση (2) τελικά προκύπτει:

$$\cosh \frac{a}{R} = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad (A)$$

Κυκλικά προκύπτουν ακόμα οι τύποι:

$$\cosh \frac{b}{R} = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}, \quad \cosh \frac{c}{R} = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

II) Επίσης για το  $h-ABC$  ισχύει :

$$\frac{\sinh \frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sinh \frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sinh \frac{c}{R}}{\sin C} = \frac{\sqrt{Q}}{\sin A \sin B \sin C} \quad (B)$$

όπου:

$$Q = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1$$

III) Για ορθογώνια τρίγωνα, δηλαδή  $C = \frac{\pi}{2}$ , ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} \sinh \frac{a}{R} &= \sinh \frac{c}{R} \sin A, & \tanh \frac{a}{R} &= \tanh \frac{c}{R} \cos B \\ \tanh \frac{a}{R} &= \sinh \frac{b}{R} \tan A, & \cosh \frac{c}{R} &= \cosh \frac{a}{R} \cosh \frac{b}{R} \\ \cosh \frac{c}{R} &= \cot A \cot B, & \cosh \frac{a}{R} &= \frac{\cos A}{\sin B} \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

IV) Κυκλικοί ανάλογοι τύποι είναι και οι εξής:

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos A \quad (D)$$

Ο αντίστοιχος τύπος της Σφαιρικής Γεωμετρίας είναι (σφαίρα ακτίνας  $R$ ):

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A, \quad (E)$$

**Σχόλια:**

Παρατηρούμε ότι αν στον τύπο (E) τεθεί όπου  $R$  το  $iR$ , με  $i^2 = -1$  τότε ο τύπος αυτός της Σφαιρικής Γεωμετρίας γίνεται ο τύπος (D) της Υπερβολικής Γεωμετρίας. (Εδώ ειδικά στο μοντέλο του Poincaré).

Η εξήγηση είναι ότι η Σφαιρική Γεωμετρία αναφέρεται σε χώρο με σταθερή καμπυλότητα  $\frac{1}{R^2}$  ενώ η Υπερβολική Γεωμετρία σε χώρο σταθερής αλλά αρνητικής καμπυλότητας  $-\frac{1}{R^2}$ . Αυτός είναι ένας λόγος.

Επιπλέον αρκετοί από τους τύπους αυτούς ανήκουν και στις δύο αυτές μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες διότι ανήκουν στην Απόλυτη Γεωμετρία.

Ειδικά από τον τύπο (E), αν διατηρήσουμε σταθερές τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου  $h-ABC$  και θεωρήσουμε ότι  $R \rightarrow \infty$ , κι ακόμα αν αναπτύξουμε τα ημίτονα και συνημίτονα σε σειρές, τότε παραλείποντας τους όρους ανωτέρας της 2<sup>ης</sup> τάξης έχουμε:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right) + \frac{b}{R} \cdot \frac{c}{R} \cos A$$

δηλαδή:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos A$$

### Το θεώρημα του Πτολεμαίου

**Θεώρημα 5.** Αν  $A_1, A_2, A_3, A_4$  κορυφές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου σε κύκλο, τότε είναι:

$$A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_4 A_1 = A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 \quad (1)$$

Το παραπάνω θεώρημα, παλιότερα, διδάσκονταν στα σχολεία. Θυμόμαστε όλοι την απόδειξη με τα όμοια τρίγωνα και μια ακόμη απόδειξη, λίγο πιο προχωρημένη, με αντιστροφή. [13],[17],[18].

Οι αποδείξεις που προαναφέρθηκαν περιέχουν και την περίπτωση να μην είναι τα σημεία  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ομοκυκλικά οπότε στην περίπτωση αυτή είναι:

$$A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_4 A_1 > A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 \quad (2)$$

Οι αποδείξεις των αντιστρόφων προτάσεων (1) και (2) μπορούν να γίνουν με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιείται για την απόδειξη των (1) και (2) ή ακόμα με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Ο συνδυασμός των (1) και (2) λέμε ότι είναι η **ανισοϊσότητα του Πτολεμαίου**.

Αξιοσημείωτο είναι ότι η ανισοϊσότητα του Πτολεμαίου ισχύει στη Σφαιρική Γεωμετρία όπως και στην Υπερβολική Γεωμετρία (**μοντέλο του Poincaré**). Πράγματι αν  $A_1, A_2, A_3, A_4$  είναι σημεία μιας σφαίρας  $(O, R)$  του αυτού ημισφαιρίου, τότε στο τετράπλευρο  $A_1A_2A_3A_4$  εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου. Στη συνέχεια κάθε ευθύγραμμο τμήμα, έστω το  $A_1A_2$  είναι:

$$\frac{A_1A_2}{2} = R \sin \frac{A_1OA_2}{2} = R \sin \frac{A_1A_2}{2R}$$

Όμοιοι τύποι προκύπτουν και για τα  $A_3A_4, A_2A_3, A_4A_1, A_1A_3, A_2A_4$ .

Έτσι το θεώρημα του Πτολεμαίου παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sin \frac{A_1A_2}{2R} \cdot \sin \frac{A_3A_4}{2R} + \sin \frac{A_2A_3}{2R} \cdot \sin \frac{A_4A_1}{2R} \geq \sin \frac{A_1A_3}{2R} \cdot \sin \frac{A_2A_4}{2R} \quad (3)$$

Αν στη συνέχεια τεθεί αντί του  $R$  το  $iR$  τότε ο τύπος (3) γίνεται ο αντίστοιχος τύπος για την Υπερβολική Γεωμετρία. Δηλαδή:

$$\sinh \frac{A_1A_2}{2R} \cdot \sinh \frac{A_3A_4}{2R} + \sinh \frac{A_2A_3}{2R} \cdot \sinh \frac{A_4A_1}{2R} \geq \sinh \frac{A_1A_3}{2R} \cdot \sinh \frac{A_2A_4}{2R} \quad (4)$$

Είναι σημαντικό να δούμε ότι αν σε κάθε Γεωμετρία εργαστούμε με τα δικά της εργαλεία το θεώρημα του Πτολεμαίου έχει κοινή απόδειξη (δηλαδή με την ίδια μέθοδο). Παραθέτουμε παρακάτω την απόδειξη αυτή για την Ευκλείδειο Γεωμετρία.

**Θεώρημα 5.1** Αν  $A_1A_2A_3A_4$  είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$  τότε:

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 \quad (1)$$

*Απόδειξη:* Έστω (Σχ.12):

$$A_1OA_2 = \phi_1, \quad A_2OA_3 = \phi_2, \quad A_3OA_4 = \phi_3, \quad A_4OA_1 = \phi_4$$

τότε είναι:

$$\alpha_1 = 2R \sin \frac{\phi_1}{2}, \quad \alpha_2 = 2R \sin \frac{\phi_2}{2}, \quad \alpha_3 = 2R \sin \frac{\phi_3}{2}, \quad \alpha_4 = 2R \sin \frac{\phi_4}{2}$$

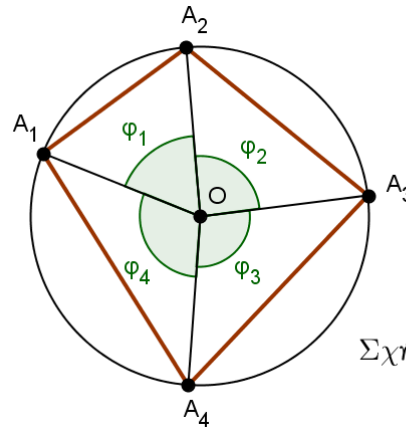


καθώς και

$$A_1A_3 = 2R \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \quad A_2A_4 = 2R \sin \frac{\phi_1 + \phi_4}{2}$$

όπου:

$$a_1 = A_1A_2, \quad a_2 = A_2A_3, \quad a_3 = A_3A_4, \quad a_4 = A_4A_1$$



Σχήμα 12

Επομένως το πρώτο μέλος της (1) γίνεται:

$$A = a_1a_3 + a_2a_4 = 4R^2 \left( \sin \frac{\phi_1}{2} \cdot \sin \frac{\phi_3}{2} + \sin \frac{\phi_2}{2} \cdot \sin \frac{\phi_4}{2} \right) \quad (2)$$

Όμοια το δεύτερο μέλος της (1) γίνεται:

$$B = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = 4R^2 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \cdot \sin \frac{\phi_1 + \phi_4}{2} \quad (3)$$

Όμως είναι:

$$\begin{aligned} & 2 \left( \sin \frac{\phi_1}{2} \cdot \sin \frac{\phi_3}{2} + \sin \frac{\phi_2}{2} \cdot \sin \frac{\phi_4}{2} \right) = \\ & = \left( \cos \frac{\phi_1 - \phi_3}{2} - \cos \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} \right) + \left( \cos \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} - \cos \frac{\phi_2 + \phi_4}{2} \right) \end{aligned}$$

Επομένως το πρώτο μέλος γίνεται:

$$A = 2R^2 \left( \cos \frac{\phi_3 - \phi_1}{2} + \cos \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} \right) \quad (4)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \cdot \sin \frac{\phi_1 + \phi_4}{2} = \\
 & = \cos \frac{(\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1 + \phi_4)}{2} - \cos \frac{(\phi_1 + \phi_2) + (\phi_1 + \phi_4)}{2} \\
 & = \cos \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} - \cos \frac{\phi_1 + (360^\circ - \phi_3)}{2} = \cos \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} + \cos \frac{\phi_1 - \phi_3}{2}
 \end{aligned}$$

Άρα το δεύτερο μέλος γίνεται:

$$B = 2R^2 \left( \cos \frac{\phi_2 - \phi_4}{2} + \cos \frac{\phi_1 - \phi_3}{2} \right) \quad (5)$$

και συνεπώς από τις (4) και (5) προκύπτει η ισχύς της (1).

Ιδιαίτερα αξιόλογη είναι η παρακάτω απόδειξη του θεωρήματος – Ανισότητας του Πτολεμαίου.

**Θεώρημα 5.2.** Έστω  $A_1, A_2, A_3, A_4$  τέσσερα σημεία του επιπέδου. Θα δείξουμε ότι:

$$A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_4 A_1 \geq A_2 A_4 \cdot A_1 A_3 \quad (1)$$

**Απόδειξη:**

Έστω  $a, b, c, d$  οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στα σημεία  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Τότε η αλγεβρική ισότητα:

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d) \quad (2)$$

είναι προφανής (πράξεις).

Αν πάρουμε τα μέτρα είναι:

$$|a-b||c-d| + |a-d||b-c| \geq |(a-c)||b-d| \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση είναι το θεώρημα του Πτολεμαίου για το τετράπλευρο  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

Για την απόδειξη της ισότητας στην (3) ενδιαφέρουσα είναι η ακόλουθη πρόταση.

**Θεώρημα 5.3.** Όταν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων στο επίπεδο είναι πραγματικός αριθμός, τότε τα σημεία είναι ομοκυκλικά.

**Απόδειξη:**

Έστω τα σημεία  $a, b, c, m$  στο μιγαδικό επίπεδο. Θεωρούμε τον κύκλο  $abc$  και  $F$  ο μετασχηματισμός του Moebius ώστε:

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 1, \quad F(c) = \infty$$

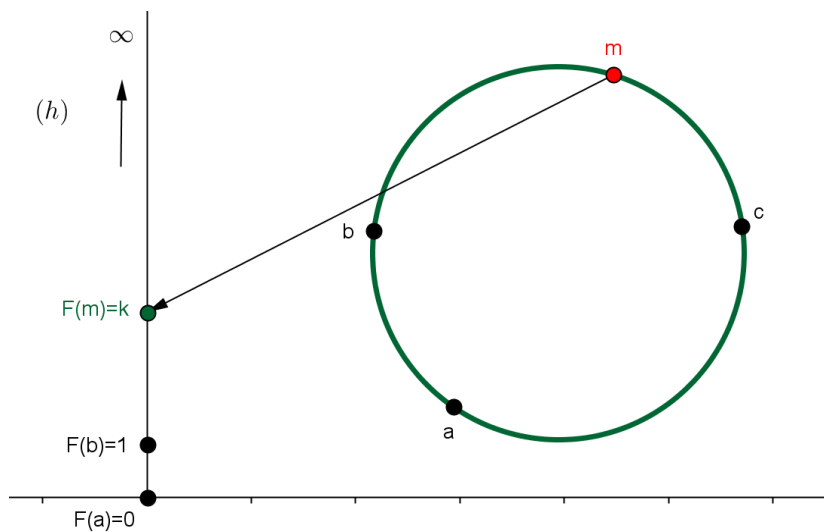
όπου  $0, 1, \infty$  επί ευθείας  $(h)$  καθέτου στον άξονα  $x'x$ .

Τότε είναι φανερό ότι κάθε σημείο  $m$  του κύκλου  $abc$  θα αντιστοιχίζεται στην ευθεία  $(h)$  και θα είναι:

$$F(m) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

δηλαδή πραγματικός αριθμός. Άρα:

$$(abcm) = \frac{(a-c)(b-m)}{(a-m)(b-c)} = \frac{(0-\infty)(1-k)}{(0-k)(1-\infty)} = -\frac{1-k}{k}$$



Σχήμα 13

Αποδείχτηκε δηλαδή ότι όταν τα σημεία  $a, b, c, m$  είναι ομοκυκλικά τότε ο διπλός λόγος είναι πραγματικός αριθμός. Εύκολα δείχνεται και το αντίστροφο.

Ακόμα βλέπουμε ότι η ισότητα στη σχέση (3) (Θεώρημα 5.3) ισχύει όταν ο διπλός λόγος  $(A_1A_3A_2A_4)$  είναι πραγματικός αριθμός, πράγμα που ισοδυναμεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3, ότι τα σημεία  $A_1, A_2, A_3, A_4$  είναι ομοκυκλικά.

### Παρατηρήσεις

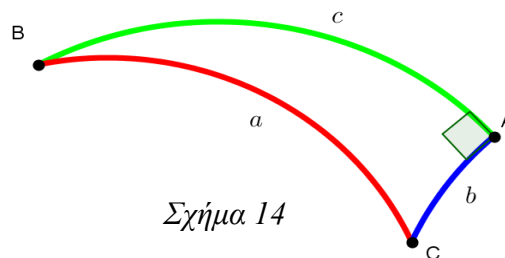
1<sup>η</sup>) Το θεώρημα του Πτολεμαίου είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Ο Karl Menger μελέτησε επισταμένα Γραμμικούς Νορμικούς Χώρους με την ιδιότητα να ισχύει το Θεώρημα του Πτολεμαίου. Ο I. Schonberg απόδειξε ότι ένας seminormed χώρος εφοδιασμένος με την ανισότητα του Πτολεμαίου είναι inner-product space. Οι M. Klamkin και A. Meir απόδειξαν ότι ένας γραμμικός Νορμικός χώρος είναι Πτολεμαϊκός όταν είναι συμμετρικός. [12], [14],[15]

2<sup>η</sup>) Η μέθοδος με την οποία αποδείχθηκε το θεώρημα του Πτολεμαίου για τις τρεις Γεωμετρίες δεν αποδίδει για την ανισότητα.

3<sup>η</sup>) Χρησιμοποιώντας τους τύπους των ορθογωνίων τριγώνων στο μοντέλο του Poincaré που αναφέρονται στο ακόλουθο θεώρημα:

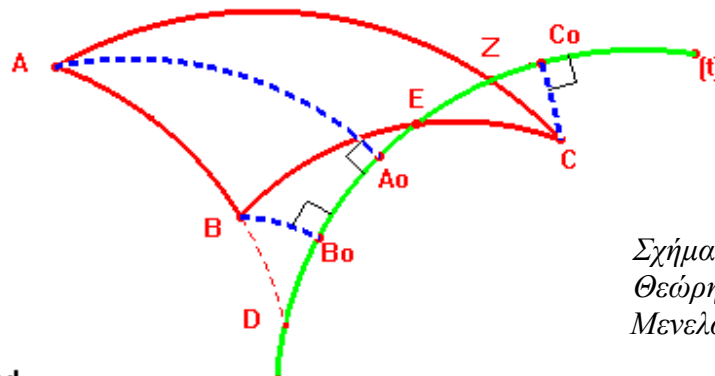
**Θεώρημα 5.4.** Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο  $ABC$  ( $A=1$  ορθή) (Σχήμα 14) ισχύει:

$$\sin c = \sin a \cdot \sin C$$



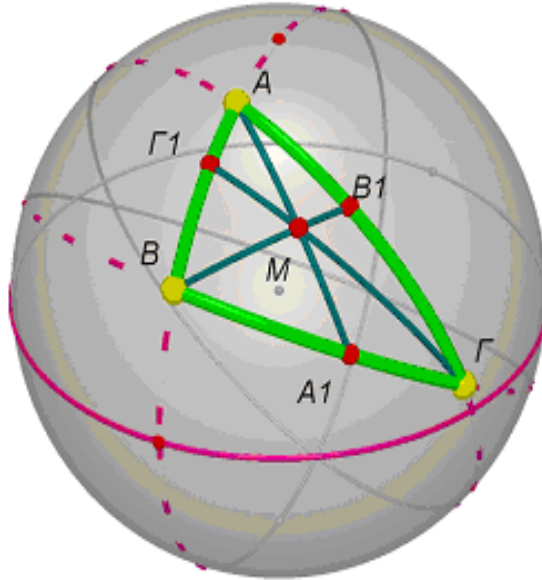
Σχήμα 14

μπορούμε εύκολα να δείξουμε το **θεώρημα του Μενελάου** ( Σχ.15) και



Σχήμα 15  
Θεώρημα  
Μενελάου

εφαρμόζοντας αυτό στη συνέχεια μπορεί κανείς να αποδείξει το **θεώρημα του Ceva** (Σχ. 16)



Σχήμα 16  
Θεώρημα Ceva  
Σφαιρική Γεωμετρία

Τέλος από το θεώρημα του Πτολεμαίου μπορεί κανείς να βρει **το σημείο Fermat** ενός τριγώνου.

### Μερικές ανισότητες σε σύγκριση από Ευκλείδειο, Ελλειπτική και Υπερβολική Γεωμετρία

Ισχύει:

$$R \geq 2r$$

$$\tan R \geq 2 \tan r$$

$$\tanh R \geq 2 \tanh r$$

$$s^2 \geq 27r$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{s}{3}\right)}{\sin s} \geq \tan^2 r$$

$$\tan^2 h \frac{F}{4} \leq \left(\tanh \frac{s}{2}\right) \left(\tan^3 h \frac{s}{6}\right)$$

$$2s^2 \geq 27Rr$$

$$\frac{2 \sin^2\left(\frac{s}{3}\right)}{\sin s} \geq \tan R \tan r$$

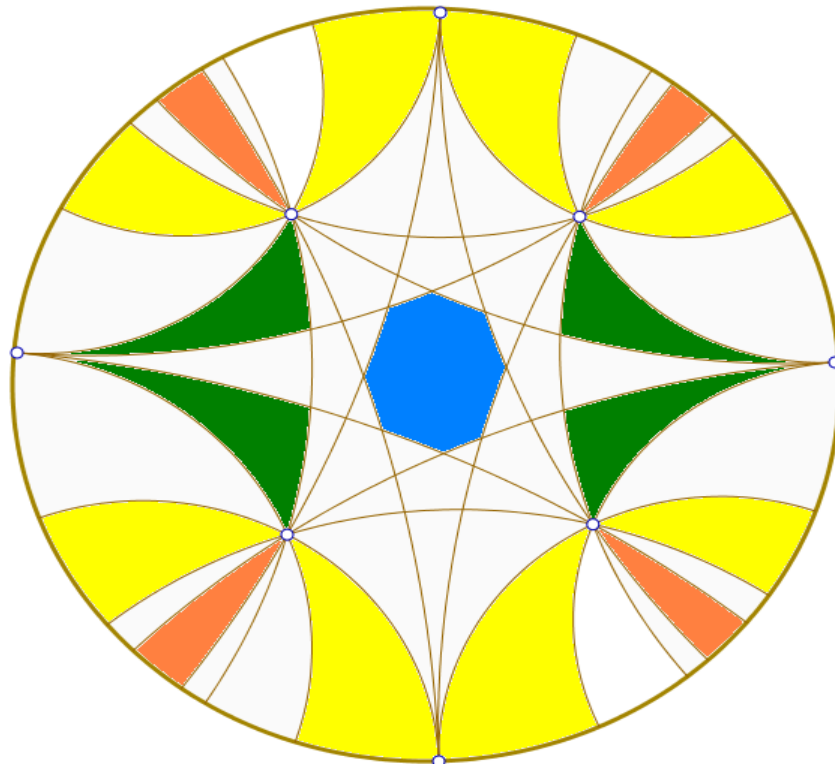
$$\Pi \tan^2 h \frac{A}{2} \leq \frac{\sin^3 h \frac{s}{3}}{\sin^2 h s}$$

$$s^2 \geq 3F\sqrt{3} \quad \left(\tan \frac{s}{2}\right) \left(\tan^3 \frac{s}{6}\right) \geq \tan^2 \frac{F}{4} \quad \Sigma \coth r_i \geq \frac{3 \coth r \sinh \frac{s}{3}}{\sinh s}$$

όπου  $R, r, r_i$  οι ακτίνες του περιγεγραμμένου, εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένων κύκλων,  $S, F$  η ημιπερίμετρος και το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$  και  $\Sigma, \Pi$  τα σύμβολα της άθροισης και του γινομένου.

## Η υπερβολική Γεωμετρία στη διακόσμηση

Το μοντέλο Poincaré στον κύκλο χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία για διακοσμητικούς ρόλους. Ο δίσκος καλύφθηκε με h-τρίγωνα ή h-πολύγωνα(κι αυτό δεν είναι απλή δουλειά) και διάφοροι καλλιτέχνες



*Ένα πρόχειρο σχεδιάσμα με τη βοήθεια του λογισμικού Carmetal*

διακόσμησαν με διάφορες παραστάσεις αυτά τα σχήματα.

Με εξαιρετική επιτυχία ο M.C.Escher αξιοποίησε τις δυνατότητες του μοντέλου αυτού κατασκευάζοντας υπέροχα σχήματα. Επίσης στο διαδίκτυο αν αναζητήσουμε εικόνες στο *pictures from hyperbolic Geometry* θα δούμε ότι υπάρχει πληθώρα τέτοιων σχημάτων.

Σήμερα, στην εποχή της σύγχρονης τεχνολογίας και της ψηφιακής απεικόνισης είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν διάφορα λογισμικά προς την κατεύθυνση δημιουργίας δυναμικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο μπορεί κανείς να κατασκευάσει με επιτυχία τα δομικά στοιχεία της Γεωμετρίας αυτής. Παραθέτουμε για παράδειγμα μια εικόνα φτιαγμένη με αντίστοιχο λογισμικό.

## Μέρος Β

Η ιστορία του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη είναι μακρά. Ενώ ανταποκρίνεται απόλυτα στην αίσθηση που έχουμε για τον τρισδιάστατο χώρο, η σχέση του με άλλα αξιώματα δεν είναι σαφής.

Οι μαθηματικοί από την αρχαιότητα προσπάθησαν να δείξουν ότι το αξίωμα αυτό είναι περιττό και προκύπτει σαν θεώρημα από τα άλλα αξιώματα. Στη σειρά των προσπαθειών αναφέρουμε από την ελληνική αρχαιότητα τον **Πρόκλο** και τον **Πτολεμαίο**. Στη συνέχεια αξιόλογους συλλογισμούς βρίσκουμε στον Πέρση **Nasiraddin** (1201-1274) και αργότερα τον **John Wallis** (1616-1703). Μετά περνάμε στις πολύ σημαντικές εργασίες των **Scheri** (1667-1733) και **Lambert** (1728-1777) και περνάμε στην τελική φάση με τους **Wolfgang Bolyai**, **Janos Bolyai**, **Gauss** και τελικά στον **N. Lobachevsky**. Εδώ η ιστορία έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο Wolfgang Bolyai, πατέρας του Janos Bolyai, και ο Gauss ήταν συμφοιτητές στο **Gottingen** και φίλοι. Ο Wolfgang έκανε προσπάθειες επάνω στο 5ο αξίωμα, στην «πέτρα του σκανδάλου», όπως το αποκαλούσε ο D' Alembert, αλλά προφανώς χωρίς αποτέλεσμα. Προσπάθειες αποτυχημένες για μια ολόκληρη ζωή. Οι συμβουλές προς το γιό του Janos ήταν να μην ασχοληθεί με αυτό το πρόβλημα. Παρόλα αυτά ο Janos εργάστηκε στο 5ο αξίωμα αλλά κατάλαβε ότι εφόσον τόσους αιώνες, τόσο καλοί μαθηματικοί εργάστηκαν χωρία αποτέλεσμα, κάποιος θα έπρεπε να αλλάξει δρόμο. Έτσι λοιπόν αποφάσισε να μην δεχθεί το 5ο αξίωμα και να βάλει κάποιο άλλο στη θέση του (π.χ. από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο παράλληλες προς μια δοσμένη ευθεία) και να προσπαθήσει να δει τι θα προκύψει. Έτσι πέτυχε να δημιουργήσει μια καινούργια Γεωμετρία.

Ο πατέρας του Janos, ο Wolfgang, το 1831 εξέδωσε ένα βιβλίο, το επονομαζόμενο **Tentamen** και δημοσίευσε στο βιβλίο αυτό για πρώτη φορά την 26-σέλιδη εργασία του γιού του στην καινούργια αυτή Γεωμετρία.

Ο Wolfgang, περήφανος για το γιό του, έστειλε το βιβλίο του στο φίλο του τον Gauss. Δυστυχώς η απάντηση του Gauss ήταν απογοητευτική. Του έγραψε ότι στα ίδια αποτελέσματα είχε φτάσει και ίδιος, αλλά τα θεώρησε μη αξιόλογα και γι' αυτό δεν τα είχε δημοσιεύσει. Φυσικά ο Janos στενοχωρήθηκε και κατηγορήσε τον πατέρα του ότι στην αλληλογραφία του με τον Gauss του είχε ενημερώσει για τη δουλειά του και αυτό το εκμεταλλεύτηκε ο Gauss. Φυσικά αν δούμε το μέγεθος του Gauss αυτό αποκλείεται. Η πραγματικότητα είναι διαφορετική.

Ο Gauss πριν από αρκετά χρόνια είχε φτάσει στην Υπερβολική

Γεωμετρία. Αναφέρεται ότι προσπάθησε να επαληθεύσει για μεγάλες αποστάσεις ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών. Δηλαδή με τα υπάρχοντα της εποχής εκείνης τοπογραφικά μέσα μέτρησε τις κορυφές τριών απομακρυσμένων βουνών, σχημάτισε ένα τρίγωνο ABC και μέτρησε το άθροισμα των τριών γωνιών  $A+B+C$ . Δυστυχώς γι' αυτόν το βρήκε σχεδόν δύο ορθές. Η διαφορά οφειλόταν στο παραδεκτό λάθος των οργάνων.

Ο Gauss, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των χρόνων, ήταν και ένας παραδοσιακός πολίτης χαμηλών τόνων, οπαδός το Kant και ο οποίος πίστευε ότι τα Μαθηματικά (ιδιαίτερα η Γεωμετρία) πρέπει να συμφωνούν με τον εμπειρικό μας κόσμο. Στην αλληλογραφία του, φαίνεται ότι δεν ήταν διατεθειμένος να εισάγει «καινά δαιμόνια», πράγμα που έκανε αργότερα (1829) δυναμικά ο Ρώσος Γεωμέτρης N. Lobachevsky.

### Ευκλείδειος (ή παραβολική), Ελλειπτική και Υπερβολική Γεωμετρία

Η ονομασία σχετικά με τις νέες αυτές Γεωμετρίες ξεκινάει από τον **Felix Klein** και σχετίζεται με το πλήθος των «επ' άπειρων» σημείων που αυτές έχουν. Έτσι:

- Η Ευκλείδειος (ή Παραβολική) Γεωμετρία έχει ένα επ' άπειρον σημείο.

Η παραβολή επίσης έχει ένα σημείο στο άπειρο. (*Ideal point*)

- Η Υπερβολική Γεωμετρία έχει δύο επ' άπειρον σημεία.

Η υπερβολή έχει δύο σημεία στο άπειρο.

Στη Γεωμετρία αυτή ισχύει:

1ο) Από ένα σημείο άγονται άπειρες ευθείες παράλληλες προς μια δοσμένη ευθεία.

2ο) Από ένα σημείο άγονται άπειρες ευθείες κάθετες προς μια δοσμένη ευθεία.

- Τέλος η Ελλειπτική Γεωμετρία δεν έχει επ' άπειρον σημεία. (όπως η σφαίρα)

Η έλλειψη δεν έχει επ' άπειρον σημεία.

## 1. Αντιστροφή στο Μιγαδικό επίπεδο

### 1.1 Ορισμός:



Έστω ο μιγαδικός αριθμός:

$$z = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)$$

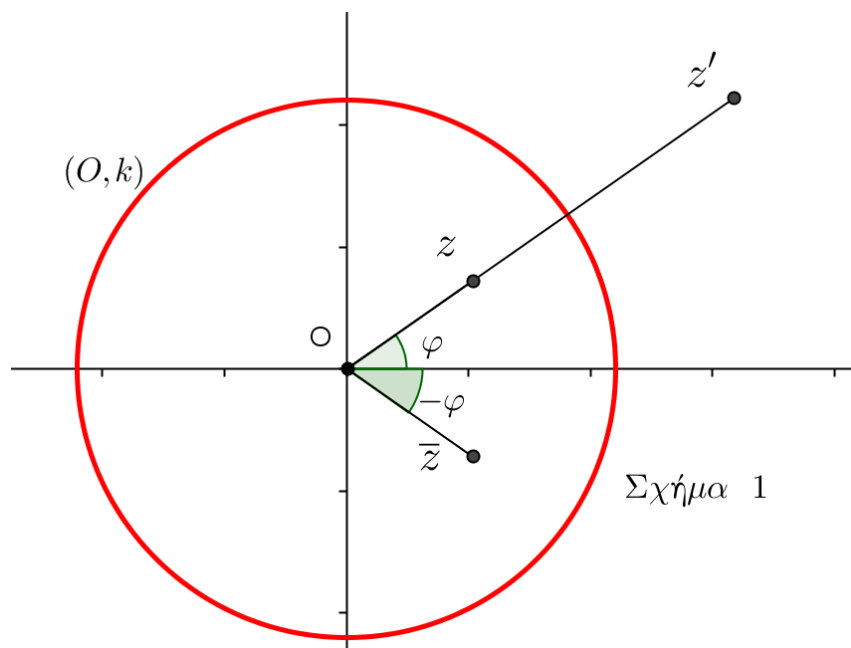
τότε το μιγαδικό αριθμό:

$$z' = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)$$

θα τον ονομάζουμε αντίστροφο του  $z$  αν και μόνον εάν:

$$\rho_1 \rho_2 = \kappa^2$$

όπου  $\kappa$  ένας δοσμένος θετικός αριθμός.



## 1.2 Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός μιγαδικού

*1<sup>η</sup> περίπτωση:*

Έστω ότι ο πόλος αντιστροφής είναι η αρχή των αξόνων και η ακτίνα είναι  $\kappa > 0$ .

Τότε για τον αντίστροφο (Σχήμα 1):

$$z' = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi)$$

ισχύει:

$$z' \bar{z} = \kappa^2 = \rho_1 \rho_2$$

όπου:

$$\bar{z} = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu\phi - i\eta\mu\phi) = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu(-\phi) + i\eta\mu(-\phi))$$

και  $(O, \kappa)$  ο κύκλος αντιστροφής.

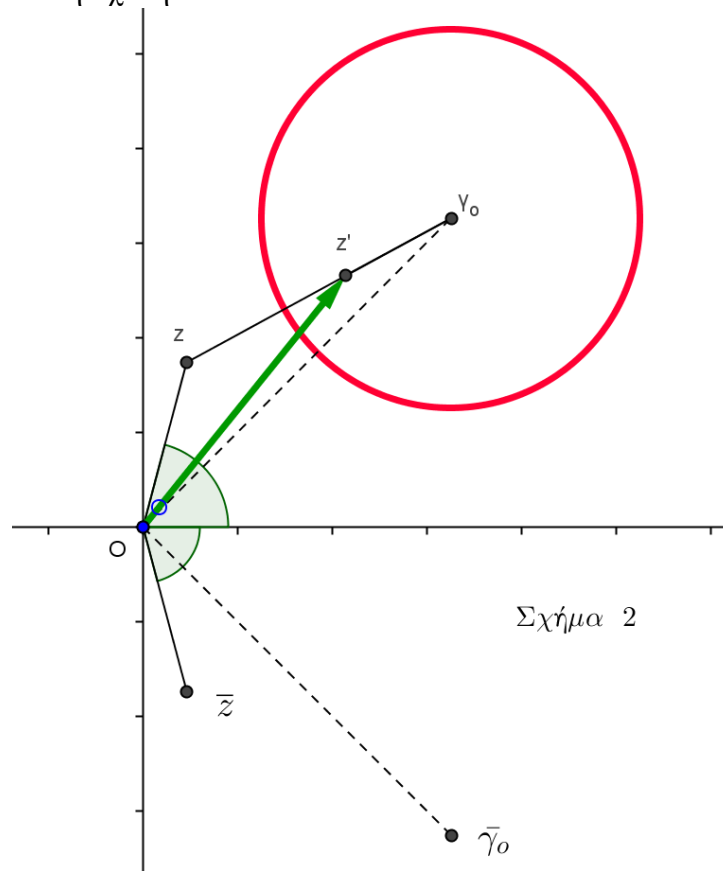
Πράγματι:

$$z' \bar{z} = \rho_1 \rho_2 (\sigma \nu \phi + i \eta \mu \phi) (\sigma \nu \phi - i \eta \mu \phi) = \rho_1 \rho_2 = \kappa^2$$

**2<sup>η</sup> περίπτωση:**

Έστω ότι ο πόλος αντιστροφής είναι το σημείο  $K(\gamma_o)$  και η ακτίνα είναι  $\kappa > 0$ .

Στην περίπτωση αυτή (Σχήμα 2) ο αντίστροφος του μιγαδικού  $Z$  δίνεται από τη σχέση:



$$z' = \gamma_o + \frac{\kappa^2}{z - \gamma_o}$$

### 1.3 Πρόταση

Αν τα τρία  $h$ -σημεία  $A, B, C$  ανήκουν στο  $h$ -επίπεδο και είναι

διαδοχικά, τότε θα ισχύει:

$$(h - AB) + (h - BC) = h - AC$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της απόστασης δύο σημείων προκύπτει:

$$h - AB = R \ln(ABST)$$

$$h - BC = R \ln(BCST)$$

και με πρόσθεση κατά μέλη των δυο αυτών σχέσεων είναι:

$$\begin{aligned} & (h - AB) + (h - BC) = \\ & = R \ln(ABST) + R \ln(BCST) = \\ & = R \ln[(ABST)(BCST)] = \\ & = R \ln \left[ \left( \frac{AS}{BS} \cdot \frac{AT}{BT} \right) \left( \frac{BS}{CS} \cdot \frac{BT}{CT} \right) \right] = \\ & = R \ln \left[ \frac{AS}{\cancel{BS}} \cdot \frac{\cancel{BT}}{AT} \cdot \frac{\cancel{BS}}{CS} \cdot \frac{CT}{\cancel{BT}} \right] = \\ & = R \ln \left( \frac{AS}{CS} \cdot \frac{CT}{AT} \right) = R \ln \left( \frac{AS}{CS} \cdot \frac{AT}{CT} \right) = \\ & = R \ln(ACST) = h - AC \end{aligned}$$

άρα:

$$(h - AB) + (h - BC) = h - AC$$

δηλαδή η ζητούμενη.

#### 1.4 Πρόταση

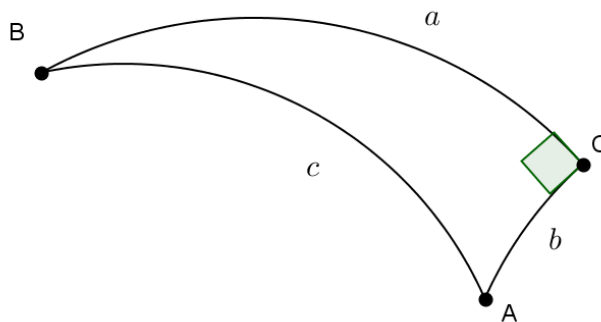
Σε ορθογώνιο τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι μικρότερη της υποτεινούσας.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το τρίγωνο  $h - ABC$  τέτοιο ώστε  $C = 1$  ορθή.

Θα δείξουμε ότι:

$$h - BC < h - AB \quad (1)$$



Σχήμα 3

**1<sup>ος</sup> τρόπος:**

Είναι γνωστό (Εφαρμογή της Υ.Γ. στο μοντέλο Poincaré. Σ.13) ότι ισχύει:

$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin A \quad (2)$$

Αλλά:

$$A < \frac{\pi}{2}$$

Άρα:

$$\sinh a < \sinh c \quad (3)$$

Από την (3) ακόμα προκύπτει:

$$\frac{e^a - e^{-a}}{2} < \frac{e^c - e^{-c}}{2} \quad (4)$$

Αν στην (4) θέσουμε:

$$e^a = x, \quad e^c = y$$

τότε η (4) ισοδυναμεί:

$$(4) \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} < y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow (x - y)(1 + xy) < 0 \Leftrightarrow x < y$$

δηλαδή:

$$e^a < e^b$$

η οποία σημαίνει ότι είναι:

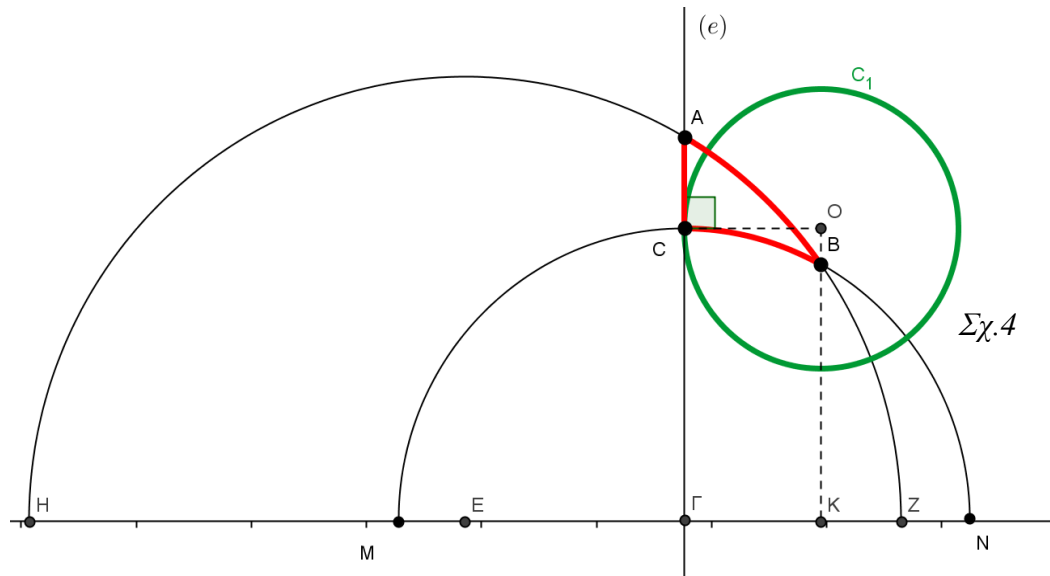
$$a < c$$

δηλαδή:

$$h - BC < h - AB$$

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε ότι η πλευρά  $AC$  κείται επί της ευθείας  $(e)$  η οποία είναι κάθετος προς τον οριζόντιο άξονα  $x'x$  (Σχ.4)



Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον  $h$  - κύκλο  $(C_1)$  ο οποίος έχει  $h$  - κέντρο το σημείο  $B$  και ο οποίος εφάπτεται στην  $(e)$  στο σημείο  $C$ . Το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό σημείο αυτού του κύκλου και συνεπώς:

$$h - BC < h - AB$$

### **1.5 Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου στο $h$ -επίπεδο**

Έστω ότι έχουμε δύο σημεία  $A$  και  $B$  στο  $h$  - επίπεδο και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση το  $h$ - $AB$ . (Σχ.5)

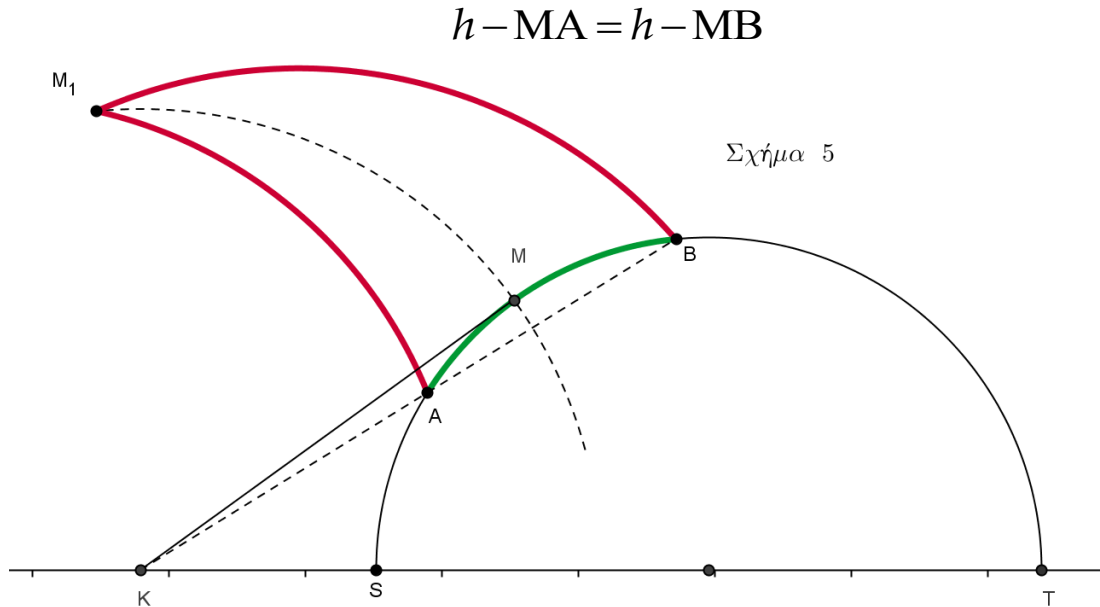
Η ευκλείδεια ευθεία  $AB$  τέμνει τον άξονα των  $x'x$  στο σημείο  $K$ . Έστω ακόμα  $KM$  η ευκλείδεια εφαπτομένη στην  $h$ - $AB$ .

Με κέντρο το σημείο  $K$  και ακτίνα ίση με  $KM$  γράφουμε ευκλείδειο κύκλο. Το ημικύκλιο του κύκλου αυτού που είναι στο  $h$ -επίπεδο αποτελεί την  $h$ -μεσοκάθετο του  $h$ - $AB$ .

Αν  $M_1$  είναι ένα σημείο της  $h$ -μεσοκαθέτου τότε το  $h$ -τρίγωνο  $M_1AB$  είναι ισοσκελές, διότι:

$$(KM_1)^2 = (KM)^2 = (KA)(KB)$$

άρα:



και τελικά

$$h - M_1A = h - M_1B$$

Από την ισότητα των  $h$ -τριγώνων  $M_1MA$ ,  $M_1MB$  προκύπτει ότι οι παρά τη βάση του  $h$ -ισοσκελούς τριγώνου  $M_1AB$  γωνίες είναι ίσες.

### 1.6 Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου στο $h$ -επίπεδο δοθέντων δύο κορυφών του

Έστω πάλι ότι έχουμε δύο σημεία, τα  $A$  και  $B$  στο  $h$ -επίπεδο (Σχ.6). Ζητούμε να κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά την  $h-AB$ .

Από το σημείο  $A$  φέρουμε την κάθετη προς την  $x'x$  και εύκολα διαπιστώνεται ότι η κάθετος αυτή  $AA_1$  είναι η αντίστροφος του κύκλου που ορίζει η  $h-AB$  με κέντρο αντιστροφής το σημείο  $S$ . Αυτό συμβαίνει διότι:

$$(SA)^2 = (SA_1)(ST) = (S\Theta)(SB)$$

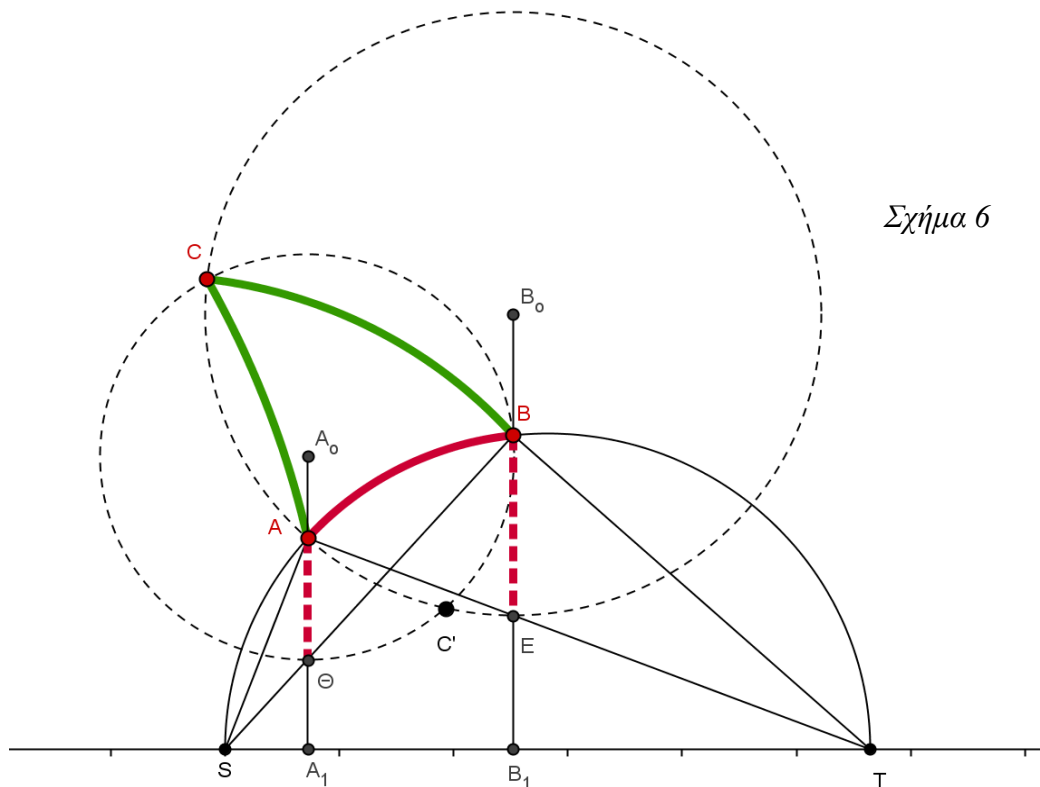
διότι το τετράπλευρο  $A_1TB\Theta$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Σύμφωνα με την αντιστροφή αυτή το  $h-AB$  έχει εικόνα το  $h-A\Theta$  και επειδή κατά την αντιστροφή διατηρείται το  $h$ -μήκος θα είναι:

$$h - AB = h - A\Theta$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι τα σημεία  $B$  και  $\Theta$  ισαπέχουν από το σημείο  $A$  και συνεπώς ανήκουν στον ίδιο  $h$ -κύκλο που

έχει ευκλείδειο κέντρο το σημείο  $A_o$  το οποίο βρίσκεται ως η τομή της μεσοκαθέτου της  $B\Theta$  και της ευθείας που ορίζεται από το τμήμα  $AA_1$ .



Σχήμα 6

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τον κύκλο με κέντρο το  $B_o$  τα σημεία του οποίου ισαπέχουν από το σημείο  $B$  απόσταση ίση με  $h-AB$ .

Η τομή των δύο αυτών κύκλων είναι η κορυφή του ζητούμενου ισοπλεύρου τριγώνου. Ασφαλώς η γενική περίπτωση δίνει δύο λύσεις, τις  $ABC$  και  $ABC'$ .

### 1.7 Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου δοθείσης $h$ -πλευράς ίσης με $a$

Επί της ευθείας  $(e) \perp x'x$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $B$  και ένα σημείο  $\Lambda$  έτσι ώστε:  $B\Lambda = a$ , όπου  $a$  μια ευκλείδεια απόσταση. (Σχ.7)

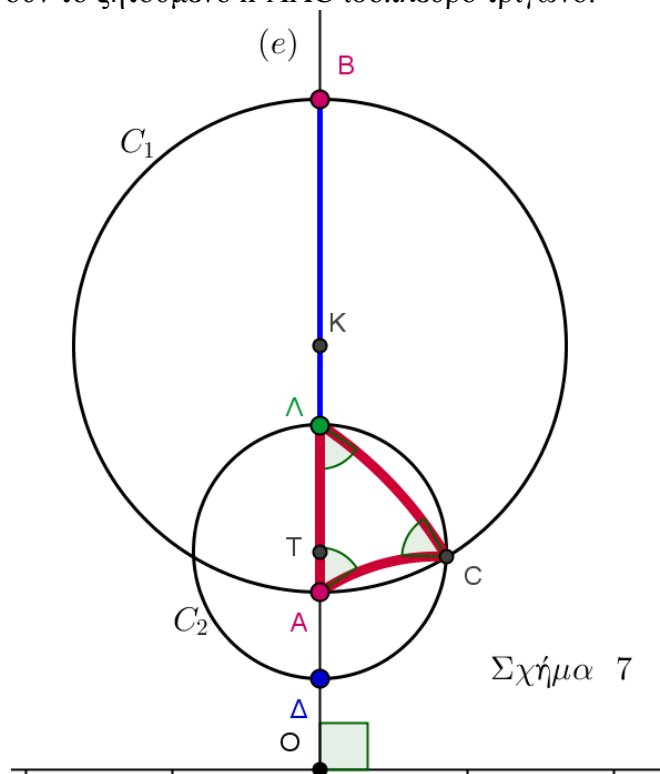
Στη συνέχεια προσδιορίζουμε ένα σημείο  $A \in (e)$  ώστε να ικανοποιεί τη σχέση:

$$O\Lambda^2 = (OA)(OB)$$

Ο ευκλείδειος κύκλος  $C_1\left(K, \frac{AB}{2}\right)$  έχει h-κέντρο το σημείο  $\Lambda$  και h-ακτίνα την  $B\Lambda = \alpha$ .

Στη συνέχεια με την ίδια λογική κατασκευάζουμε τον  $C_2$ , έναν h-κύκλο ο οποίος έχει h-κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα ίση με  $a$  (ευκλείδεια).

Η τομή  $C$  των κύκλων  $C_1, C_2$  αποτελεί ένα σημείο που μαζί με τα  $A$  και  $\Lambda$  δημιουργούν το ζητούμενο h- $\Lambda AC$  ισόπλευρο τρίγωνο.



### 1.8 Σχέση των γωνιών του h-ισοπλεύρου τριγώνου

Οι γωνίες  $\omega$  του h-ισοπλεύρου τριγώνου h- $\Lambda AC$  τριγώνου είναι ίσες μεταξύ των και μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του  $E_H(\Lambda AC)$  σύμφωνα με τον τύπο:

$$E_H(\Lambda AC) = \pi - 3\omega$$

όπου  $E_H(\Lambda AC)$  είναι το h-εμβαδόν του τριγώνου  $\Lambda AC$  και το οποίο εμβαδόν είναι διαφορετικό από το εμβαδόν ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου  $\Lambda A' C'$  του οποίου οι κορυφές  $A'$  και  $C'$  ανήκουν στον h-κύκλο κέντρου  $\Lambda$ .



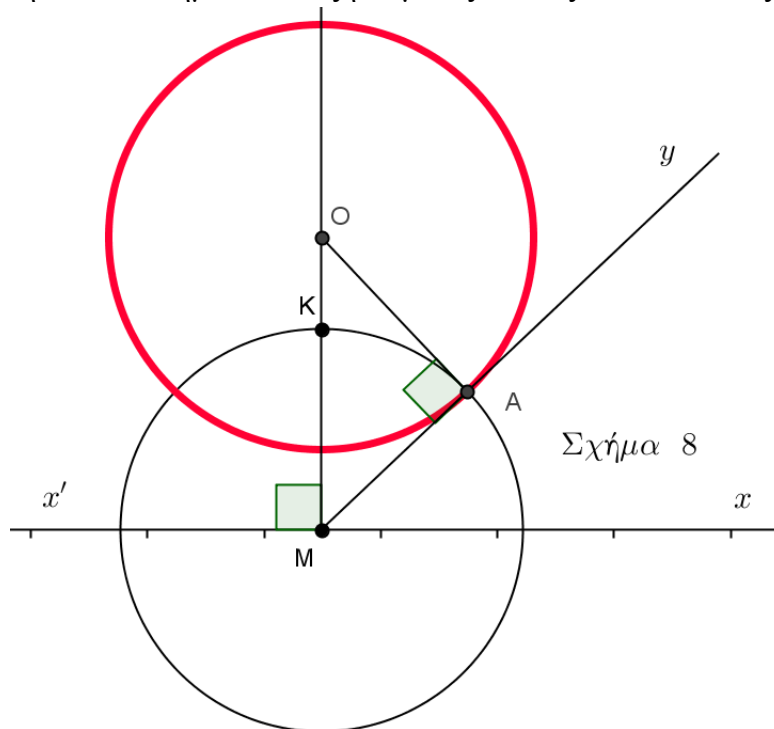
Γενικά το υπερβολικό εμβαδόν  $E_H(\Lambda AC)$  δεν είναι ίσο με το εμβαδόν  $E_H(\Lambda A'C')$ . Άρα και οι γωνίες του  $\Lambda A'C'$  δεν είναι ίσες προς τις γωνίες του  $\Lambda AC$ .

### 1.9 Κατασκευή ομόκεντρων h-κύκλων

Δίνεται σημείο  $K$  στο h-επίπεδο του Poincaré και ζητούμε όλους τους h-κύκλους που έχουν ως h-κέντρο το σημείο  $K$ .

Φέρουμε την  $KM \perp x'x$  και την  $M\gamma$  τυχαία ημιευθεία όπως φαίνεται στο σχήμα 8. Γράφουμε τον κύκλο  $C(M, MK)$  και έστω  $A$  το σημείο τομής αυτού με την  $M\gamma$ .

Στη συνέχεια φέρουμε στο σημείο  $A$  κάθετη προς την  $M\gamma$  η οποία ορίζει στην  $KM$  το σημείο  $O$ . Ο ζητούμενος κύκλος είναι ο κύκλος που έχει

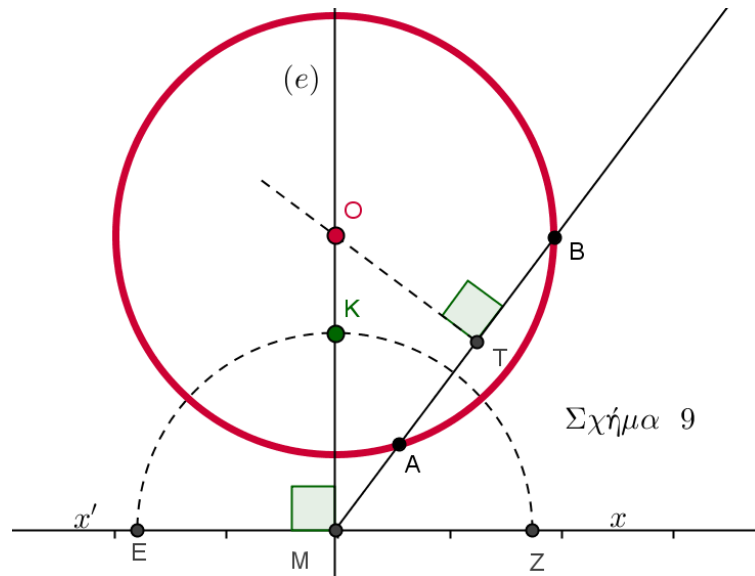


κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα την  $OA$ . Το h-κέντρο του κύκλου αυτού είναι το σημείο  $K$ .

Περιστρέφοντας την  $M\gamma$  γύρω από το σημείο  $M$  λαμβάνουμε μια δέσμη ομόκεντρων h-κύκλων.

### 1.10 Κατασκευή h-κύκλου που διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία $A, B$ .

Έστω  $M$  το σημείο τομής του άξονα των  $x'x$  με την ευθεία που ορίζουν τα δοθέντα σημεία  $A$  και  $B$ . (Σχ.9)



Στην κάθετη  $(e)$  προς τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $M$  και στο  $h$ -επίπεδο ορίζουμε το σημείο  $K$  τέτοιο ώστε:

$$MK^2 = MA \cdot MB$$

Η μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$  ορίζει στην  $(e)$  ένα σημείο, έστω το  $O$ . Ο ζητούμενος κύκλος έχει ευκλείδειο κέντρο το σημείο  $O$ ,  $h$ -κέντρο το σημείο  $K$  και ακτίνα την  $OA$ .

### Παρατήρηση

Οι μετασχηματισμοί του Moebius διατηρούν τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων του Μιγαδικού Επιπέδου και χρησιμοποιήθηκαν για να αποτελέσουν την **ομάδα των ισομετρικών μετασχηματισμών** στο μοντέλο του Poincaré. Όμως η μεταφορά παράλληλη προς τον άξονα των  $x'x$ , η ομοιοθεσία με κέντρο ένα σημείο πάνω στον  $x'x$  και αντιστροφή με κέντρο ένα σημείο πάνω στον  $x'x$ .

Γιατί;

**1.11 Κατασκευή  $h$ -κύκλου με δοθέν  $h$ -κέντρο  $K'$  και ο οποίος να είναι ίσος με δοθέντα κύκλο  $h$ -κέντρου  $K$ .**

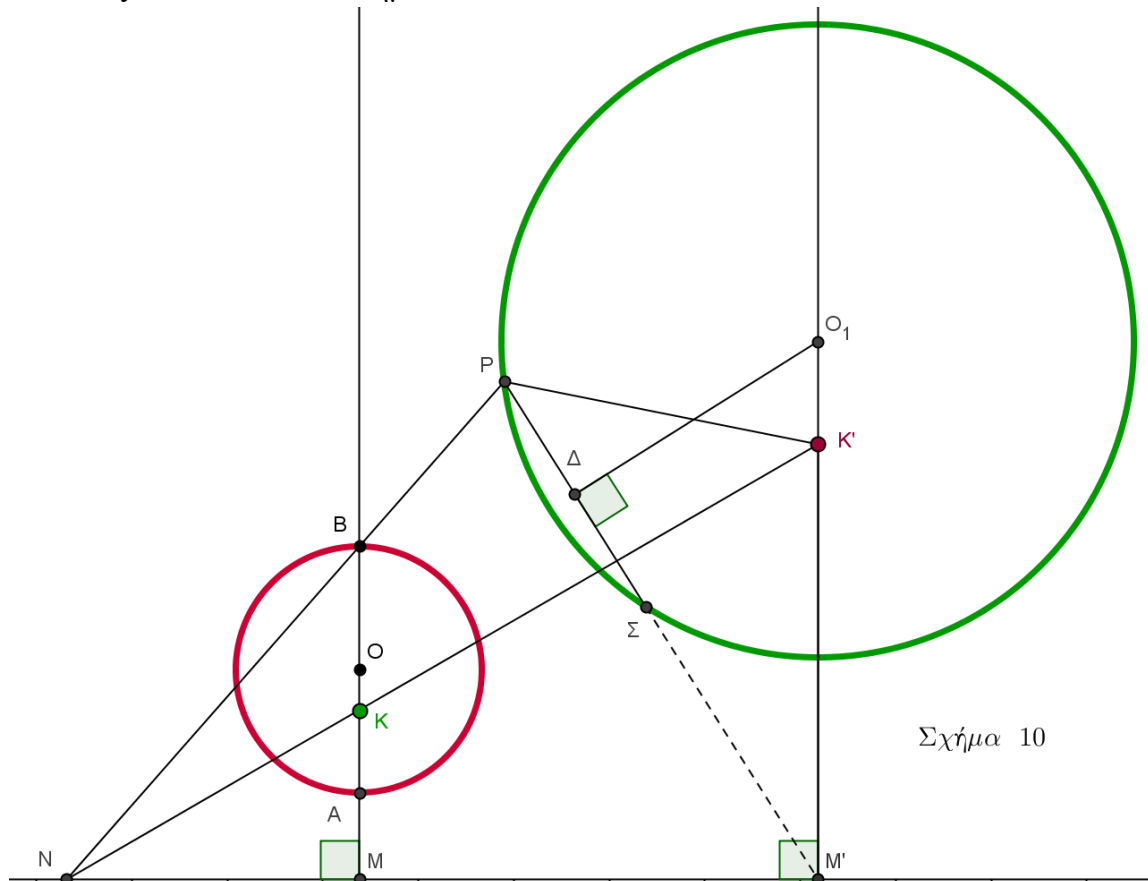
**Λύση:**

Έστω ότι μας δίνουν έναν  $h$ -κύκλο με  $h$ -κέντρο το δοθέν σημείο  $K$  και ένα σημείο  $K'$  στο υπερβολικό επίπεδο. Ζητούμε να κατασκευάσουμε έναν κύκλο ίσο με τον πρώτο και ο οποίος να έχει  $h$ -κέντρο το σημείο  $K'$ .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν  $KK' // x'x$  τότε το πρόβλημα είναι απλό και λύνεται με παράλληλη μεταφορά.

(β) Στη γενική περίπτωση (Σχ.10) θεωρούμε ότι η  $KK'$  τέμνει τον άξονα των  $x$  σε ένα σημείο  $N$ .



Έστω δηλαδή:  $N = KK' \cap x'x$ . Από το κέντρο  $K$  φέρουμε την  $KM$  κάθετη στον άξονα των  $x'x$  η οποία τέμνει τον δοθέντα κύκλο στο σημείο  $B$ . Επί της ημιευθείας  $NB$  ορίζουμε ένα σημείο  $P$  τέτοιο ώστε:

$$NB \cdot NP = NK \cdot NK' \quad (1)$$

Από το κέντρο  $K'$  φέρουμε επίσης την  $K'M'$  κάθετη προς τον άξονα των  $x'x$ . Επί της  $M'P$  ορίζουμε το σημείο  $\Sigma$  τέτοιο ώστε:

$$M'\Sigma \cdot M'P = (M'K')^2 \quad (2)$$

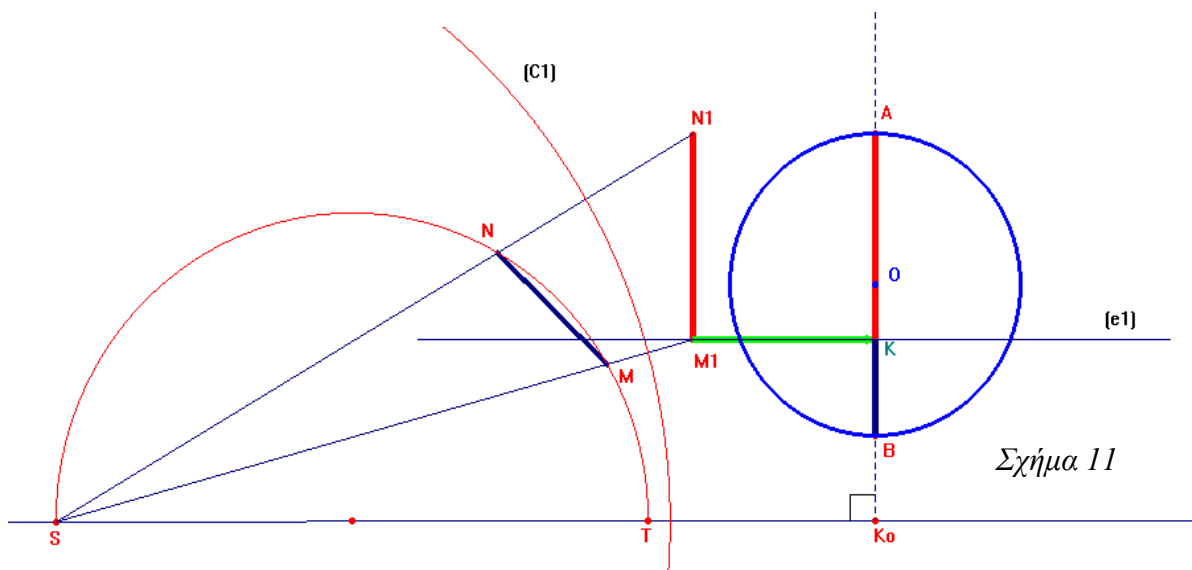
Η μεσοκάθετος της  $P\Sigma$  ορίζει επί της  $K'M'$  το σημείο  $O_1$  το οποίο είναι το ευκλείδειο κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

**Παρατήρηση:**

Δύο  $h$ -κύκλοι με ίσες ευκλείδειες ακτίνες δε σημαίνει ότι είναι ίσοι. Θα πρέπει να έχουν ίσες τις  $h$ - ακτίνες. Δηλαδή οι κύκλοι αυτοί να προκύπτουν από το μετασχηματισμό της αντιστροφής.

**1.12 Κατασκευή  $h$ -κύκλου με δοθέν  $h$ -κέντρο το  $K$  και δοθείσα  $h$  – ακτίνα.****Λύση**

Έστω ένα σταθερό σημείο  $K$  και ένα  $h$ -τμήμα το  $MN$ . (Σχ.11)



Σχήμα 11

Θεωρούμε την αντιστροφή με κέντρο το σημείο  $S$  και με δύναμη  $k$  τέτοια ώστε:

$$k^2 = SM \cdot SM_1$$

όπου  $M_1$  το σημείο τομής της  $SM$  με την παράλληλη ( $e_1$ ) η οποία άγεται από το σταθερό σημείο  $K$  προς τον  $x'x$ .

Σύμφωνα με την αντιστροφή αυτή ισχύει:

$$h - MN = h - M_1N_1$$

Στη συνέχεια κάνουμε μια παράλληλη μεταφορά του τμήματος  $h - M_1N_1$  κατά το διάνυσμα  $\overline{M_1K}$  που είναι παράλληλο προς τον άξονα  $x'x$  δημιουργούμε το τμήμα  $KA$  για το οποίο ισχύει:

$$h - KA = h - MN \quad (1).$$

Όμοια θεωρώντας παρόμοια αντιστροφή με κέντρο το σημείο  $T$

δημιουργούμε το τμήμα  $KB$  για το οποίο ισχύει:

$$h - KB = h - MN \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$h - KA = h - KB$$

Τελικά ο ζητούμενος κύκλος έχει ευκλείδειο κέντρο το μέσον του τμήματος  $AB$ .

Παρατήρηση:

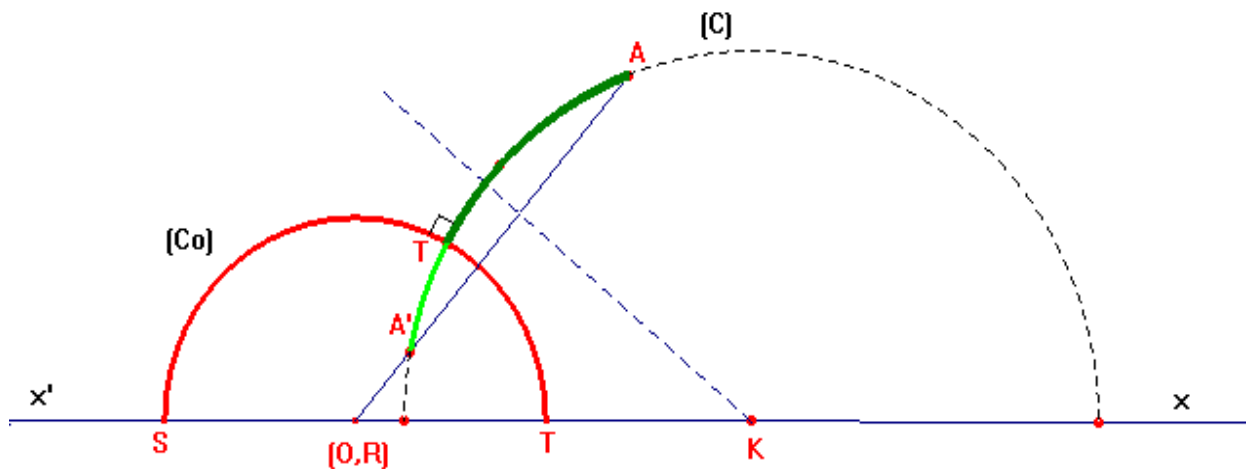
Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη δεύτερη αντιστροφή και να βρούμε το σημείο  $B$  από τη γνωστή σχέση:

$$(K_O K)^2 = (KA)(KB)$$

### 1.13 Απόσταση σημείου $A$ από $h$ -ευθεία

#### Κατασκευή

Θεωρούμε ότι η δοθείσα  $h$ -ευθεία είναι το ημικύκλιο  $(C_O)$  διαμέτρου  $ST$  και ότι το σημείο  $A$  είναι εκτός αυτού (Σχ.12). Θεωρούμε



Σχήμα 12

το σημείο  $A'$  το οποίο είναι αντίστροφο του σημείου  $A$  ως προς κύκλο αντιστροφής τον  $(C_O)$ . Αυτό σημαίνει:

$$(OA)(OA') = R^2$$

Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο στο τμήμα  $AA'$  η οποία τέμνει τον άξονα των  $x'x$  στο σημείο  $K$ .

Με τον τρόπο αυτό ορίστηκε η  $h$ -ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A, A'$  και η οποία είναι κάθετη στην δοθείσα  $h$ -ευθεία και η οποία ορίζεται από το ημικύκλιο  $(C)$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $KA$ .

Το τόξο  $AT$  που ανήκει στον  $(C)$  είναι η  $h$ -απόσταση του σημείου  $A$  από την  $h$ -ευθεία  $(C_0)$ .

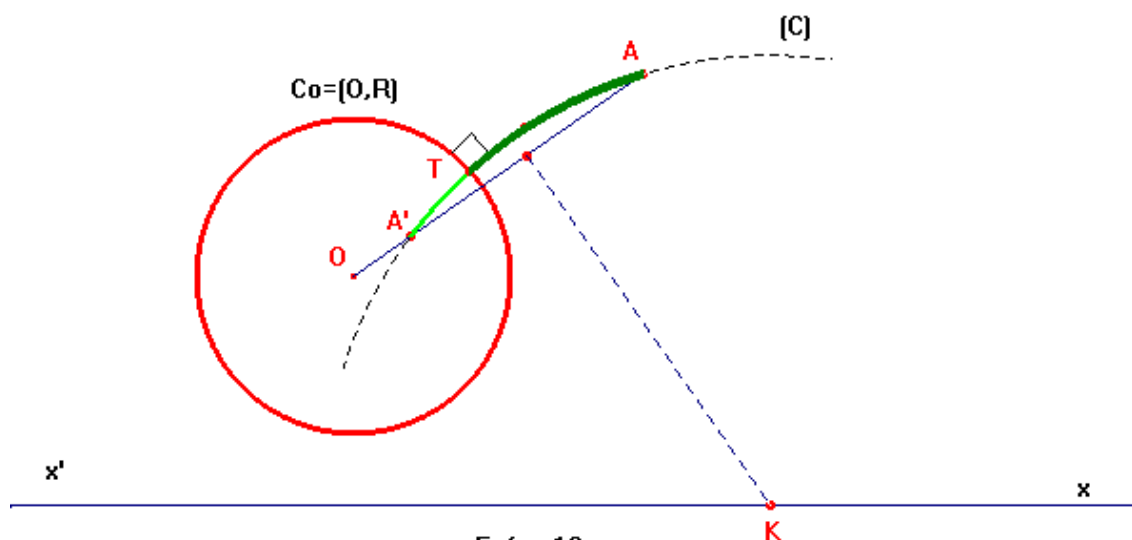
Όμοια εργαζόμαστε και για τις διάφορες άλλες θέσεις του σημείου  $A$  ως προς τον  $(C_0)$ .

#### 1.14 Απόσταση σημείου $A$ από $h$ -κύκλο

##### Κατασκευή

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς και στην προηγούμενη περίπτωση στο σχήμα 13.

Όμοια το τόξο  $AT$  που ανήκει στον  $(C)$  είναι η  $h$ -απόσταση του σημείου  $A$  από τον  $h$ -κύκλο  $(C_0)$ .

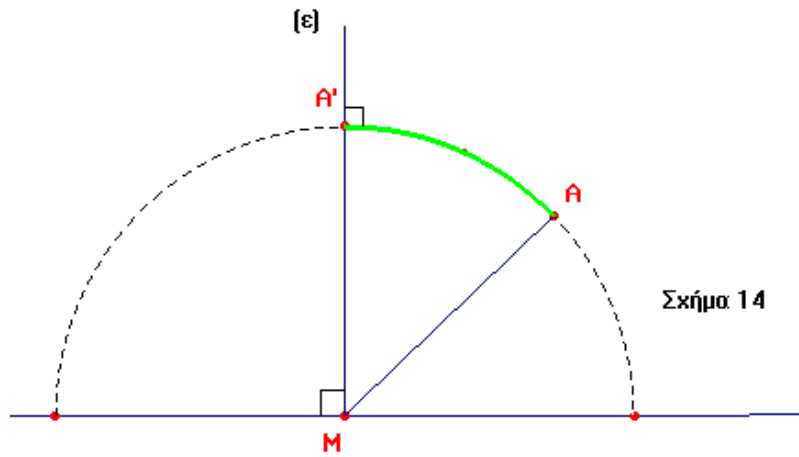


Σχήμα 13

#### 1.15 Απόσταση σημείου $A$ από $h$ -ευθεία κάθετη στον $x'x$

##### Κατασκευή:

Στην περίπτωση αυτή η δοθείσα  $h$ -ευθεία είναι η  $(\varepsilon)$  η οποία είναι κάθετη στον άξονα των  $x'x$  στο σημείο  $M$  αυτού. Ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $M$  και με ακτίνα την  $MA$  ορίζει μια  $h$ -ευθεία κάθετη προς την δοθείσα  $h$ -ευθεία που δηλώνει η  $(\varepsilon)$ .

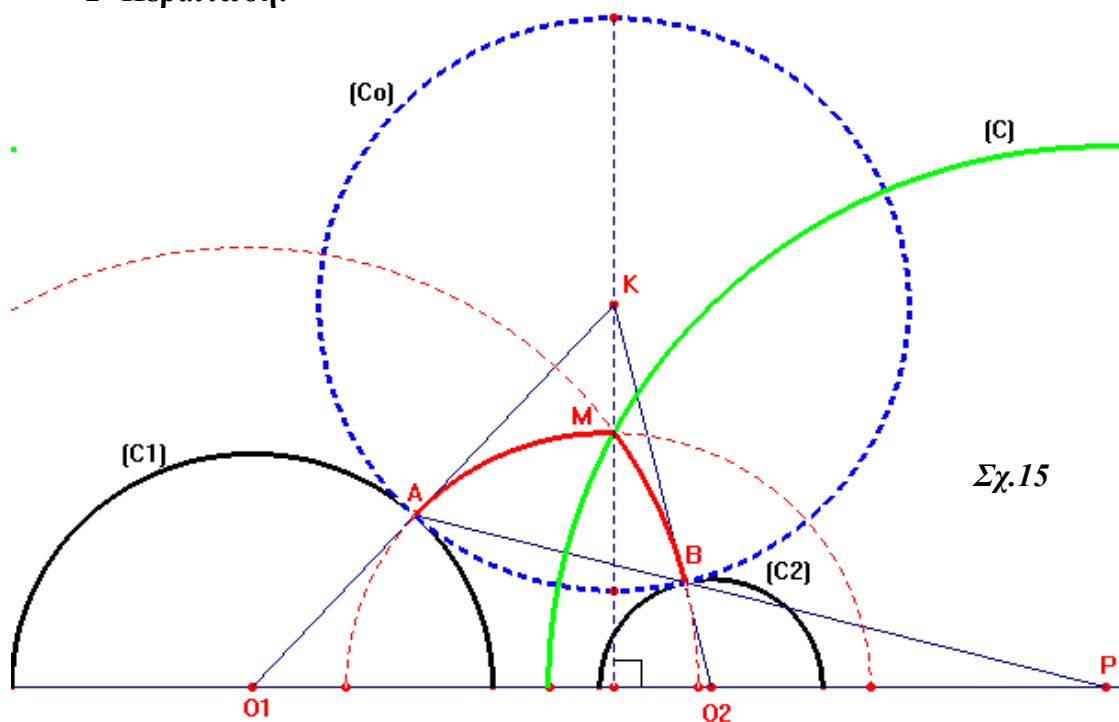


Σχήμα 14

Το τόξο  $AA'$  που ανήκει στην  $h$ -ευθεία των  $A, A'$  είναι η  $h$ -απόσταση του σημείου  $A$  από τη δοθείσα  $h$ -ευθεία.

### 1.16 Γεωμετρικός τόπος των σημείων $M$ που ισαπέχουν από δύο $h$ -ευθείες

#### 1<sup>η</sup> Περίπτωση:



Σχ.15

Έστω ότι οι δύο h-ευθείες είναι τα ημικύκλια  $(C_1)$  και  $(C_2)$  (Σχ.15).

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο  $M$  του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Τότε θα είναι:

$$h - MA = h - MB \quad (1)$$

όπου:

$$h - MA \perp (C_1) \quad \text{και} \quad h - MB \perp (C_2)$$

Ο κύκλος  $(C_0)$  έχει h-κέντρο το σημείο  $M$ , άρα οι ακτίνες  $O_1A$  και  $O_2B$  τέμνονται στο ευκλείδειο κέντρο  $K$  του h-κύκλου  $(C_0)$ . Όμως τα σημεία  $A, B$  είναι ομόλογα στην αντιστροφή με πόλο το κέντρο ομοιότητας των  $(C_1)$  και  $(C_2)$ .

Επειδή εξάλλου είναι:

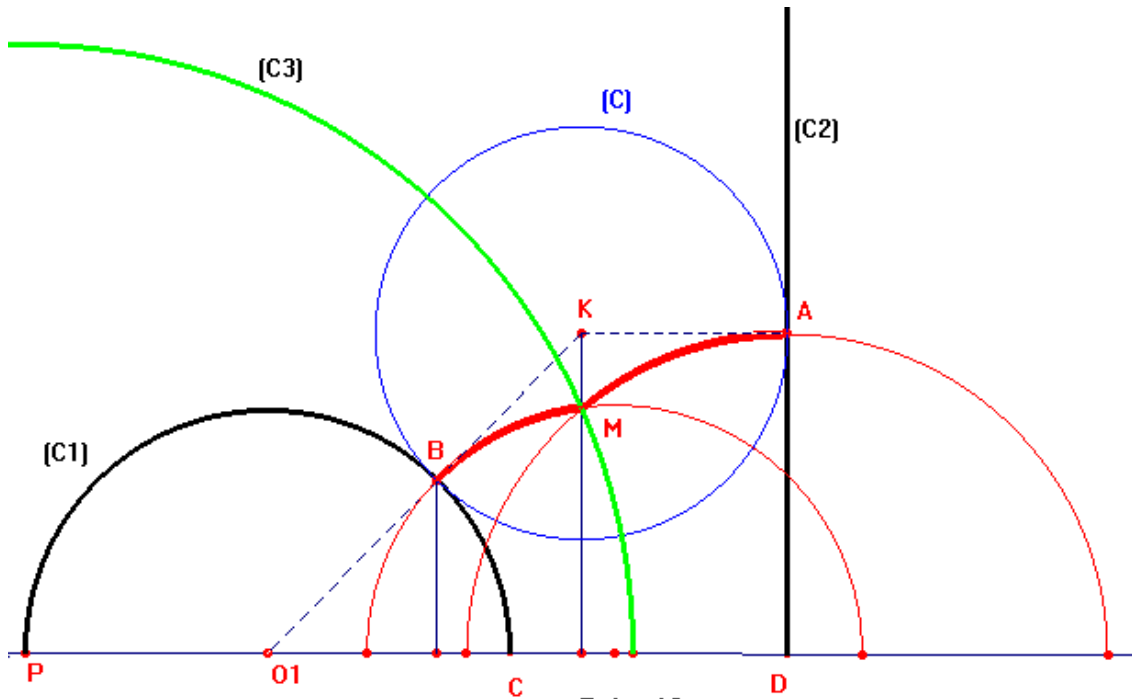
$$(PM)^2 = (PA)(PB)$$

το σημείο  $M$  βρίσκεται στον κύκλο:

$$(C) = (P, \sqrt{(PA)(PB)})$$

**2<sup>η</sup> περίπτωση:**

Έστω ότι οι δύο h-ευθείες είναι το ημικύκλιο  $(C_1)$  και η κάθετη



Σχήμα 16



προς τον άξονα των  $x'x$  ευθεία ( $C_2$ ) (Σχ. 16)

Στην περίπτωση αυτή επειδή πάλι:

$$h - MA = h - MB$$

τα σημεία  $A, B$  θα είναι αντίστροφα με πόλο το σημείο  $P$  και δύναμη ίση με :

$$PM^2 = (PA)(PB)$$

Επομένως το σημείο  $M$  ανήκει στον κύκλο  $(P, \sqrt{(PC)(PD)})$  ο οποίος είναι και ο  $\gamma$ . τόπος του σημείου αυτού.

### 1.17 Θεώρημα:

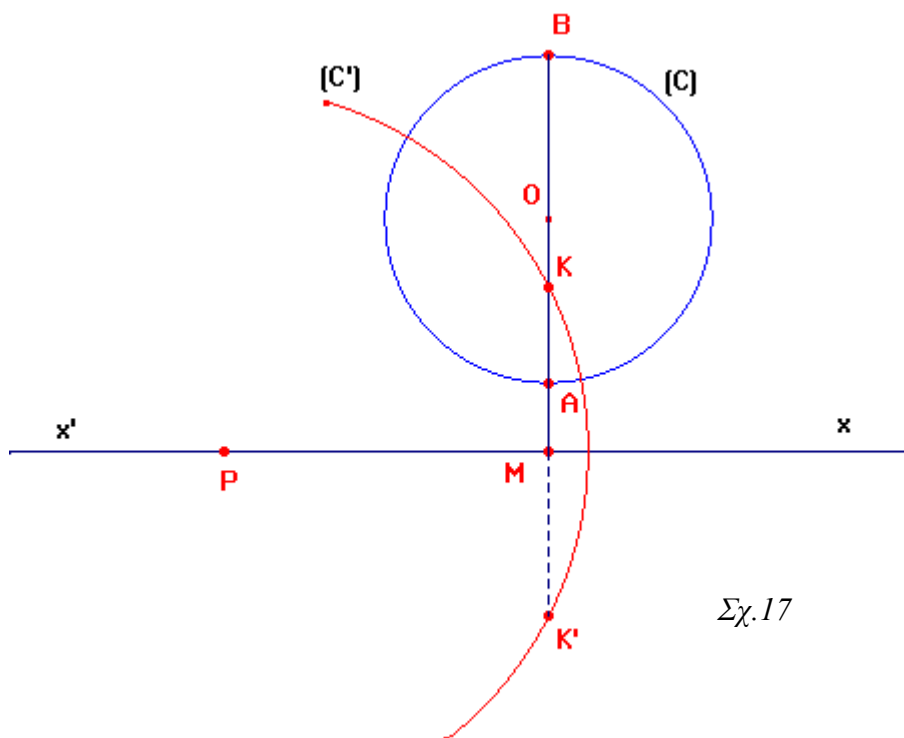
Έστω κύκλος  $C = (O, R)$  στο  $h$  - επίπεδο και  $K$  το  $h$  - κέντρο του. Αν  $P$  τυχόν σημείο του άξονα  $x'x$  και  $D_{(O,R)}(P) = \lambda^2$  η δύναμη του  $P$  ως προς τον  $C = (O, R)$  τότε η αντιστροφή  $J_P(C)$  του  $C = (O, R)$  ως προς το  $P$  με δύναμη αντιστροφής το  $\lambda^2$  έχει διπλό σημείο το  $K$ , το αφήνει δηλαδή αμετάβλητο.

**Απόδειξη**

Είναι γνωστό ότι το  $h$  - κέντρο του κύκλου  $C = (O, R)$  ορίζεται από τη σχέση:

$$MK^2 = (MA)(MB)$$

Είναι επίσης φανερό ότι η τετράδα των σημείων  $(B, A, K, K')$  είναι αρμονική και συνεπώς ο κύκλος  $(C')$  με κέντρο το σημείο  $P$  και ο οποίος



Σχ.17

διέρχεται από τα σημεία  $K, K'$  τέμνει όρθογώνια τον  $(C)$ .

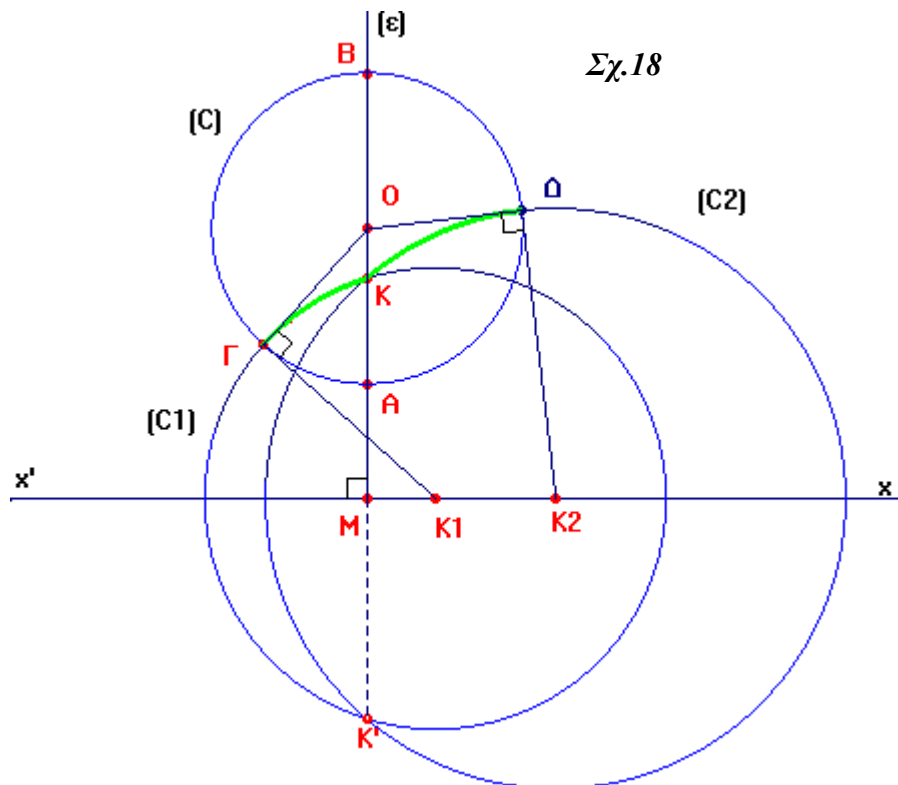
Κατά την ανωτέρω αντιστροφή επειδή ο κύκλος  $(C)$  τέμνει όρθογώνια τον κύκλο αντιστροφής  $(C')$  η εικόνα κάθε σημείου του κύκλου  $(C)$  θα ανήκει πάνω στον  $(C)$ , δηλαδή η αντιστροφή αυτή τον αφήνει αναλλοίωτο. Αναλλοίωτο επίσης αφήνει και το  $h$  – κέντρο του κύκλου αυτού, δηλαδή το  $K$  μιας και όλα τα σημεία του κύκλου αντιστροφής έχουν ως εικόνα τον εαυτό τους.

### 1.18 Θεώρημα

Δίνεται ένας  $h$  – κύκλος  $(C)$  με ευκλείδειο κέντρο το σημείο  $O$  και  $h$  – κέντρο το σημείο  $K$ . Αν θεωρήσουμε δύο τυχαίες  $h$  – ακτίνες αυτού του κύκλου τις  $K\Gamma, K\Delta$ , τότε οι ευκλείδειες ακτίνες  $O\Gamma, O\Delta$  είναι εφαπτόμενες αντίστοιχα στις  $h$  – ακτίνες  $K\Gamma, K\Delta$ .

**Απόδειξη**

Όπως φαίνεται από το σχήμα 18, ο κύκλοι  $(C_1), (C_2)$  οι οποίοι έχουν κέντρα πάνω στην ευθεία  $x'x$  και διέρχονται από τα σημεία



$K, K'$  (Σημεία βάσεως) είναι ορθογώνιοι με τον κύκλο  $(C)$ .

Επομένως θα είναι  $OG \perp K_1\Gamma$  το οποίο σημαίνει ότι η ευκλείδειος  $OG$  είναι εφαπτομένη της  $h$  – ακτίνας  $K\Gamma$ .

Όμοια η  $OD \perp K_2\Delta$  από το οποίο προκύπτει ότι η ευκλείδειος  $OD$  είναι εφαπτομένη της  $h$  – ακτίνας  $K\Delta$ .  
Επομένως το θεώρημα είναι αληθές.

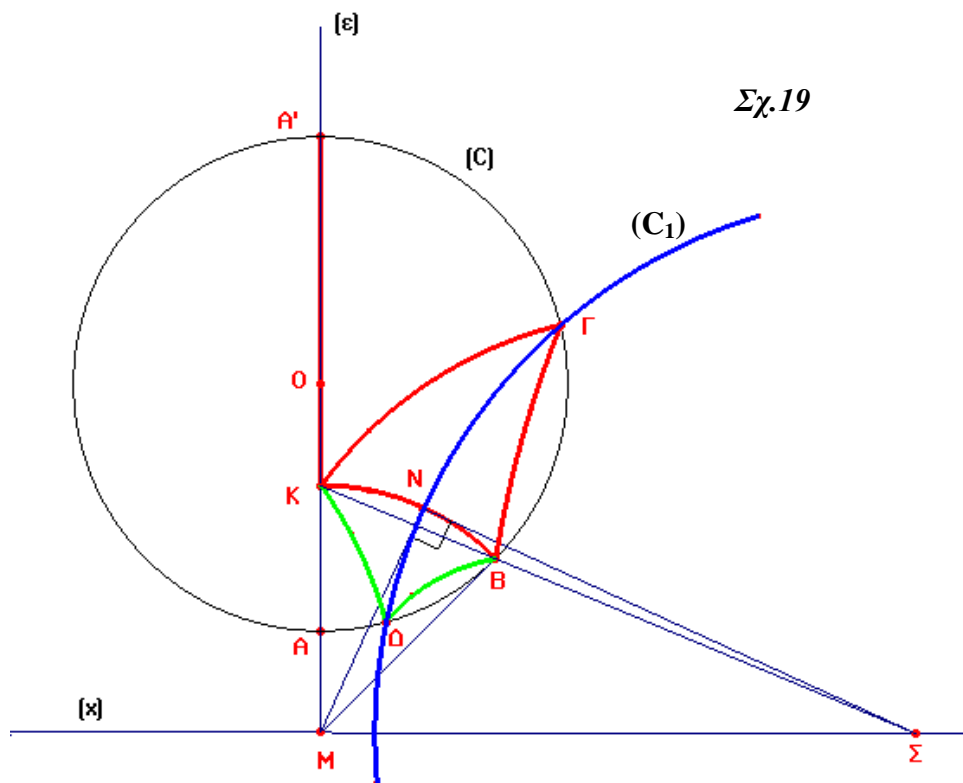
### 1.19 Κατασκευή ισοπλεύρου $h$ – τριγώνου με δοθείσα πλευρά $a$

**Λύση:**

Στην παράγραφο 1.7 παρουσιάστηκε μια τέτοια κατασκευή. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί και ένας δεύτερος τρόπος που γίνεται με τη χρήση της  $h$  – μεσοκαθέτου.

**Κατασκευή:**

Στο σχήμα 19 κατασκευάστηκε κατά τα γνωστά ένας  $h$  – κύκλος  $(C)$



με ακτίνα ίση με  $a$ , ο οποίος έχει ως  $h$  – κέντρο το σημείο  $K$  και ως ευκλείδειο κέντρο το σημείο  $O$ . Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο αυτού  $B$  και την  $h$  – ακτίνα του  $KB$ .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την  $h$  – μεσοκάθετη ( $C_1$ ) του  $h$  –  $KB$  σύμφωνα με την παράγραφο 1.5 η οποία τέμνει τον  $(C)$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ .

Φέροντας στη συνέχεια τις  $h$ - $K\Gamma$ ,  $h$ - $B\Gamma$  έχουμε το  $h$  – τρίγωνο  $KB\Gamma$  το οποίο είναι ισόπλευρο με πλευρά το δοθέν τμήμα.

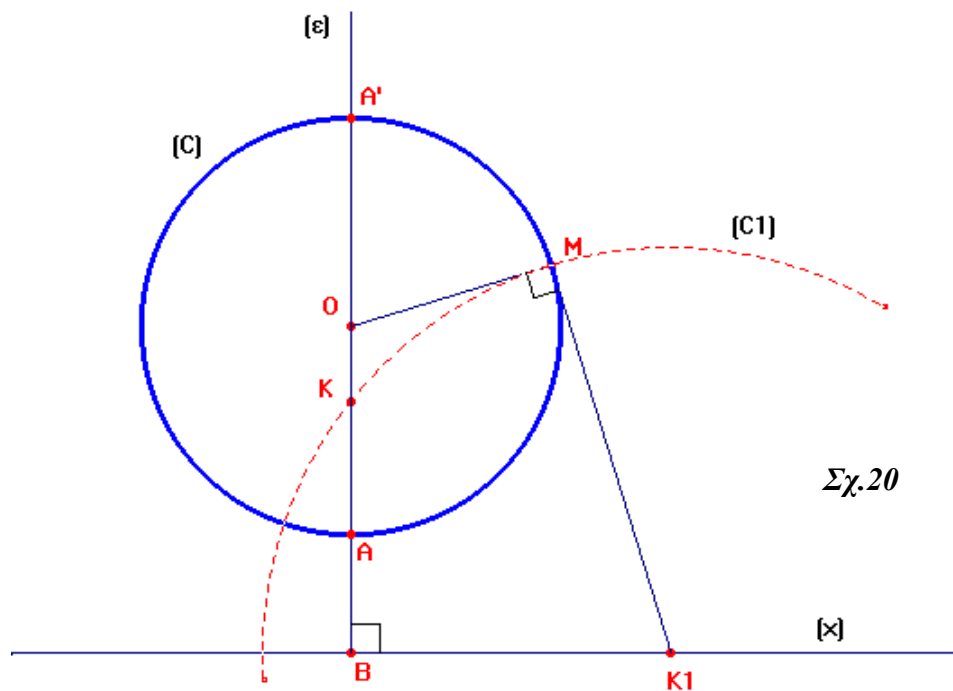
Το σημείο  $\Delta$  δημιουργεί ένα δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο που είναι το  $KB\Delta$ .

Όπως φαίνεται από τα ανωτέρω έχουμε απειρία λύσεων αφού το σημείο  $B$  θεωρήθηκε ως τυχαίο πάνω στον  $h$  – κύκλο  $(C)$ .

### 1.20 Κατασκευή $h$ – κύκλου με δοσμένο $h$ – κέντρο $K$ και ο οποίος να διέρχεται από δοσμένο σημείο $M$ .

**Λύση**

Έστω ότι μας δίνεται το σημείο το σημείο  $K$  (Σχ.20) το οποίο θα



Σχ.20

είναι το  $h$  – κέντρο του ζητούμενου κύκλου καθώς και το σημείο  $M$  από το οποίο θα διέρχεται ο κύκλος αυτός.

**Κατασκευή**

Αρκεί να βρεθεί το ευκλείδειο κέντρο του κύκλου αυτού. Φέρουμε τη μεσοκάθετη στο τμήμα  $KM$  η οποία ορίζει στον άξονα των  $(x)$  το σημείο  $K_1$ . Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο  $(C_1)$  με κέντρο το σημείο  $K_1$  και ακτίνα το γνωστό σημείο  $M$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.18 η εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο σημείο  $M$  θα διέρχεται από το ευκλείδειο κέντρο  $O$ .

Έτσι λοιπόν κατασκευάζοντας αυτήν την εφαπτομένη πετυχαίνουμε τη χάραξη του σημείου  $O$ . Τελικά ο ζητούμενος κύκλος είναι  $(C)$ .

### 1.21 Θεώρημα

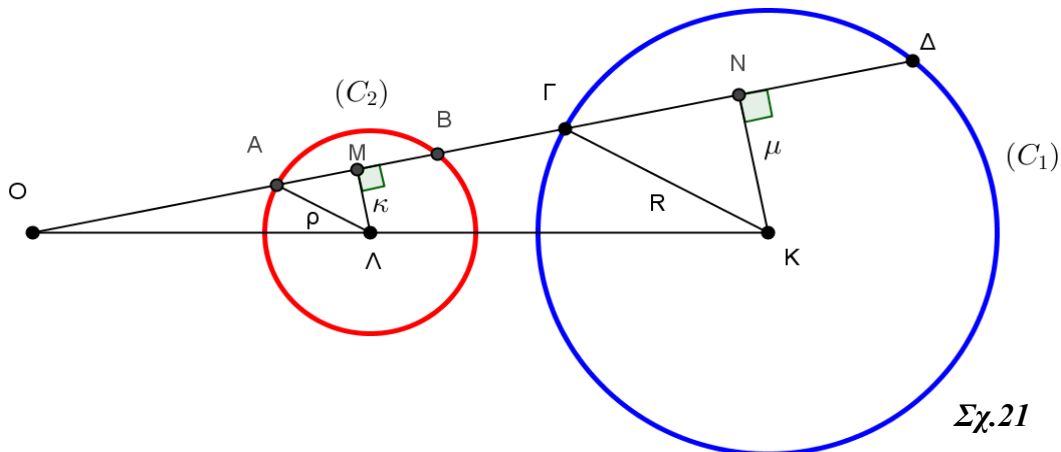
Το αντίστροφο ενός κύκλου  $(K,R)$  με πόλο ένα σημείο  $O$  και δύναμη ίση με  $p$  είναι το ομοιόθετο του κύκλου αυτού  $(K,R)$  με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο  $O$  και λόγο ίσο με:

$$\lambda = \frac{p}{D_{(K,R)}(O)}$$

όπου  $D_{(K,R)}(O)$  είναι η δύναμη του σημείου  $O$  ως προς τον κύκλο  $(K,R)$ .

#### Απόδειξη

Έστω στο σχήμα 21 έχουμε δύο κύκλους τους  $(C_1)$  και  $(C_2)$  οι οποίοι



είναι ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο  $O$  και με λόγο:

$$\lambda = \frac{p}{R} \quad (1).$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο  $\Delta$  του  $(C_1)$  και η  $OABGD$  μια τυχαία τέμνουσα των κύκλων αυτών που διέρχεται από το σημείο  $O$ .

Θα δείξουμε ότι ο κύκλος  $(C_2)$  είναι η αντίστροφη εικόνα του  $(C_1)$  με κέντρο αντιστροφής το σημείο  $O$  και δύναμη ίση με:

$$p = \lambda D_{(K,R)}(O)$$

Πράγματι είναι:

$$\begin{aligned} (OA)(O\Delta) &= (OM - AM)(ON + N\Delta) = \\ &= \left( \sqrt{(O\Lambda)^2 - \kappa^2} - \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} \right) \left( \sqrt{(OK)^2 - \mu^2} + \sqrt{R^2 - \mu^2} \right) \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$(OA)(O\Delta) = \left( \sqrt{(O\Lambda)^2 - \kappa^2} - \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} \right) \left( \sqrt{(OK)^2 - \mu^2} + \sqrt{R^2 - \mu^2} \right) \quad (2)$$

Όμως είναι ακόμα:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{O\Lambda}{OK} \Rightarrow (O\Lambda) = \lambda(OK) \\ \frac{\kappa}{\mu} &= \lambda \Rightarrow \kappa = \lambda\mu \end{aligned} \right\} (3)$$

Η σχέση (2) σύμφωνα με την (3) γίνεται μετά από πράξεις:

$$(OA)(O\Delta) = \lambda \left( (O\Lambda)^2 - R^2 \right)$$

και συνεπώς:

$$p = \lambda D_{(K,R)}(O)$$

Επομένως κατά την αντιστροφή αυτή η εικόνα του τυχόντος σημείου  $\Delta$  του κύκλου  $(C_1)$  είναι το σημείο  $A$ .

Παρατήρηση:

Από το ανωτέρω θεώρημα γίνεται αντιληπτό ότι η ομοιοθεσία καθώς και η αντιστροφή διατηρούν τον  $h$  – κύκλο. Τον  $h$  – κύκλο διατηρεί και η παράλληλος μεταφορά όταν αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα των  $x$ . Όμως η στροφή δεν τον διατηρεί.

### 1.22 Κατασκευή του συμμετρικού ενός σημείου $A$ ως προς μια $h$ – ευθεία $C(O,R)$

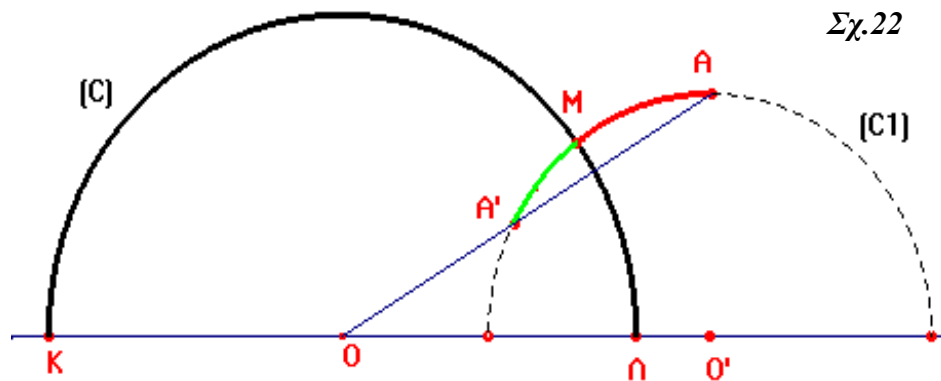
**Λύση:**

Στο σχήμα 22 έχουμε μια  $h$  – ευθεία η οποία ορίζεται από τον  $(C)$  και ένα σημείο στο  $h$  – επίπεδο. Θεωρούμε την περίπτωση το σημείο να είναι εκτός του  $(C)$ .

Αν λάβουμε το αντίστροφο  $A'$  του  $A$  ως προς κύκλο αντιστροφής τον  $(C)$  τότε το σημείο αυτό θα είναι το ζητούμενο συμμετρικό.

Αυτό συμβαίνει διότι αν φέρουμε την  $h$  – κάθετη από το σημείο  $A$  προς την  $h$  – ευθεία  $C$ , η οποία θα ορίζεται από τον  $(C_1)$  που είναι

ορθογώνιος προς τον (C), θα είναι:



$$h - MA = h - A'M \quad (1)$$

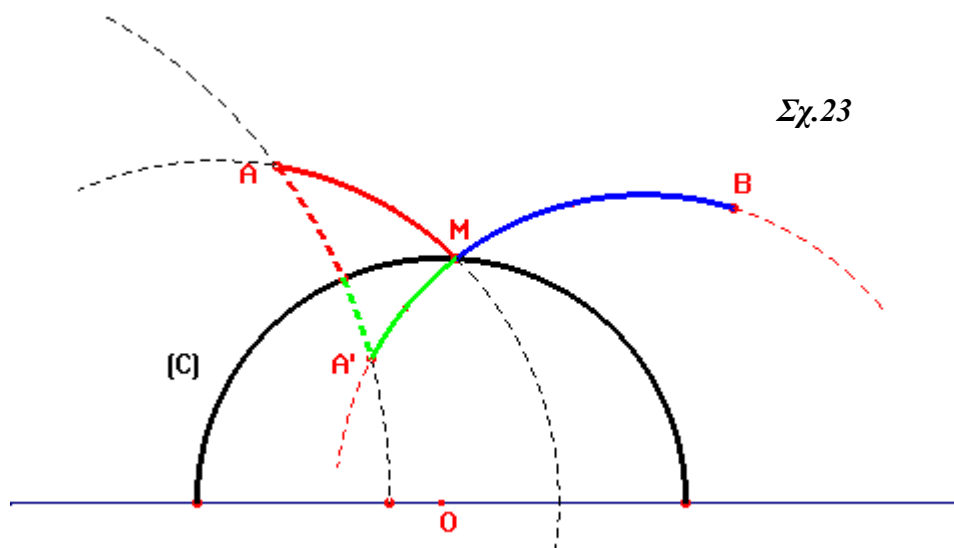
γιατί το τμήμα MA είναι αντίστροφο του A'M ως προς την αντιστροφή που ορίζεται από τον κύκλο (C).

**1.23** Δίνονται δύο σημεία στο  $h$  - επίπεδο και προς το αυτό μέρος μιας  $h$  - ευθείας (C). Ζητούμε να βρούμε σημείο M πάνω στην  $h$  - ευθεία τέτοιο ώστε:

$$h - AM + h - MB = \min$$

**Λύση:**

Θεωρούμε το συμμετρικό A' του σημείου A ως προς την  $h$  - ευθεία (C) σύμφωνα με την παράγραφο 1.22. (Σχ.23)



Το σημείο αυτό μαζί με το σημείο B ανήκουν σε μια  $h$  – ευθεία την  $h - A'B$  η οποία τέμνει την  $h - C$  στο σημείο M. Τότε θα είναι:

$$h - AM = h - A'M$$

Άρα:

$$h - AM + h - MB = h - A'M + h - MB = h - A'MB$$

δηλαδή:

$$h - AM + h - MB = h - A'MB$$

όμως η απόσταση  $h - A'MB$  είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων A' και B διότι τα τρία σημεία A', M, B ανήκουν στην ίδια  $h$ -ευθεία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί σύμφωνα με την πρόταση 1.4 και να φανεί ότι σε ένα  $h$  – τρίγωνο ABΓ ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

#### 1.24 Κατασκευή ισοσκελούς $h$ – ορθογωνίου τριγώνου.

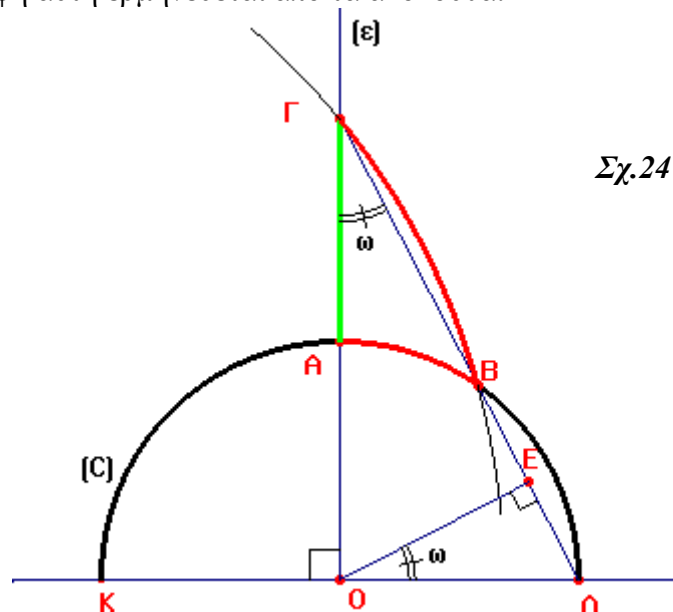
**Λύση:**

Θεωρούμε μια  $h$  – ευθεία (C) στο υπερβολικό επίπεδο. Φέρουμε την ημιευθεία (Oε) κάθετο προς τον άξονα (x), όπως φαίνεται στο σχήμα 24 και πάνω σ' αυτή θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Γ.

Στη συνέχεια ενώνουμε το Γ με το σημείο Δ και η τομή της ΓΔ με τον (C) την ονομάζουμε B. Το υπερβολικό τρίγωνο ABΓ είναι ένα ορθογώνιο και ισοσκελές. Πράγματι:

- ✓ Είναι ορθογώνιο διότι  $AG \perp (C)$  δηλαδή  $AG \perp AB$ .
- ✓ Είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο A διότι το τόξο AB και το τμήμα AG είναι ίσα καθώς το ένα προκύπτει από άλλο μέσω της αντιστροφής με κέντρο το σημείο Δ και δύναμη  $2R^2$ .

Η αντιστροφή αυτή ερμηνεύεται από τα ακόλουθα:





Είναι:

$$(\Delta B)(\Delta \Gamma) = 2(\Delta E)(\Delta \Gamma) = 2(\text{Ο}\Delta)^2 = 2R^2$$

δηλαδή:

$$(\Delta B)(\Delta \Gamma) = 2R^2$$

Όμως:

$$(\Delta A)^2 = 2R^2$$

Άρα το  $\Gamma$  είναι το αντίστροφο του  $B$  και το  $A$  αντίστροφο του εαυτού του. Όμως και κάθε σημείο της  $AB$  έχει αντίστροφο επί του τμήματος  $A\Gamma$ .

Στο ορθογώνιο αυτό τρίγωνο ισχύουν ακόμα:

$$h - A\Gamma = \ln(A\Gamma\text{Ο}\infty) = \ln \frac{\text{ΑΟ}/\Gamma\text{Ο}}{\text{Α}\infty/\Gamma\infty} = \ln \frac{\text{ΑΟ}}{\Gamma\text{Ο}} = \ln \frac{\text{Ο}\Delta}{\text{Ο}\Gamma} = \ln(\tan \Gamma)$$

Αν θέσουμε  $\beta = h - A\Gamma$  τότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$\beta = \ln(\tan \Gamma)$$

δηλαδή:

$$e^\beta = \tan \Gamma \text{ και } e^{-\beta} = \cot \Gamma$$

Επομένως το υπερβολικό συνημίτονο της γωνίας  $\Gamma$  είναι:

$$\cosh \beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = \frac{\tan \Gamma + \cot \Gamma}{2}$$

και μετά από πράξεις γίνεται τελικά:

$$\cosh \beta = \frac{1}{\sin(2\Gamma)} \quad (1)$$

Ακόμα ο τύπος (1) δίνει:

$$\cosh \beta = \frac{1}{\sin(\text{ΒΟ}\Delta)} = \frac{1}{\cos(\text{ΑΟΒ})} \quad (2)$$

**Παρατήρηση:**

<sup>1)</sup> Η ανωτέρω κατασκευή και η ισχύς των τύπων (1) και (2) αφορούν το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στη θέση στην οποία έχει

κατασκευαστεί.

2<sup>η</sup>) Ως εφαρμογή του τύπου (2) αναφέρουμε τη σχέση που ισχύει στο κατωτέρω σχήμα 25.

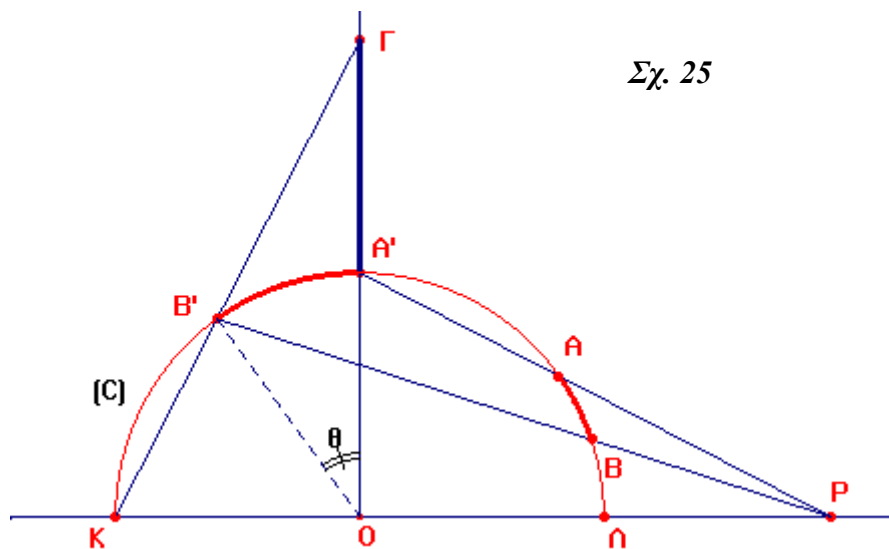
Αν θεωρήσουμε από ένα σημείο P του άξονα (x) τις τέμνουσες την υπερβολική ευθεία  $h - C$ , PAA' και PBB' τότε παρατηρούμε ότι το τρίγωνο A'B'Γ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κορυφή το σημείο A'.

(Πρόταση 1.24).

$$h - AB = h - A'B' = h - A'Γ = a$$

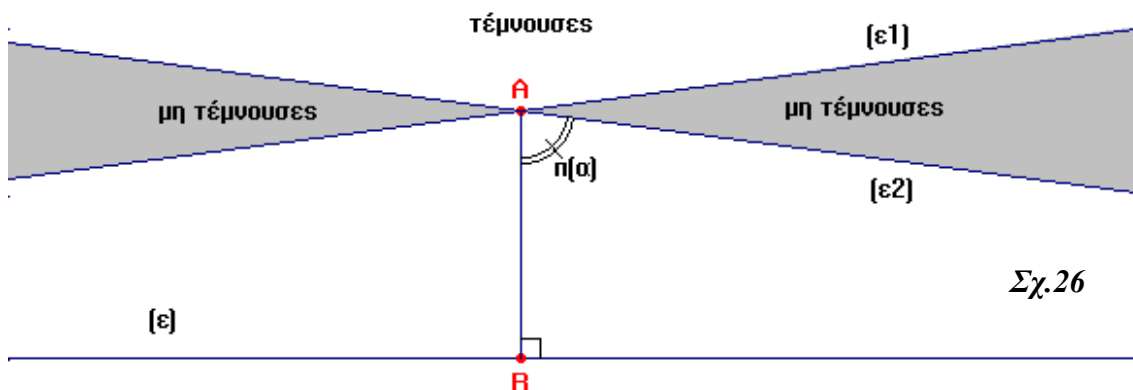
τότε σύμφωνα με τον τύπο (2) θα είναι:

$$\cosh a = \frac{1}{\cos \theta}$$



### 1.25 Γωνία παραλληλισμού.

Γενικότερα στην υπερβολική γεωμετρία αν μας δοθεί μια ευθεία (ε)



και ένα σημείο  $A$  εκτός αυτής τότε όλες οι ευθείες που άγονται από το σημείο  $A$  μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα συμπεριλαμβάνει εκείνες που τέμνουν την  $(\varepsilon)$  δηλαδή τις τέμνουσες την  $(\varepsilon)$  και η δεύτερη εκείνες που δεν τέμνουν την  $(\varepsilon)$ , δηλαδή τις μη τέμνουσες την  $(\varepsilon)$ . Όπως φαίνεται στο σχήμα 26 τα δύο αυτά σύνολο χωρίζονται από τις  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  οι οποίες ονομάζονται και οριακές παράλληλες προς την  $(\varepsilon)$ , ενώ οι άλλες μη τέμνουσες ονομάζονται παράλληλες.

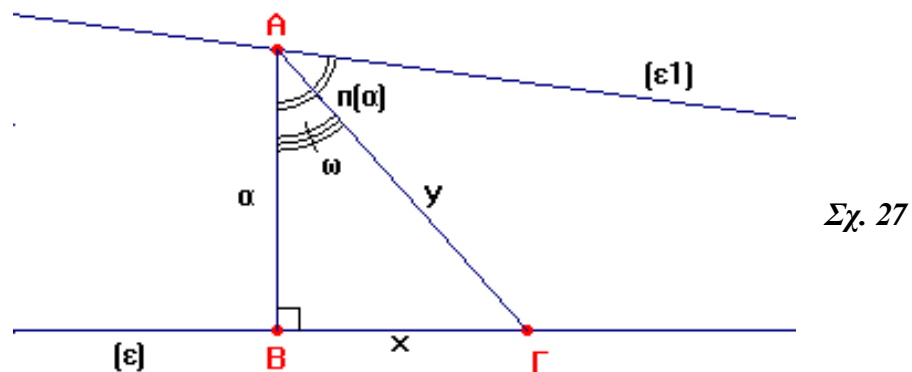
### Ορισμός:

Γωνία παραλληλισμού  $\pi(\alpha)$  του σημείου  $A$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$  ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την παράλληλη  $(\varepsilon_1)$  ή  $(\varepsilon_2)$  που άγεται από το σημείο  $A$  προς την  $(\varepsilon)$  και την κάθετη που άγεται από το σημείο  $A$  προς την  $(\varepsilon)$ .

Προφανώς στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η γωνία παραλληλισμού είναι ίση με  $90$  μοίρες.

### 1.26 Υπολογισμός της γωνίας παραλληλισμού

Έστω ένα σταθερό σημείο  $A$  εκτός μιας ευθείας  $(\varepsilon)$  στον υπερβολικό χώρο και  $(\varepsilon_1)$  μια παράλληλη προς την  $(\varepsilon)$ . Θεωρούμε ακόμα την απόσταση  $h - AB = a$  του σημείου  $A$  από την  $(\varepsilon)$  και ένα τυχαίο σημείο  $\Gamma$  επί της  $(\varepsilon)$



όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. (Σχ.27).

Ας υποθέσουμε τώρα τη μεταβολή εκείνη του σχήματος κατά την οποία η ποσότητα  $x$  τείνει στο άπειρο οπότε και η ποσότητα  $y$  τείνει κι αυτή στο άπειρο με την προϋπόθεση βέβαια ότι η ποσότητα  $a$  παραμένει σταθερή.

Τότε η γωνία  $\omega$  θα τείνει στη γωνία παραλληλισμού έστω την  $A = \pi(\alpha)$ . Θα είναι δηλαδή:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow A = \pi(\alpha)$$

Όμως (Εφαρμογή της Υ.Γ. στο μοντέλο Poincaré, σ.13, τύποι C):

$$\cos \omega = \frac{\tanh \alpha}{\tanh y} \quad (1)$$

Άρα:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (\tanh y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

Το όριο αυτό είναι της μορφής  $\frac{\infty}{\infty}$ , όμως με την εφαρμογή του κανόνα του De L' Hospital προκύπτει ότι:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (\tanh y) = 1$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\cos A = \tanh \alpha \quad (2)$$

Όμως η σχέση αυτή στη συνέχεια γίνεται:

$$\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = \tanh \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} = \tanh \alpha \Rightarrow$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \tanh \alpha}{1 + \tanh \alpha} \quad (3)$$

και επειδή:

$$\tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

Η προηγούμενη σχέση (3) γίνεται:

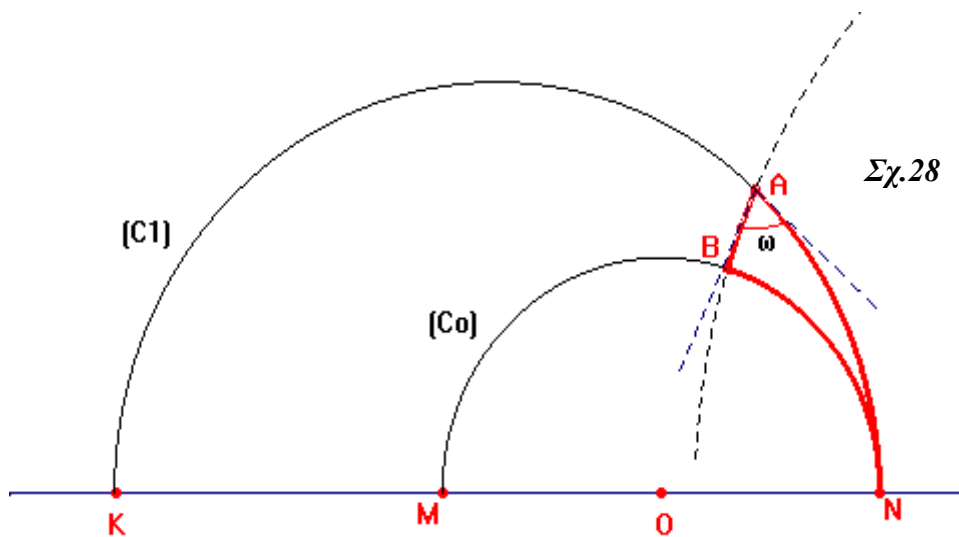
$$\tan \frac{A}{2} = e^{-\alpha}$$

και τελικά η γωνία παραλληλισμού είναι:

$$A = \pi(\alpha) = 2 \tan^{-1}(e^{-\alpha})$$

Σύμφωνα με το γενικό ορισμό 1.25, γωνία παραλληλισμού ενός σημείου A του h – επιπέδου, στο μοντέλο του Poincaré, ως προς την ευθεία

$h - C_0$ , είναι η γωνία που σχηματίζει η  $h - AB$  με την  $h - AN$ , όπου η  $h - AB$  είναι η κάθετη που άγεται από το σημείο  $A$  προς την  $h - C_0$  και  $h - AN$  ευθεία που είναι οριακά παράλληλη προς την  $h - C_0$ . (Σχ.28)



### 1.27 Θεώρημα

Η γωνία παραλληλισμού ενός σημείου  $A$  του  $h -$  επιπέδου ως προς την ευθεία  $h - C_0$  με άκρα  $M, N$  είναι ίση με το μισό της γωνίας των ευθειών  $h - C_1$  και  $h - C_2$  οι οποίες είναι οριακά προς άκρα  $M, N$  παράλληλες προς την  $h - C_0$ .

#### Απόδειξη

Αν θεωρήσουμε την κοινή εφαπτομένη  $\Gamma\Delta$  των  $h - (C_1)$  και  $h - (C_2)$ , (Σχ.29), τότε αυτή τέμνει τον άξονα των  $(x)$  στο σημείο  $P$  το οποίο είναι εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των δύο αυτών κύκλων καθώς και κέντρο αντιστροφής αυτών (Θεώρημα 1.21).

Τότε θα είναι:

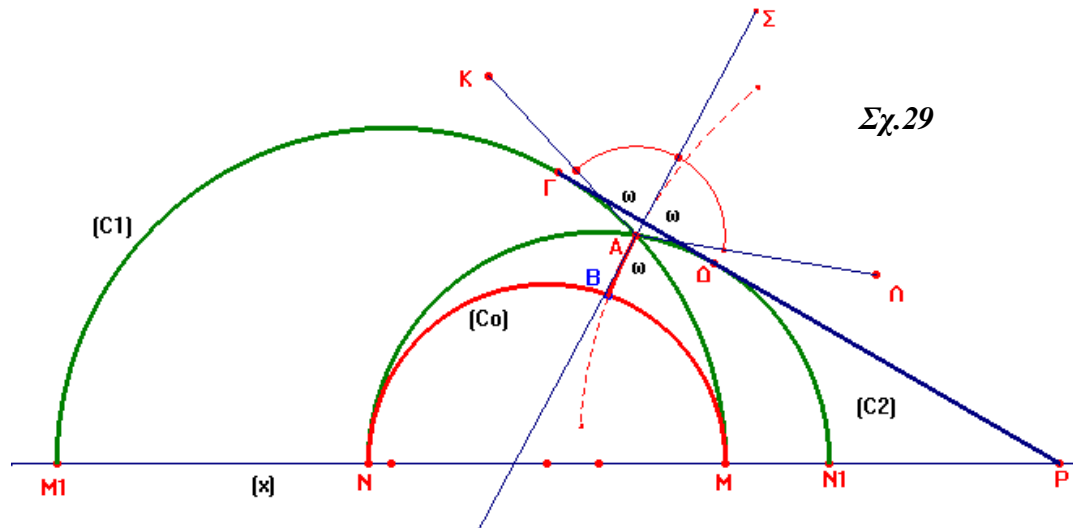
$$PA^2 = (P\Gamma)(P\Delta) = (PM)(PN) = PB^2$$

άρα:

$$h - AB \perp h - C_0$$

Επομένως το τρίγωνο  $h - ABM$  είναι ορθογώνιο στην κορυφή  $B$  και συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό 1.25 η γωνία παραλληλισμού της κορυφής  $A$  ως προς τον  $h - C_0$  είναι γωνία  $\omega$ , η οποία προφανώς, όπως φαίνεται κι

από το σχήμα 27, είναι το μισό της γωνίας των ευθειών  $h - C_1$  και  $h - C_2$ .



### Παρατηρήσεις:

1<sup>η</sup>) Η γωνία παραλληλισμού του σημείου A ως προς την ευθεία  $h - C_0$  μπορεί να θεωρηθεί και η γωνία A του  $h - ANB$  που σχηματίζεται από την άλλη παράλληλη  $h - C_1$  προς τον  $h - C_0$ . Όμως τα δύο αυτά  $h -$  τρίγωνα είναι μεταξύ των ίσα και συνεπώς η  $h - AB$  διχοτομεί τη γωνία των  $h - C_1$  και  $h - C_2$  στο σημείο A.

2<sup>η</sup>) Το τρίγωνο  $h - M_1AN_1$  είναι ισοσκελές και η  $h - AB$  είναι σ' αυτό διάμεσος, διχοτόμος και ύψος.

### 1.28 Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη το Θεώρημα 1

Στο υπερβολικό επίπεδο το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τη διαφορά του αθροίσματος  $A+B+\Gamma$  από το αριθμό  $\pi$ . Δηλαδή:

$$E = E(AB\Gamma) = \pi - (A + B + \Gamma)$$

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα που αφορά το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου στο υπερβολικό επίπεδο.

### Θεώρημα 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC$  με  $C = \frac{\pi}{2}$  το εμβαδόν του  $E$  επαληθεύει τη

σχέση:

$$\tan \frac{E}{2} = \tanh \frac{a}{2} \cdot \tanh \frac{b}{2} \quad (1)$$

Απόδειξη

Είναι γνωστοί οι τύποι:

$$1 + \cosh(2x) = 2 \cos^2 hx$$

$$-1 + \cosh(2x) = 2 \sin^2 hx$$

Άρα:

$$\tan^2 hx = \frac{\cosh(2x) - 1}{\cosh(2x) + 1}$$

Επομένως θα είναι:

$$S = \tan^2 h \frac{a}{2} \cdot \tan^2 h \frac{b}{2} = \frac{\cosh a - 1}{\cosh a + 1} \cdot \frac{\cosh(b) - 1}{\cosh(b) + 1} \quad (2)$$

Όμως, (Εφαρμογή της Υ.Γ. στο μοντέλο Poincaré, σ.13, τύποι C) ακόμα ισχύει:

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad \cosh b = \frac{\cos B}{\sin A}$$

άρα ο τύπος (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\cos A - \sin B) \cdot (\cos B - \sin A)}{(\cos A + \sin B) \cdot (\cos B + \sin A)} = \\ &= \frac{(\cos A \cos B + \sin A \sin B) - (\sin A \cos A + \sin B \cos B)}{(\cos A \cos B + \sin A \sin B) + (\sin A \cos A + \sin B \cos B)} = \\ &= \frac{\cos(A - B) - \frac{1}{2} \sin(2A) - \frac{1}{2} \sin(2B)}{\cos(A - B) + \frac{1}{2} \sin(2A) + \frac{1}{2} \sin(2B)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos(A-B) - \sin(A+B)\cos(A-B)}{\cos(A-B) + \sin(A+B)\cos(A-B)} = \\
&= \frac{\cancel{\cos(A-B)} [1 - \sin(A+B)]}{\cancel{\cos(A-B)} [1 + \sin(A+B)]} = \frac{[1 - \sin(A+B)]}{[1 + \sin(A+B)]}
\end{aligned}$$

Επομένως είναι:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1 - \sin(A+B)}{1 + \sin(A+B)} = \frac{1 - \sin(\pi - E - C)}{1 + \sin(\pi - E - C)} = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - E\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - E\right)} = \\
&= \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} = \tan^2 \frac{E}{2}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$S = \tan^2 \frac{E}{2} \Rightarrow \tan^2 h \frac{a}{2} \cdot \tan^2 h \frac{b}{2} = \tan^2 \frac{E}{2}$$

και επειδή όλες οι ποσότητες είναι θετικές, τελικά προκύπτει :

$$\tan \frac{E}{2} = \tanh \frac{a}{2} \cdot \tanh \frac{b}{2}$$

δηλαδή η (1).

### 1.29 Η ισαπέχουσα μιας δοσμένης $h$ - ευθείας

Στο ακόλουθο σχήμα (Σχ.30) έχουμε μια  $h$  - ευθεία την  $h - MA$  καθώς

και την ευκλείδειο ημιευθεία την  $Mh$ . Αν θεωρήσουμε τις υπερβολικές ευθείες:

$$h - a_1, h - a_2, h - a_3, \dots$$

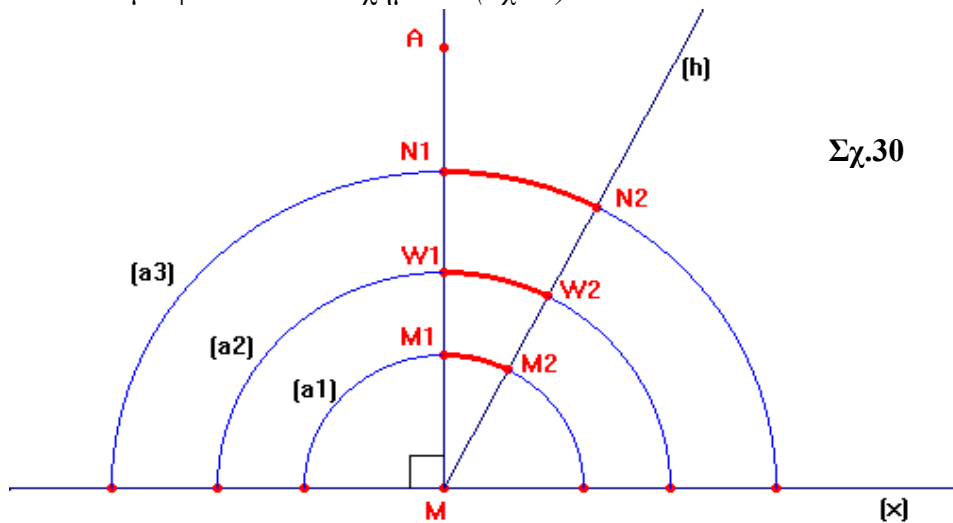
τότε, επειδή οι κύκλοι στους οποίους ανήκουν αυτές οι  $h$  - ευθείες είναι ομοιόθετοι με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο  $M$ , θα ισχύει:

$$h - M_1M_2 = h - W_1W_2 = h - N_1N_2 = \dots$$

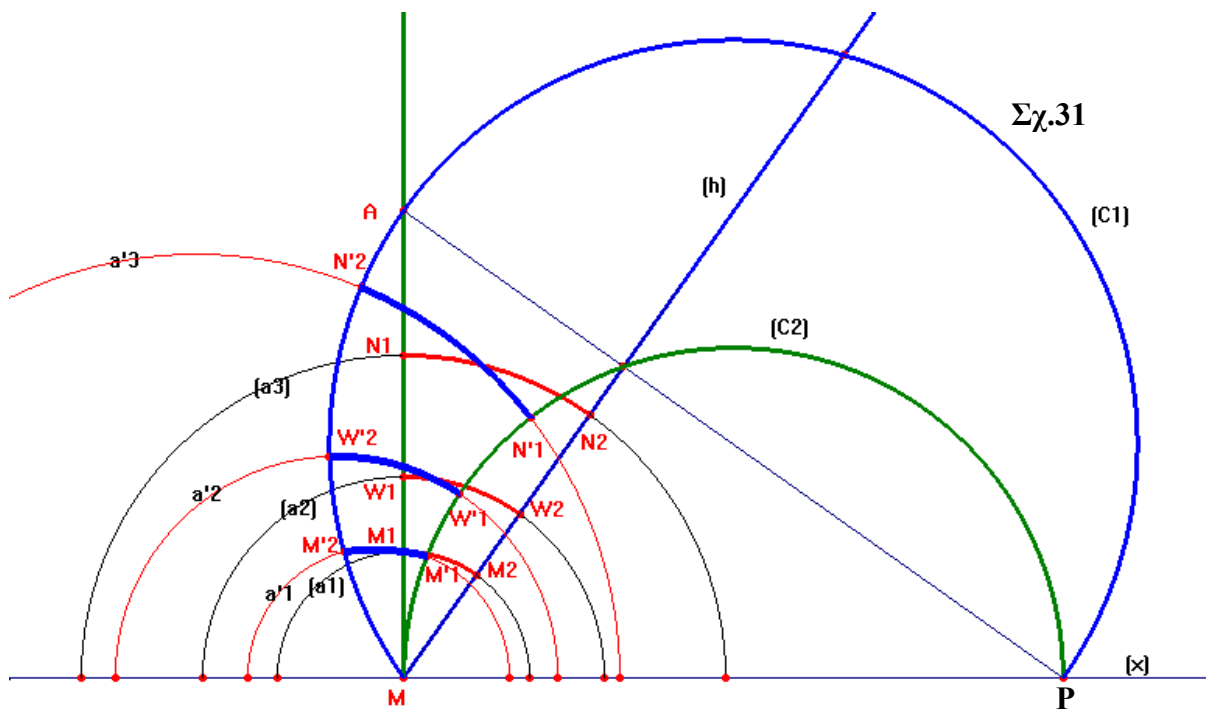


Άρα η ευθεία  $Mh$  είναι ένα σύνολο σημείων που ισαπέχουν από την  $h - MA$ .

Αν τώρα στο σχήμα 30 εφαρμόσουμε μια αντιστροφή με κέντρο το σημείο  $P$  και δύναμη το  $PM^2$  όπου  $AP$  κάθετη στην  $Mh$ , τότε το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 31 (Σχ.31).



Σχ.30



Σχ.31

Έτσι η ευθεία  $h - MA$  απεικονίζεται στην  $h - (C_2)$ , η ευθεία  $Mh$  στον

τόξο  $(C_1)$ , και οι ευθείες:

$$h - a_1, h - a_2, h - a_3, \dots$$

απεικονίζονται αντίστοιχα στις ευθείες:

$$h - a'_1, h - a'_2, h - a'_3, \dots$$

Επίσης τα ίσα  $h$ -τμήματα:

$$h - M_1M_2 = h - W_1W_2 = h - N_1N_2 = \dots$$

απεικονίζονται αντίστοιχα στα ίσα  $h$ -τμήματα:

$$h - M'_1M'_2 = h - W'_1W'_2 = h - N'_1N'_2 = \dots$$

Επομένως το τόξο  $(C_1)$  είναι ισαπέχον του  $h - C_2$ .

### 1.30 Υπολογισμός της $h$ - απόστασης δύο σημείων

Η απόσταση δύο σημείων στο υπερβολικό επίπεδο έχει οριστεί με τον τύπο:

$$h - AB = R |\ln(ABST)|$$

(Εφαρμογή της  $Y.G.$  στο μοντέλο *Poincaré*, σ.5)

Για την απόσταση αυτή ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα:**

Η απόσταση δύο σημείων  $A, B$  δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$d_h(A, B) = \cos^{-1} h \left[ 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2} \right] \quad (1)$$

όπου:

$$A = x_1 + iy_1, \quad B = x_2 + iy_2$$

**Απόδειξη**

Στο σχήμα 32 (Σχ.32) έχουμε τα σημεία  $A$  και  $B$  καθώς και τις εικόνες αυτών  $A'$  και  $B'$  μέσω της αντιστροφής  $J$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και δύναμη ίση με  $\kappa^2$ . Δηλαδή θα είναι:

$$A'B' = J_{(O, \kappa^2)}(AB)$$

Θεωρούμε ότι:

$$OA = \alpha, OA' = \alpha', OB = \beta, OB' = \beta'$$

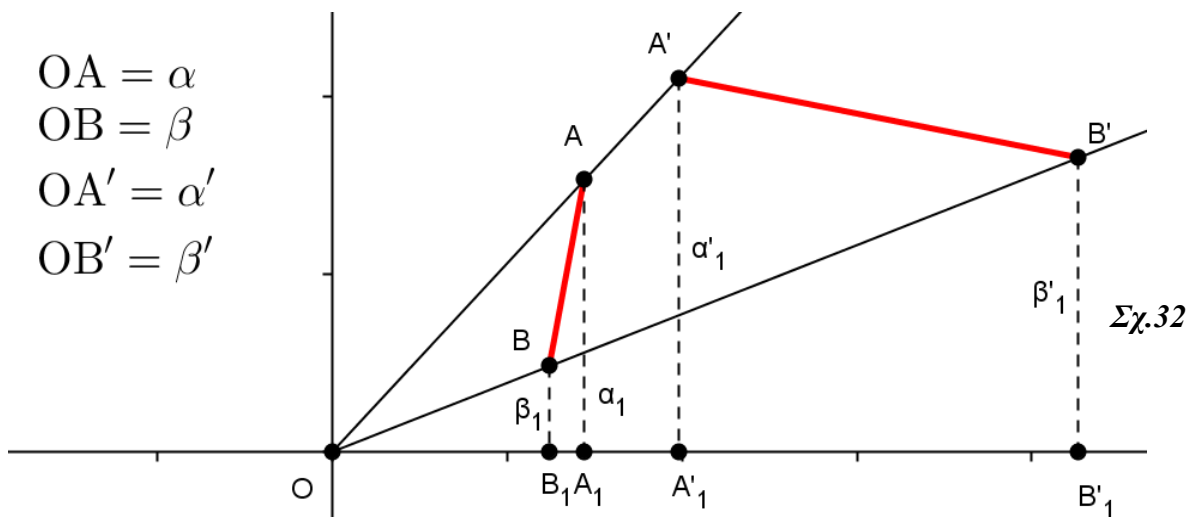
καθώς επίσης τις  $AA_1, BB_1, A'A'_1, B'B'_1$  κάθετες στον άξονα των  $x'x$  κι ακόμα, όπως σημειώνεται στο σχήμα, ότι:

$$\alpha_1 = y_1, \beta_1 = y_2, \alpha'_1 = y'_1, \beta'_1 = y'_2,$$

Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι η παράσταση (1) παραμένει αμετάβλητη κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού του Moebius. Η παράσταση (1) όμως είναι εξαρτώμενη αποκλειστικά από το μέγεθος:

$$\frac{AB^2}{\alpha_1\beta_1} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1y_2} \quad (2)$$

άρα για να δειχθεί ότι το μέγεθος αυτό είναι αμετάβλητο και για τη θέση  $A'B'$ , θα πρέπει να δειχθεί ότι:



$$\frac{AB^2}{\alpha_1\beta_1} = \frac{A'B'^2}{\alpha'_1\beta'_1} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha'_1\beta'_1} \quad (3)$$

Πράγματι από το μετασχηματισμό της αντιστροφής προκύπτει:

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \kappa^2 \quad (4)$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα  $OAB$  και  $OA'B'$  προκύπτει:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\beta}{\alpha'}$$

άρα:

$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} \quad (5)$$

Ακόμα από την ομοιότητα των τριγώνων  $OAA_1$ ,  $OA'A'_1$  και  $OBB_1$ ,  $OB'B'_1$  προκύπτει:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha_1}{\alpha'_1} \\ \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\beta_1}{\beta'_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha'_1\beta'_1} \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha'_1\beta'_1}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\frac{AB^2}{\alpha_1\beta_1} = \frac{A'B'^2}{\alpha'_1\beta'_1}$$

δηλαδή η παράσταση

$$\frac{AB^2}{\alpha_1\beta_1}$$

παραμένει σταθερό κατά τον μετασχηματισμό της αντιστροφής και κατά συνέπεια κατά το μετασχηματισμό του Moebius.

Ακόμα είναι γνωστό ότι για την υπερβολική απόσταση ισχύει:

$$AB = DS_h = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

και ότι από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η ποσότητα αυτή παραμένει αμετάβλητη κατά το μετασχηματισμό του Moebius.

Στη συνέχεια θέτουμε:

$$\sinh\left(\frac{d_h(A, B)}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2}} \quad (7)$$

Από το γνωστό τύπο των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} \cosh(d_h(A, B)) &= 1 + 2 \sin^2 h \left( \frac{d_h(A, B)}{2} \right) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \\ \cosh(d_h(A, B)) &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2} \Rightarrow \\ \cosh(d_h(A, B)) &= 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \\ d_H(A, B) &= \cos^{-1} h \left[ 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right] \end{aligned}$$

δηλαδή ο ζητούμενος τύπος (1).

Τέλος θα αποδείξουμε ότι ο τύπος αυτός (1) συμπίπτει με το γνωστό τύπο μέτρησης της απόστασης δύο σημείων στο υπερβολικό επίπεδο, δηλαδή τον ακόλουθο τύπο:

$$h - AB = \left| \ln(ABST) \right| \quad (R=1) \quad (8)$$

(Εφαρμογή της Υ.Γ. στο μοντέλο Poincaré, σ.5, τύπος (1))

Εστω  $AB \perp (x)$ . (Σχ.33)

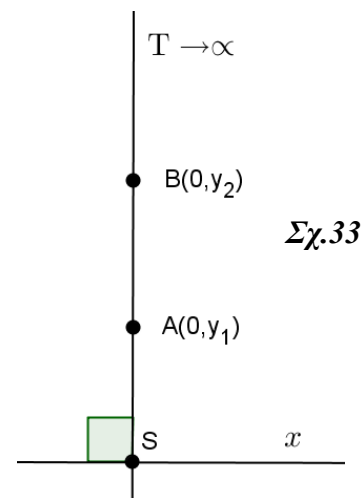
Στην περίπτωση αυτή ο τύπος (8) δίνει:

$$h - AB = \left| \ln \left( \frac{y_1}{y_2} \right) \right| \quad (9)$$

Στον ίδιο τύπο θα πρέπει να καταλήξουμε εφαρμόζοντας τη σχέση (1) η οποία στην περιπτώσή μας γίνεται:

$$d_H(A, B) = \cos^{-1} h \left[ 1 + \frac{(y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right]$$

δηλαδή:



$$d_H(A, B) = \cos^{-1} h \left( \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1y_2} \right) \quad (10)$$

Πράγματι από τη σχέση (7) είναι:

$$\sinh \left( \frac{AB}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1y_2}}$$

άρα:

$$\cosh(AB) = 1 + 2 \sin^2 h \frac{AB}{2} = 1 + \frac{(y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2} \Rightarrow$$

δηλαδή:

$$\cosh(AB) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1y_2}$$

Όμως:

$$\cosh(AB) = \frac{e^{AB} + e^{-AB}}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1y_2} \quad (11)$$

άρα λύνοντας την (11) ως προς το μέγεθος:

$$e^{AB}$$

καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει λύσεις:

$$e^{AB} = \frac{y_1}{y_2}, \quad e^{-AB} = \frac{y_2}{y_1}$$

Επομένως:

$$AB = \left| \ln \frac{y_1}{y_2} \right|$$

δηλαδή:

$$d_H(A, B) = \left| \ln \frac{y_1}{y_2} \right| = h - AB$$

Άρα έχουμε ταύτιση των δύο τύπων.

Παρατήρηση:

*1<sup>η</sup>) Αν δύο τρίγωνα είναι ομόλογα σε Moebius μετασχηματισμό, τότε θα είναι ίσα.*

*2<sup>η</sup>) Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες τότε θα είναι ίσα. (Αυτό ισχύει διότι από την ισότητα των γωνιών προκύπτει ότι είναι και ομόλογα σε Moebius μετασχηματισμό)*

## 2. Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

### 2.1 Γενικά:

Έστω:

$$r = r(x, y, z)$$

το διάνυσμα θέσεως σημείου  $P \in E^3$  και ότι:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

οι παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας

$$Q = f(x, y, z) = 0.$$

Ας υποθέσουμε ακόμα ότι το διάνυσμα θέσης:

$$r = r(u, v)$$

είναι ορισμένο μονότιμα και ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς  $u, v$  μέχρι τουλάχιστον 2 και ακόμα

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$$

Αν τώρα πάνω στην επιφάνεια αυτή θεωρήσουμε ένα παραμετρικό σύστημα συντεταγμένων:

$$(u_0, v_0), (u, v_0)$$

τότε το σημείο P, όπου:

$$\overline{OP} = r(u, v)$$

γράφει πάνω στην επιφάνεια μια καμπύλη  $\Gamma$  της οποίας το διαφορικό του τόξου  $S$  δίνεται από τη σχέση:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1)$$

όπου:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της επιφάνειας  $Q$ .

Η ολική καμπυλότητα (Gauss) σε ένα σημείο της επιφάνειας  $Q$  για  $F = 0$  δίνεται από τον τύπο:

$$k = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right\} \quad (2)$$

όπου  $E_v, G_u$  οι μερικές παράγωγοι των ποσοτήτων  $E, G$  ως προς  $v, u$  αντίστοιχα.

## 2.2 Η καμπυλότητα στο μοντέλο του Poincaré.

Η μετρική στο μοντέλο του Poincaré στο h-επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$dS_H = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (1)$$

Η σχέση αυτή της μετρικής αν θεωρήσουμε ότι είναι:  
 $x = u, \quad y = v$

και τη συσχετίσουμε με την (1) της παραγράφου 2.1 τότε προκύπτει ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του h-επιπέδου είναι:

$$E = \frac{1}{y^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{y^2}$$

Επομένως η καμπυλότητα σε κάθε σημείο του h-επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο (2) της παραγράφου 2.1 είναι:

$$k = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{y^4}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial E}{\partial y}}{\sqrt{\frac{1}{y^4}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nearrow^0 \right) \right\} =$$



$$-\frac{y^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-2}{y} \right) \right] = y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) = -y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = -1$$

Δηλαδή:

$$k = -1$$

Αυτό σημαίνει ότι αν δούμε το  $h$  – επίπεδο ως μια επιφάνεια στον  $E^3$  τότε αυτή έχει αρνητική σταθερή καμπυλότητα.

**Παρατήρηση:**

Στο εξαιρετικό βιβλίο του με τίτλο Differential Geometry ο T.J.Willmore στις σελίδα 80, example 17.1 και 17.2 έχει δύο αξιόλογους τύπους της καμπυλότητας μιας επιφάνειας σε σημείο P. Οι τύποι αυτοί είναι:

$$k(P) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{3[2\pi R - L_H(P, R)]}{\pi R^3} \quad (a)$$

$$k(P) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{12[\pi R^2 - A_H(P, R)]}{\pi R^4} \quad (b)$$

Από τον τύπο (a) για κάθε σημείο P του  $h$  – επιπέδου προκύπτει:

$$\begin{aligned} k(P) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{3[2\pi R - L_H(P, R)]}{\pi R^3} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{3[2\pi R - 2\pi \sinh R]}{\pi R^3} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{6\pi [R - \sinh R]}{\pi R^3} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{6\pi \left[ R - \left( R + \frac{R^3}{6} + \dots \right) \right]}{\pi R^3} = -1 \end{aligned}$$

### 2.3 Γεωδαισιακές γραμμές του H – επιπέδου

Έστω η καμπύλη  $(c)$  του  $H$  – επιπέδου. Ο ορισμός του μήκους της καμπύλης μπορεί να γίνει όπως στο Ευκλείδειο Επίπεδο. Δηλαδή, αν  $A, B \in (c)$ , διαιρούμε με τα σημεία  $P_1, P_2, \dots, P_n$  την καμπύλη σε  $h$  – τμήματα και το όριο του αθροίσματος των  $h$  – μηκών των τμημάτων αυτών για  $n \rightarrow \infty$  θα είναι το μήκος της καμπύλης  $(c)$ . Έστω ότι αυτό είναι:  $L_H(c)$ .

**Πρόταση:**

Αν  $A, B \in (c)$  όπου  $(c)$  μια καμπύλη στο  $H$  – επίπεδο, τότε θα είναι:

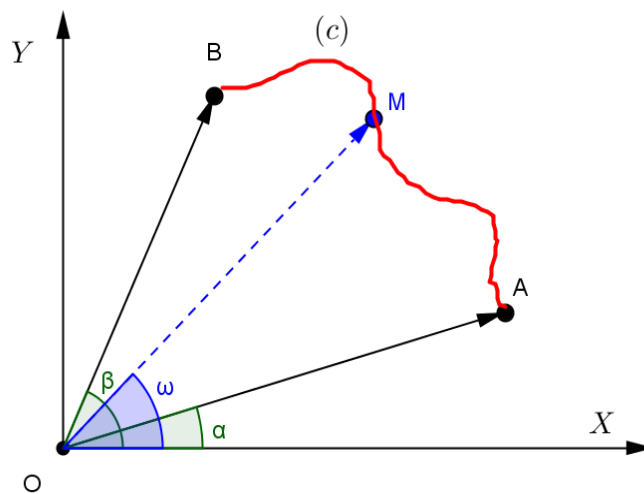
$$h - AB \leq L_H(c) \quad (1)$$

**Απόδειξη:**

Έστω  $M(x, y) \in (c)$ . (Σχ.34)

Τότε θα είναι:

$$\begin{cases} x = r \cos \omega \\ y = r \sin \omega \end{cases}, \quad \text{όπου} \quad |\vec{r}| = |\overline{OM}|$$



Σχ.33

Τότε το στοιχειώδες  $h$  – μήκος δίνεται από τον τύπο:

$$d_H S = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}}$$

και συνεπώς το συνολικό  $h$  – μήκος της  $(c)$  θα είναι:

$$L_H(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}}{r \sin \omega} d\omega \quad (2)$$

διότι:

$$dx^2 + dy^2 = (\dot{r}^2 + r^2) d\omega^2$$

Έτσι από τον τύπο (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} L_H(c) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}}{r \sin \omega} d\omega \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{r^2}}{r \sin \omega} d\omega = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\omega}{\sin \omega} = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} = \\ &= h - AB \end{aligned}$$

Άρα:

$$L_H(c) \geq h - AB$$

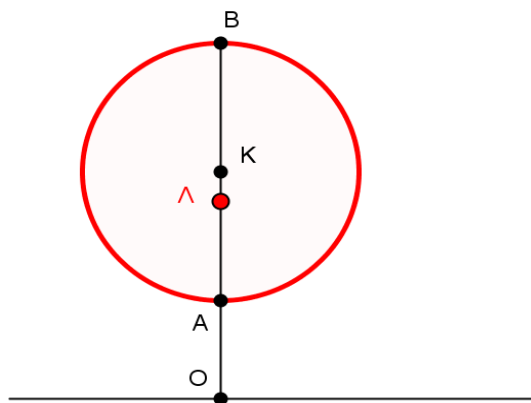
δηλαδή η ζητούμενη (1).

**Παρατήρηση:**

Η ισότητα ισχύει αν  $\dot{r} = 0$ , δηλαδή όταν  $A, B \in (O, r = ct)$

#### 2.4 Η ακτίνα του h - κύκλου

Έστω ο Ευκλείδειος κύκλος  $(K, r)$ . (Σχ.34) Αν  $\Lambda$  είναι το κέντρο



Σχ. 34

του  $h$  - κύκλου που αντιστοιχεί στον Ευκλείδειο κύκλο  $(K, r)$  τότε θα ισχύει:

$$OA \cdot OB = O\Lambda^2 \quad (1)$$

Αν τώρα θέσουμε:  $OK = \beta$  τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$(\beta - r)(\beta + r) = O\Lambda^2$$

δηλαδή:

$$O\Lambda = \sqrt{\beta^2 - r^2}$$

Ακόμα είναι γνωστό ότι στο σχήμα 34 ισχύει:

$$(\Lambda, h - \Lambda B) = (\Lambda, h - \Lambda A) = (\Lambda, R_H)$$

όπου  $R_H$  η  $h$  - ακτίνα του  $h$  - κύκλου.

Επίσης είναι:

$$R_H = \ln \frac{OB}{OA} = \ln \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta + \gamma}{\beta - r}$$

*Άρα η ακτίνα του  $h$  - κύκλου είναι:*

$$R_H = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta + \gamma}{\beta - r} \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$e^{2R_H} = \frac{\beta + \gamma}{\beta - r}$$

ή ακόμα:

$$e^{-2R_H} = \frac{\beta - r}{\beta + \gamma}$$

Επομένως:

$$\sinh 2R = \frac{e^{2R_H} - e^{-2R_H}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta + r}{\beta - r} - \frac{\beta - r}{\beta + r} \right) = \frac{2\beta r}{\beta^2 - r^2} \quad (2)$$

Όμως είναι γνωστό ακόμα ότι:

$$\cosh 2R_H = 2 \sin^2 h R_H + 1 \quad (3)$$

Έτσι από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$\sinh R_H = \frac{r}{\sqrt{\beta^2 - r^2}}$$

Η περίμετρος του  $h$  - κύκλου  $c(\Lambda, R_H)$  θα είναι:

$$L_H(c) = \int_0^{2\pi} \sinh R_H d\phi = 2\pi \sinh R_H \Rightarrow$$

$$L_H(c) = 2\pi \sinh R_H \quad (4)$$

Τέλος το Εμβαδόν του  $h$  - κύκλου  $c(\Lambda, R_H)$  θα είναι:

$$\begin{aligned} E_H(c) &= \int_0^{R_H} \int_0^{2\pi} \sinh r dr d\phi = \\ &= 2\pi (\cosh R_H - 1) = 4\pi \sin^2 h \left( \frac{R_H}{2} \right) \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$E_H(c) = 4\pi \sin^2 h \left( \frac{R_H}{2} \right)$$

### 2.5 Σχέση του μήκους $h$ - τμήματος $AB$ με την προβολή αυτού σε τυχούσα $h$ - ευθεία.

**Πρόταση 1:**

Αν  $p(AB)$  είναι η προβολή του  $h$  - τμήματος  $AB$  (Σχ.35) πάνω σε τυχούσα  $h$  - ευθεία ( $\varepsilon$ ), τότε θα ισχύει η ανισότητα:

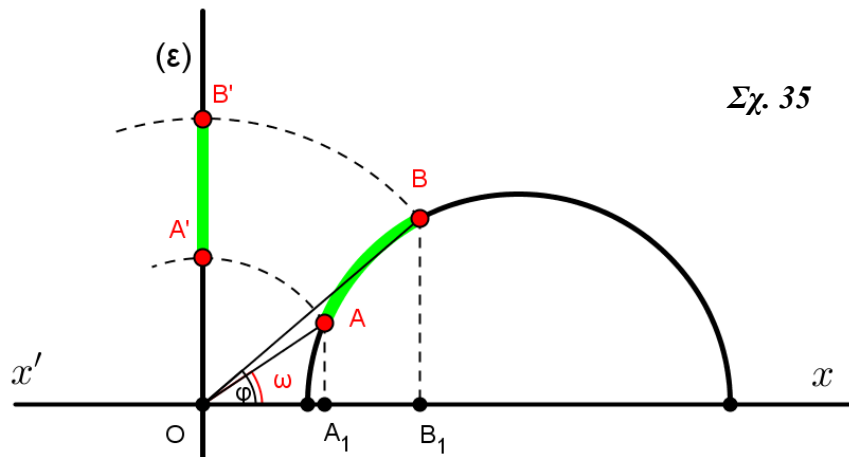
$$d_h(A, B) \geq p_h(A', B') \quad (1)$$

**Απόδειξη:**

Από τη σχέση (7) τις παραγράφου 1.30 γνωρίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  στο  $h$  - επίπεδο δίνεται από τον τύπο:

$$\sinh\left(\frac{d_h(A,B)}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2}}$$

Χωρίς στέρηση τις γενικότητας θα θεωρήσουμε, τις αυτό φαίνεται από το σχήμα 35, ότι:  $(\varepsilon) \perp (x'x)$ .



Σχ. 35

Στη συνέχεια θέτουμε:

$$OA' = r_1, \quad OB' = r_2, \quad AA_1 \perp x'x, \quad BB_1 \perp x'x,$$

καθώς και:

$$AOA_1 = \omega, \quad BOB_1 = \phi$$

Για να δείξουμε τη ζητούμενη (1) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1 r_2} \leq \frac{AB^2}{AA_1 \cdot BB_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1 r_2} \leq \frac{(r_2 \sin \phi - r_1 \sin \omega)^2 + (r_2 \cos \phi - r_1 \cos \omega)^2}{r_1 r_2 \sin \phi \sin \omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r_2 - r_1)^2 \sin \phi \sin \omega \leq (r_2 \sin \phi - r_1 \sin \omega)^2 + (r_2 \cos \phi - r_1 \cos \omega)^2 \quad (2)$$

Τις:

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi - \omega) \geq r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2$$

ή

$$r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi - \omega) \geq (r_1 - r_2)^2 \geq (r_1 - r_2)^2 \sin \phi \sin \omega$$

δηλαδή η (2).

Επομένως ισχύει και η ζητούμενη (1).

**Παρατήρηση:**

Για  $\phi = 90^\circ$ ,  $AA' \perp (\varepsilon)$  και  $AB$  είναι πλάγια ως τις την  $(\varepsilon)$  και  $(B \equiv B')$ . Τότε δηλαδή η απόσταση σημείου από ευθεία είναι η μικρότερη.

**2.6 Εφαπτόμενες από ένα σημείο  $h$  –  $P$  τις έναν  $h$  – κύκλο  $C(O)$**

Έστω ότι έχουμε τον κύκλο  $C(O)$  και το σημείο  $P$  εκτός αυτού.

(Σχ.36) Από το σημείο  $P$  φέρουμε τις δύο εφαπτόμενες  $PA, PB$  και ζητούμε να δείξουμε ότι ισχύει:

$$h - PA = h - PB \quad (1)$$

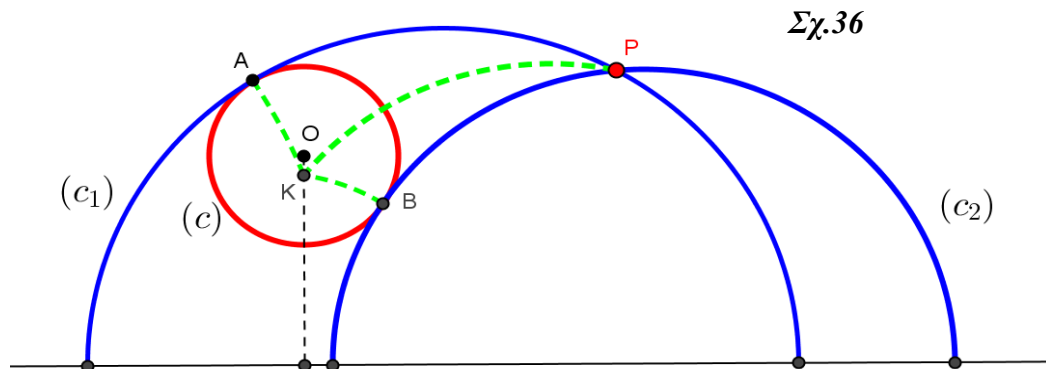
Για την απόδειξη τις (1) θα συγκρίνουμε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα:

$$\Delta(h - AKP), \Delta(h - BKP)$$

Αυτά έχουν:

$$h - KA = h - KB \quad (2)$$

ως ακτίνες του  $h$  – κύκλου  $C(O)$ .



Σχ.36

Ακόμα αυτά έχουν την υποτείνουσα  $KP$  κοινή και επιπλέον ισχύει:

$$\tanh(KB) = \tanh(KP) \cos(BKP)$$

$$\tanh(KA) = \tanh(KP) \cos(AKP)$$

Οι σχέσεις αυτές λόγω τις (2) δίνουν:

$$\cos(BKP) = \cos(AKP)$$

και συνεπώς:

$$BKP = AKP \quad (3)$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα  $h-AKP, h-BKP$  είναι ίσα και συνεπώς:

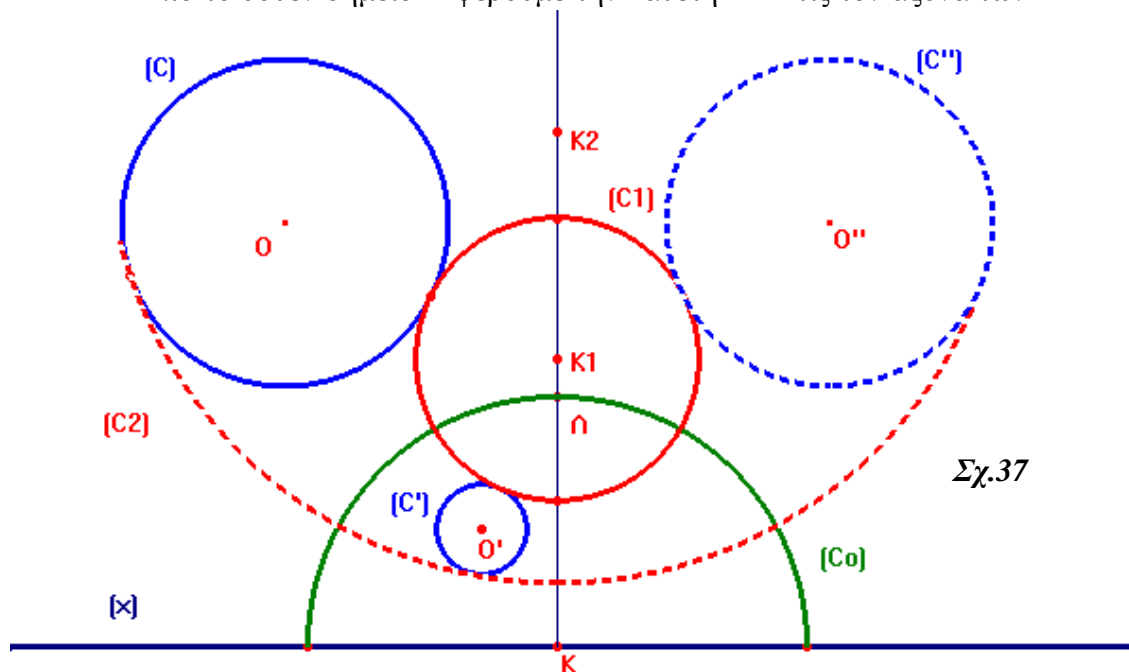
$$h-PA = h-PB$$

δηλαδή τα εφαπτομενικά αυτά τμήματα είναι ίσα.

## 2.7 Κατασκευή $h$ – κύκλου που να εφάπτεται σε δοθέντα κύκλο $(c)$ και να έχει κέντρο ένα δοθέν σημείο $\Lambda$ .

Κατασκευή:

Από το δοθέν σημείο  $\Lambda$  φέρουμε την κάθετη  $\Lambda K$  τις τον άξονα των



$x'$  καθώς και τον κύκλο που ορίζει την ευθεία  $h-C_o$ . Στη συνέχεια θεωρούμε τον αντίστροφο κύκλο  $(C')$  του δοθέντος κύκλου  $(C)$  ως τις κέντρο αντιστροφής το σημείο  $\Lambda$  και κύκλο αντιστροφής τον  $(C_o)$  (Σχ.37).

## 2.8 Διαφορικό καμπύλης στο $h$ – επίπεδο

Είναι γνωστό ότι το διαφορικό μιας καμπύλης  $S$  (παραγρ. 2.2) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$d_H S = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (1)$$



Αν στη συνέχεια θεωρήσουμε πάνω στο θετικό ημιάξονα άξονα  $Oy$  τα σημεία  $A_o(x_o, y_o)$  και  $B_o(x_o, y_o + dy_o)$ , τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$d_H S = \frac{|dy_o|}{y_o} \quad (2)$$

Αν τις αναπτύξουμε τη συνάρτηση  $\ln\left(1 + \frac{dy_o}{y_o}\right)$  σε σειρά Taylor και παραλειφθούν οι όροι από τα απειροστά δεύτερης τάξης και άνω τότε προκύπτει:

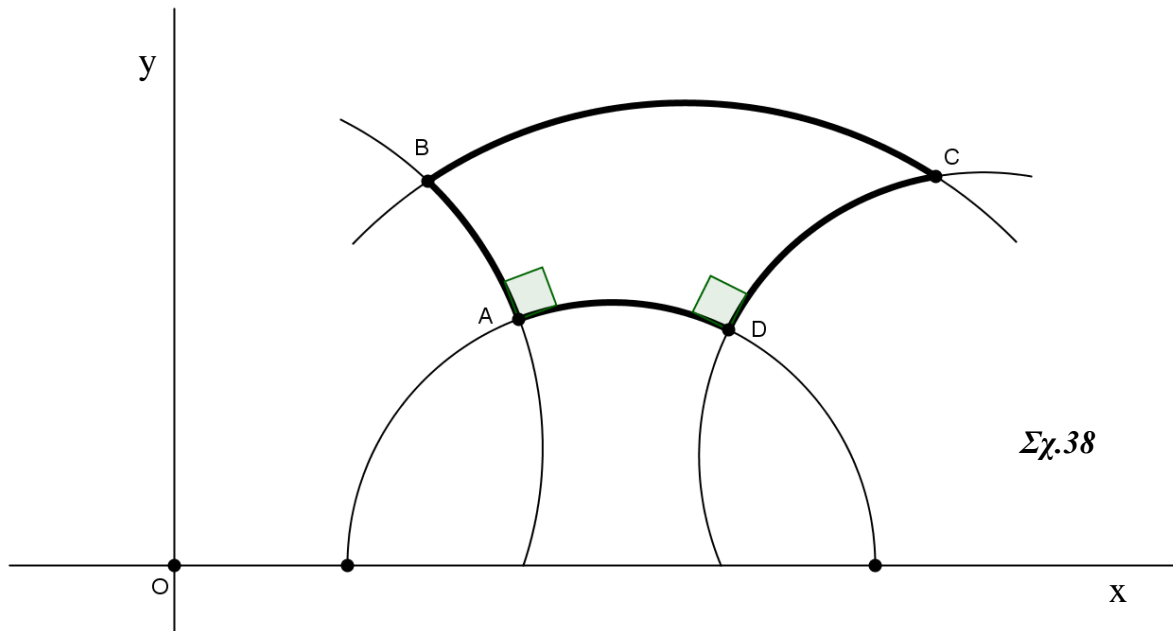
$$\ln\left(1 + \frac{dy_o}{y_o}\right) = \frac{dy_o}{y_o} \quad (3)$$

επομένως από τις (2) και (3) και επειδή  $y_o > 0$  τελικά θα είναι:

$$d_H S = \left| \ln\left(1 + \frac{dy_o}{y_o}\right) \right| \quad (4)$$

### 2.9 Το στοιχειώδες εμβαδόν στο $h$ - επίπεδο.

Θεωρούμε στο  $h$  - επίπεδο το **τετράπλευρο  $ABCD$  του Saccheri** με πλευρές παράλληλες τις τις άξονες. (**Σχ.38**)



Αν τώρα υποθέσουμε ότι:

$$AD = \frac{dx_H}{y} = \frac{dx}{y}, \quad AB = \frac{dy_H}{y} = \frac{dy}{y}$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε ως στοιχειώδη h – εμβαδόν ως εξής:

$$d_H E = \frac{dx \cdot dy}{y^2} \quad (1)$$

Ακόμα αν θεωρήσουμε την εξίσωση τις καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες τότε οι συντεταγμένες τις σημείου τις καμπύλης θα δίνονται από τις τύπους:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Οι τύποι (2) μετά από παραγωγήσι δίνουν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \cos \theta + r \frac{d \cos \theta}{d\theta} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Από τις (3) προκύπτει:

$$dx^2 + dy^2 = \left( (\dot{r})^2 + r^2 \right) d\theta^2 \quad (4)$$

Επομένως ο τύπος (1) τις παραγράφου 2.7 γίνεται:

$$d_H S = \frac{\sqrt{(\dot{r})^2 + r^2}}{r \sin \theta} \quad (5)$$

Εξάλλου η Ιακωβιανή των συναρτήσεων  $x, y$  ως τις τις μεταβλητές  $r, \theta$  είναι:

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = r \quad (6)$$

Άρα:

$$dxdy = r dr d\theta$$

και συνεπώς το τύπος (1) τελικά γίνεται:

$$d_H E = \frac{dx \cdot dy}{y^2} = \frac{r dr d\theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

δηλαδή:

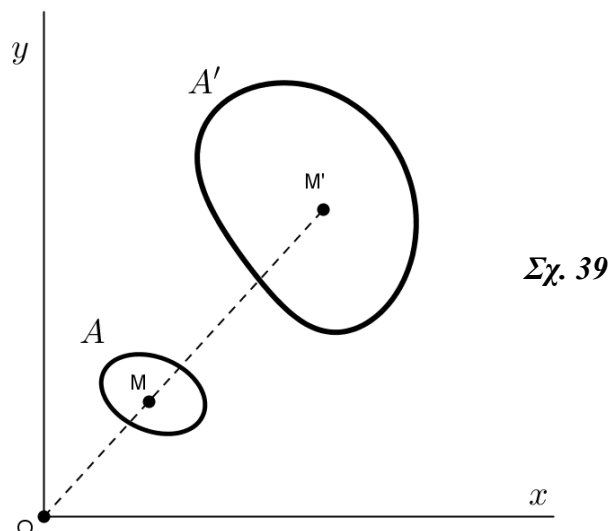
$$d_H E = \frac{r dr d\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (7)$$

### 2.10 Θεώρημα 1

Ο μετασχηματισμός του Moebius στο  $h$  – επίπεδο διατηρεί τα εμβαδά.

Απόδειξη

Έστω το σχήμα  $A$  και η αντιστροφή  $J(O, k^2)$ .



Έστω ακόμα η εικόνα  $A'$  του σχήματος  $A$  μέσω της αντιστροφής αυτής. Δηλαδή:

$$A' = J_{(O, k^2)}(A)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$E_H(A') = E_H(A) \quad (1)$$

Είναι γνωστό ότι από τύπο (1) της παραγράφου 2.9 προκύπτουν οι

ακόλουθοι τύποι των ζητούμενων εμβαδών:

$$E_H(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2}, \quad E_H(A') = \int_{A'} \frac{dx' dy'}{(y')^2} \quad (2)$$

Στη συνέχεια θεωρώντας ένα τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  του χωρίου  $A$  και θέτοντας:

$$OM = \rho \quad (3)$$

τότε χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

έχουμε την Ιακωβιανή:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho \quad (4)$$

Από το σχήμα 39 προκύπτει ότι για το σημείο  $M(x, y)$  του χωρίου  $A$  υπάρχει ένα σημείο  $M'(x', y')$  του χωρίου  $A'$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$OM \cdot OM' = k^2 \quad (5)$$

Αν ακόμα θέσουμε:

$$OM' = r$$

τότε από την (5) και την (3) προκύπτει:

$$\rho = \frac{k^2}{r} \quad (6)$$

Επίσης για τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $x', y'$  του σημείου  $M'$  ισχύουν οι μετασχηματισμοί σε πολικές συντεταγμένες:

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos \theta \\ y' &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

με Ιακωβιανή:

$$\frac{D(x', y')}{D(r, \theta)} = r \quad (8)$$

Οι μετασχηματισμοί:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{k^2}{r} \\ \theta = \theta \end{array} \right\} \quad (9)$$

οι οποίοι ορίζουν την αντιστροφή  $J$  έχουν Ιακωβιανή:

$$\frac{D(\rho, \theta)}{D(r, \theta)} = -\frac{k^2}{r^2} \quad (10)$$

Από τις (4), (8) και (10) προκύπτει το γινόμενο των Ιακωβιανών αυτών. Δηλαδή:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \cdot \frac{D(\rho, \theta)}{D(r, \theta)} \cdot \frac{D(r, \theta)}{D(x', y')} = \rho \cdot \left( -\frac{k^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\rho k^2}{r^3} = -\frac{\rho^2}{r^2}$$

ή ακόμα:

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = -\frac{r^2}{\rho^2} \quad (11)$$

Επομένως για το εμβαδόν του χωρίου  $A'$  έχουμε:

$$\begin{aligned} E_H(A') &= \int_{A'} \frac{dx'dy'}{(y')^2} = \int_A \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot dx dy = \\ &= \int_A \frac{r^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot dx dy = \int_A \frac{dx dy}{\rho^2 \sin^2 \theta} = \int_A \frac{dx dy}{y^2} = E_H(A) \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$E_H(A') = E_H(A)$$

## 2.11 Το εμβαδόν του τριγώνου στο $h$ – επίπεδο.

### Ορισμός:

Ασυμπτωτικό τρίγωνο λέγεται εκείνο το τρίγωνο το οποίο έχει μία κορυφή στο επ' άπειρο σημείο.

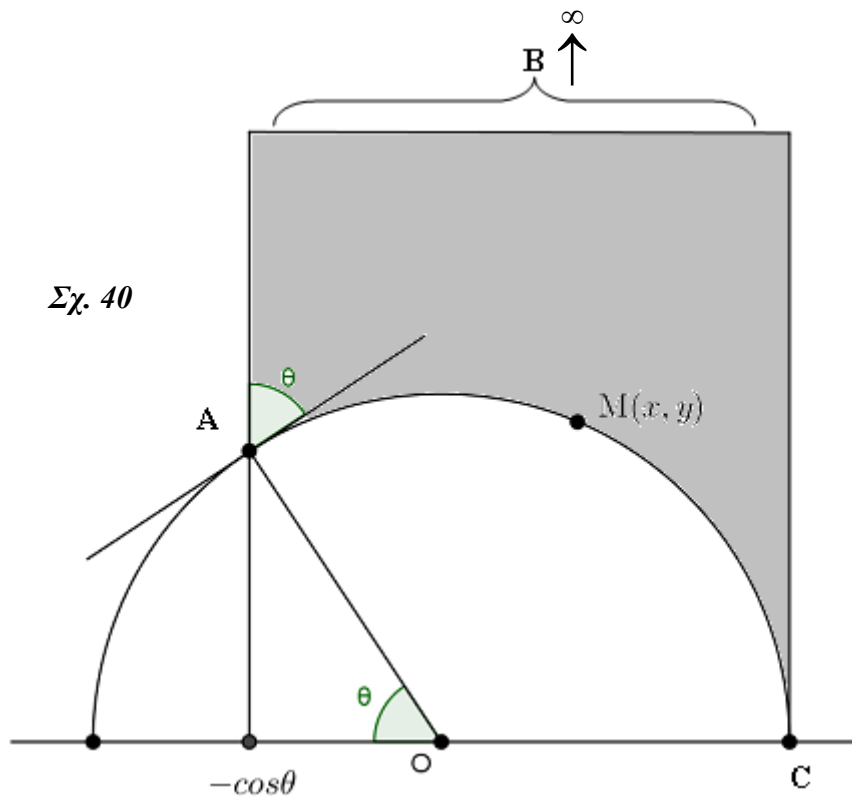
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις σχετικά με τη μορφή του τριγώνου .

#### 1<sup>η</sup> περίπτωση

Στο παρακάτω σχήμα (Σχ.40) έχουμε ένα ασυμπτωτικό τρίγωνο  $ABC$

του οποίου οι κορυφές  $B, C$  βρίσκονται στο επ' άπειρον σημείο, δηλαδή ένα τρίγωνο με δύο ασυμπτωτικές κορυφές.

Για το εμβαδόν του τριγώνου αυτού ισχύει:



$$E_H(ABC) = \int_{-\cos\theta}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} =$$

$$= \int_{-\cos\theta}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(-x) \Big|_{-\cos\theta}^1 = \pi - \theta$$

Δηλαδή:

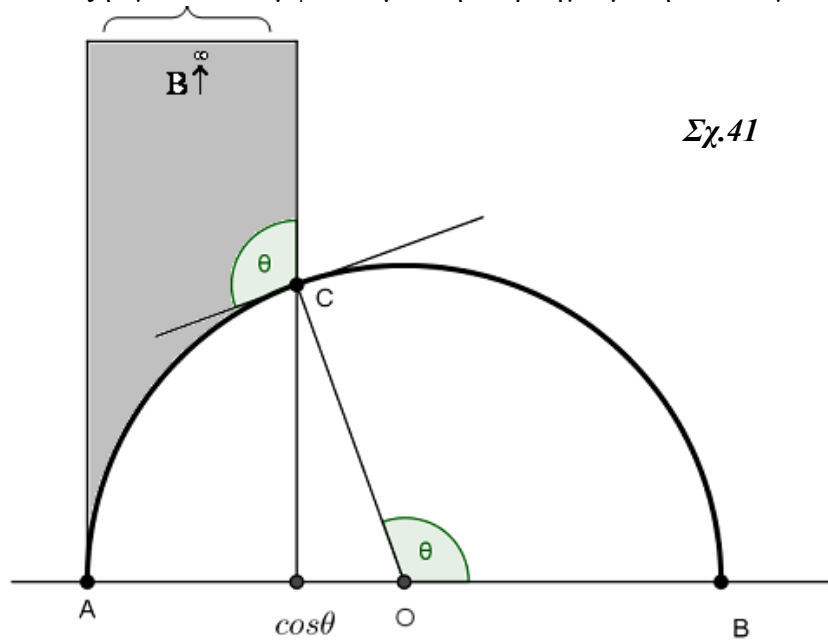
$$E_H(ABC) = \pi - \theta \quad (1)$$

### Παρατήρηση 1.

Σύμφωνα με τον τύπο αυτό (1) μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε το εμβαδόν των ασυμπτωτικών τριγώνων που έχουν τη μορφή του σχήματος

41 (Σχ.41).

Η απόδειξη γίνεται σύμφωνα με την προηγούμενη συλλογιστική.

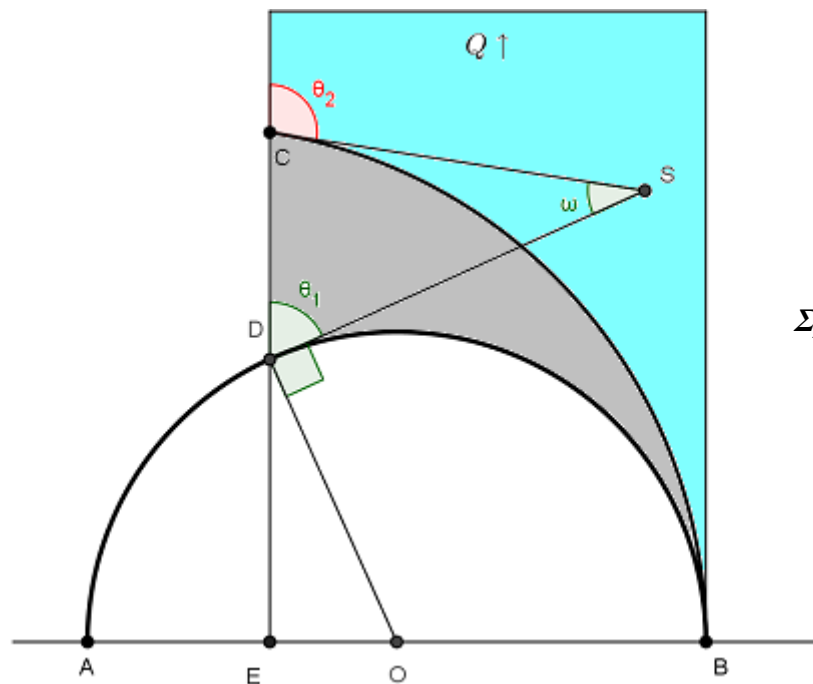


Σχ.41

Συνεπώς και στην περίπτωση αυτή ισχύει ο τύπος (1).

### Παρατήρηση 2

Σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο (1) μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ασυμπτωτικού τριγώνου  $BCD$  (Σχ.42), το οποίο έχει μόνο την



Σχ.42

κορυφή  $B$  ως ασυμπτωτική.

Πράγματι έχουμε:

$$E_H(BDQ) = \pi - \theta_1$$

$$E_H(BCQ) = \pi - \theta_2$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη προκύπτει:

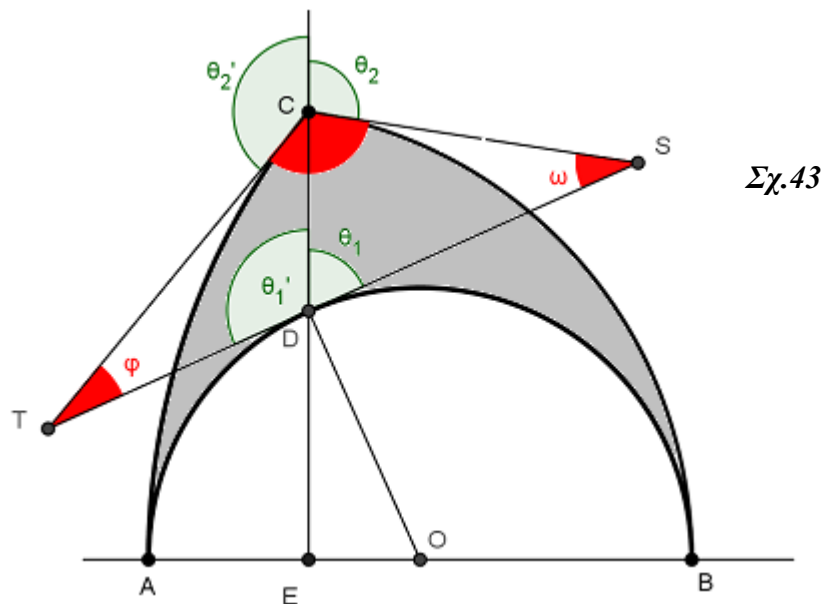
$$E_H(BDC) = E_H(BDQ) - E_H(BCQ) = \theta_2 - \theta_1 = \omega$$

Δηλαδή:

$$E_H(BDC) = \omega \quad (2)$$

### Παρατήρηση 3

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) της παρατήρησης 2 μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$  (Σχ.43) το οποίο έχει τις δύο



κορυφές του  $A, C$  ασυμπτωτικές.

Πράγματι σύμφωνα με τον τύπο (2) της παρατήρησης 2 είναι:

$$E_H(BCD) = \omega$$

$$E_H(ACD) = \phi$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$E_H(ABC) = E_H(BCD) + E_H(ACD) = \omega + \phi$$



Όμως:

$$\omega + \phi = \pi - C$$

Άρα:

$$E_H(ABC) = \pi - C \quad (3)$$

## 2<sup>η</sup> περίπτωση

Έστω ότι το τρίγωνο  $ABC$  έχει τρεις ασυμπτωτικές κορυφές. Τότε ανάλογα με τη θέση των ασυμπτωτικών κορυφών διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις.

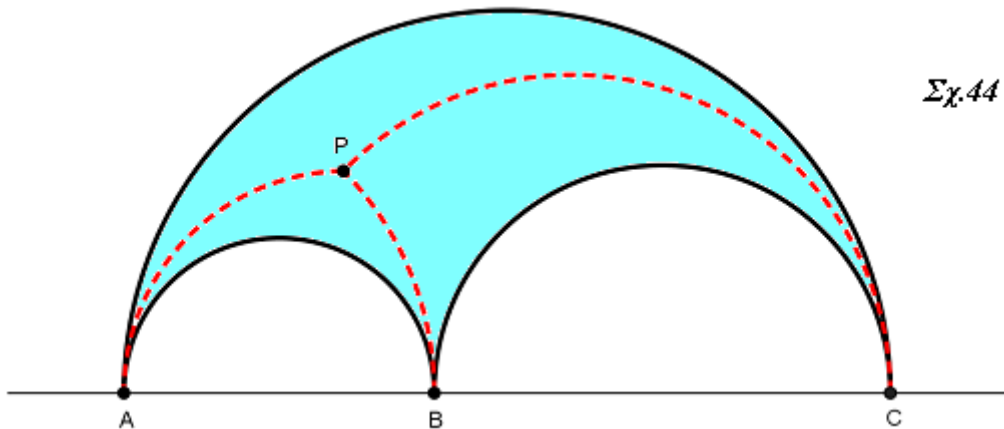
**I)** Έστω ότι το ασυμπτωτικό τρίγωνο  $ABC$  είναι της μορφής που εμφανίζεται στο σχήμα 40 (Σχ.44). Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο έχει και τις τρεις κορυφές του ασυμπτωτικές

Για τον υπολογισμό του εμβαδού αυτού του τριγώνου θεωρούμε ένα εσωτερικό του σημείο  $P$  και δημιουργούμε τρία ασυμπτωτικά τρίγωνα της περιπτώσεως που μελετήθηκε στην τρέχουσα παράγραφο 2.11, παρατήρηση 3.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E_H(ABC) = E_H(APB) + E_H(BPC) + E_H(CPA)$$

και σύμφωνα με τον τύπο (3) της παρατήρησης 3 θα είναι ακόμα:

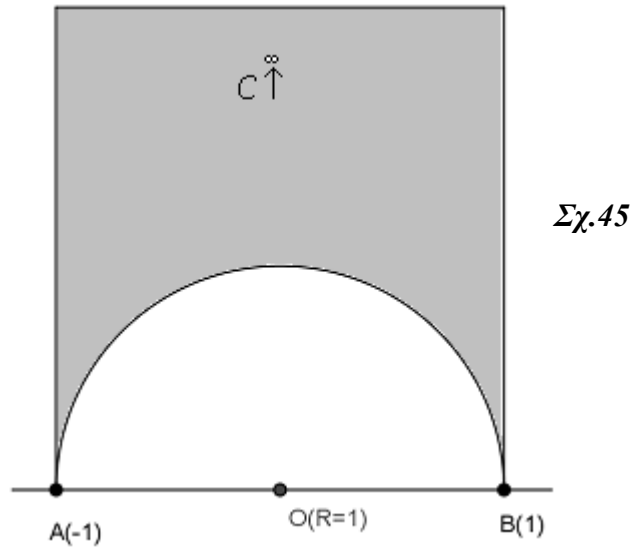


$$E_H(ABC) = (\pi - APB) + (\pi - BPC) + (\pi - CPA) \Rightarrow$$

$$E_H(ABC) = 3\pi - (APB + BPC + CPA) = 3\pi - 2\pi = \pi \Rightarrow$$

$$E_H(ABC) = \pi \quad (4)$$

II) Έστω ότι το ασυμπτωτικό τρίγωνο  $ABC$  είναι της μορφής του επόμενου σχήματος. (Σχ.45) Και στην περίπτωση αυτή το ασυμπτωτικό τρίγωνο έχει τις τρεις κορυφές του ασυμπτωτικές



Για το εμβαδόν του τριγώνου αυτού ισχύει:

$$E(ABC) = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

δηλαδή:

$$E(ABC) = \pi \quad (5)$$

Στον ίδιο τύπο θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε τον τύπο (1) της πρώτης περίπτωσης της τρέχουσας παραγράφου 2.11

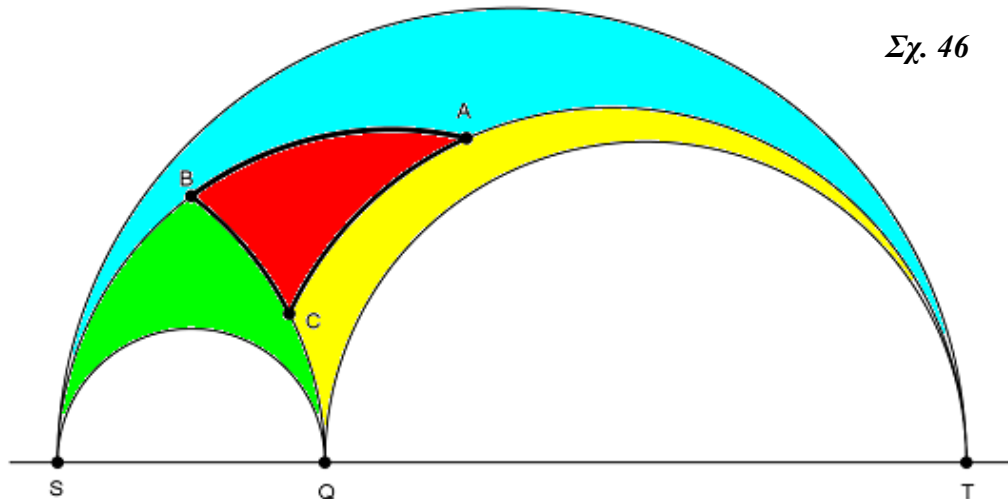
#### Θεώρημα 1

Αν  $ABC$  ένα τυχαίο τρίγωνο στο  $h$ -επίπεδο, τότε το εμβαδόν του τριγώνου αυτού δίνεται από τον τύπο:

$$E_H(ABC) = \pi - (A + B + C)$$

#### Απόδειξη

Πράγματι από το κατωτέρω σχήμα (Σχ.46) βλέπουμε ότι το τρίγωνο  $ABC$  περιβάλλεται από τρία ασυμπτωτικά τρίγωνα κι ακόμα όλα μαζί αποτελούν το ασυμπτωτικό τρίγωνο  $SQT$ . Τότε σύμφωνα με τον τύπο (3) της παρατήρησης 3 της τρέχουσας παραγράφου 2.11 θα είναι:



Σχ. 46

$$E_H(ABC) = E_H(SQT) - E_H(AST) - E_H(BSQ) - E_H(CQT) \Rightarrow$$

$$E_H(ABC) = \pi - [\pi - (\pi - A)] - [\pi - (\pi - B)] - [\pi - (\pi - C)] \Rightarrow$$

$$E_H(ABC) = \pi - (A + B + C)$$

### 2.12 Υπερβολικά πολύγωνα

Το υπερβολικό πολύγωνο είναι μια έννοια αντίστοιχη προς τη γνωστή έννοια του πολυγώνου στην Ευκλείδειο Γεωμετρία.

Ένα σημαντικό θεώρημα που ισχύει για τα απλά υπερβολικά πολύγωνα είναι το ακόλουθο:

#### Θεώρημα Gauss – Bonnet

Το εμβαδόν υπερβολικού πολυγώνου  $P$  με κορυφές  $A_1, A_2, \dots, A_n$  και γωνίες  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι ίσο με:

$$E_H(P) = (n - 2)\pi - (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \quad (1)$$

Το θεώρημα αυτό στην απλή του αυτή μορφή που παρατέθηκε ανωτέρω μπορεί να αποδειχθεί απλά, χωρίζοντας το πολύγωνο σε τρίγωνα και παίρνοντας το εμβαδόν κάθε τριγώνου χωριστά.

Στο θέμα αυτό υπάρχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το κανονικό υπερβολικό πολύγωνο είναι έννοια ανάλογη προς εκείνη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ένα δηλαδή κανονικό υπερβολικό πολύγωνο, είναι εκείνο το οποίο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Είναι

γνωστό ότι για να καλύψουμε μια επίπεδη επιφάνεια με πλακάκια σχήματος κανονικού πολυγώνου, στην Ευκλείδειο Γεωμετρία χρειαζόμαστε πλακάκια:

1. **Ισόπλευρα τρίγωνα**
2. **Κανονικά εξάγωνα**
3. **Τετράγωνα**

Στην Υπερβολική Γεωμετρία υπάρχουν πολλά είδη κανονικών πολυγώνων που μπορούν να καλύψουν μια συγκεκριμένη υπερβολική επιφάνεια.

Για το θέμα αυτό ας αναφέρουμε για παράδειγμα *τον κύκλο του Poincaré* το οποίο έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ας υποθέσουμε ότι  $a$  είναι η γωνία των κανονικών πολυγώνων με τα οποία μπορεί να καλυφθεί το συγκεκριμένο επίπεδο και έστω ακόμα  $k$  το πλήθος των κανονικών πολυγώνων (δηλαδή τα πλακάκια) που θα το καλύψουν.

Τότε:

$$ka = 2\pi$$

άρα:

$$a = \frac{2\pi}{k} \quad (2)$$

Το θεώρημα των **Gauss – Bonnet** σύμφωνα με τον τύπο (2) γίνεται:

$$E_H(P) = (n-2)\pi - n \cdot \frac{2\pi}{k}$$

Άρα θα πρέπει:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$$

Στη περίπτωση αυτή έχουμε περισσότερες δυνατότητες κάλυψης. Έτσι γνωστά κανονικά  $n$  – πολύγωνα που καλύπτουν κυκλικές επιφάνειες είναι τα εξής:

$$\text{Οκτάγωνα } n=8, k=4, \quad (8,4)$$

$$\text{Πεντάγωνα } n=5, k=4, \quad (5,4)$$

$$\text{Τετράγωνα } n=4, k=8, \quad (4,8) \text{ κλπ}$$

### 3. Η καμπύλη Tractrix και η γεωμετρική της σημασία στην Υπερβολική Γεωμετρία

#### 3.1 Εισαγωγικά

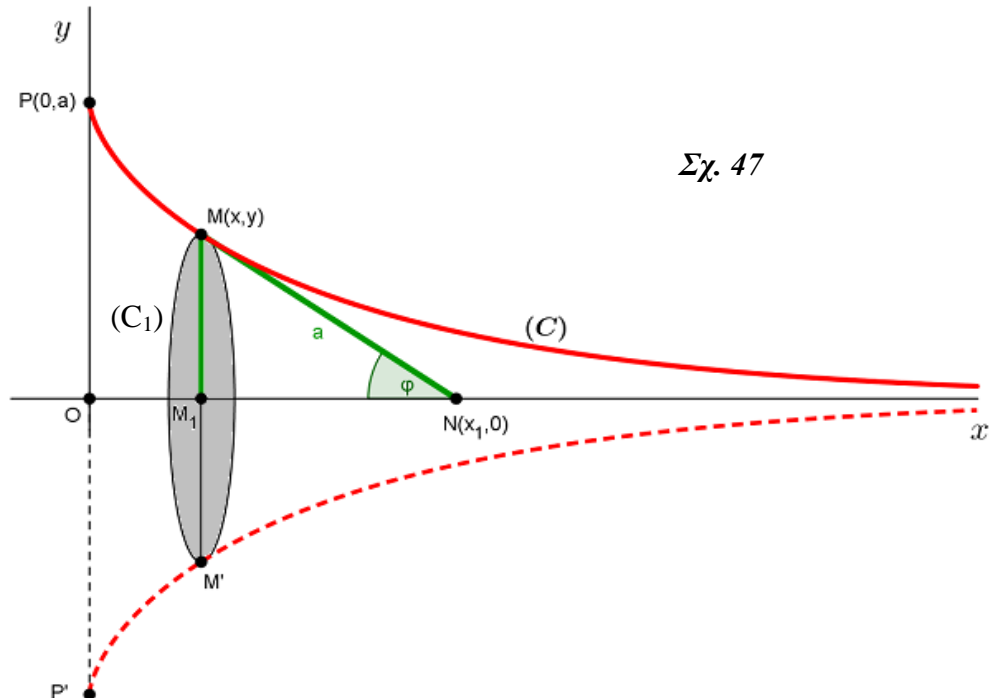
Ήδη στα μέσα του 19<sup>ου</sup> αιώνα είχε παγιωθεί ιδέα της υπερβολικής γεωμετρίας και από το 1868 ο Ιταλός Γεωμέτρης **E. Beltrami (1835-1899)** έθεσε το πρόβλημα, αν στον Ευκλείδειο χώρο μπορεί να βρεθεί επιφάνεια μη Ευκλείδεια και μάλιστα υπερβολική.

**O D. Hilbert** απέδειξε ότι δεν μπορεί να βρεθεί ένας ισομετρικός μετασχηματισμός ο οποίος να μπορεί να μετασχηματίζει τον  $H^2$  σε μια επιφάνεια εντός του Ευκλείδειου χώρου  $E^3$ .

Στον Ευκλείδειο χώρο πράγματι μπορούμε να κατασκευάσουμε ή και να βρούμε στο φυσικό κόσμο υπερβολικές επιφάνειες οι οποίες να αντιπροσωπεύουν ένα μικρό τμήμα του  $H^2$ . Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η επιφάνεια που παράγει μια επίπεδη καμπύλη, **η Tractrix**, με μια πλήρη περιστροφή γύρω από έναν άξονα.

#### 3.2 Μελέτη της ισοφαπτομενικής καμπύλης Tractrix.

Tractrix ή ισοφαπτομενική καμπύλη είναι μια επίπεδη καμπύλη ( $c$ ) η



Σχ. 47

οποία αναφερόμενη σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, εφάπτεται στο θετικό

άξονα  $Oy$  στο σημείο  $P(0, a)$ ,  $a > 0$  και ασυμπτωτικά με τα κοίλα προς τα πάνω τείνει στο  $+\infty$  του άξονα των  $x$ . (Σχ.47)

Ο όρος ισεφαπτομενική δηλώνει ότι αν φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης  $(c)$  σε ένα τυχαίο σημείο της  $M(x, y)$  τότε θα είναι:

$$MN = a = ct \quad (1)$$

όπου  $N$  το σημείο τομής της εφαπτομένης αυτής με τον άξονα των  $x$ .

Από το σχήμα 47 και από το ορθογώνιο τρίγωνο  $MM_1N$  προκύπτει:

$$\cos \phi = -\frac{x_1 - x}{a}$$

δηλαδή:

$$x_1 - x = -a \cos \phi \quad (2)$$

Αν στη συνέχεια περιστρέψουμε την καμπύλη  $(c)$  κατά μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των  $x$  τότε προκύπτει στον τρισδιάστατο χώρο μια επιφάνεια  $(\eta)$ .

### Θεώρημα 1

Η ολική καμπυλότητα της  $(\eta)$  σε κάθε σημείο της είναι:

$$k = -\frac{1}{a^2} \quad (3)$$

για παράδειγμα αν  $a = 1$  τότε  $k = -1$ .

#### Απόδειξη

Η ολική καμπυλότητα μιας επιφάνειας σε ένα σημείο  $M$  δίνεται από τον τύπο:

$$k = k_1 k_2 \quad (4)$$

όπου  $k_1, k_2$  οι *principal καμπυλότητες* της επιφάνειας  $(\eta)$  σε ένα τυχαίο σημείο της  $M$ .

Η καμπύλη  $(c)$  είναι η *mevidily* (μεσημβρινός) της  $(\eta)$  και η κάθετη τομή της  $(\eta)$ , η οποία άγεται από το σημείο  $M$  προς τον άξονα των  $x$  είναι ένας κύκλος  $(c_1)$ . Οι γραμμές  $(c), (c_1)$  είναι οι λεγόμενες *principals directions* της επιφάνειας  $(\eta)$ .

Η καμπυλότητα  $k_1$  σύμφωνα με το θεώρημα του *Mensnier* είναι η καμπυλότητα της γραμμής  $(c)$  και δίνεται από τον τύπο:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \phi}{y} \quad (5)$$

διότι:

$$y = R_1 \cos \phi \quad (6)$$

όπου  $R_1$  η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης ( $c$ ) στο σημείο  $M$ .

Αν στη συνέχεια θεωρήσουμε την  $y = y(x)$  ως την εξίσωση της καμπύλης ( $c$ ) τότε θα είναι:

$$\tan \phi = y' \quad (7)$$

και συνεπώς:

$$\cos \phi = -\left(1 + y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Η σχέση (5) σύμφωνα με τις (6), (7) και (8) γίνεται:

$$k_1 = \frac{-1}{y\left(1 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

Όμοια η γραμμή ( $c_1$ ) της επιφάνειας ( $\eta$ ) είναι μια *γαιοδειακή γραμμή*, κι έτσι η καμπυλότητα αυτής της γραμμής στο σημείο  $M$  είναι η δεύτερη από τις *principals καμπυλότητες*.

Έτσι είναι:

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Από τις (9) και (10) προκύπτει ότι:

$$k = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = -\frac{y''}{y\left(1 + y'^2\right)^2} \quad (11)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση της εφαπτομένης της ( $c$ ) στο σημείο  $M$  και αντικαταστήσουμε σ' αυτήν τις συντεταγμένες του σημείου τότε θα προκύψει:

$$0 - y = y'(x_1 - x)$$

ή ακόμα:

$$\frac{-y}{y'} = x_1 - x \quad (12)$$

Η σχέση (2) με τη (12) δίνουν:

$$\frac{y}{y'} = a \cos \phi \quad (13)$$

Τέλος η (8) με τη (13) δίνουν την ακόλουθη:

$$\frac{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y'} = a \quad (14)$$

ή ακόμα:

$$y'^2(a^2 - y^2) = y^2 \quad (15)$$

Παραγωγίζοντας και μετά τις αναγωγές προκύπτει η σχέση:

$$y'' = \frac{y'^2(1+y'^2)}{y} \quad (16)$$

Ακόμα η (11) σύμφωνα με την (16) γίνεται:

$$k = -\frac{y'^2}{y^2(1+y'^2)} \quad (17)$$

Τελικά η (17) σύμφωνα με την (14) γίνεται:

$$k = -\frac{1}{a^2}$$

δηλαδή η ζητούμενη (3).

### 3.3 Το μοντέλο $D^2$

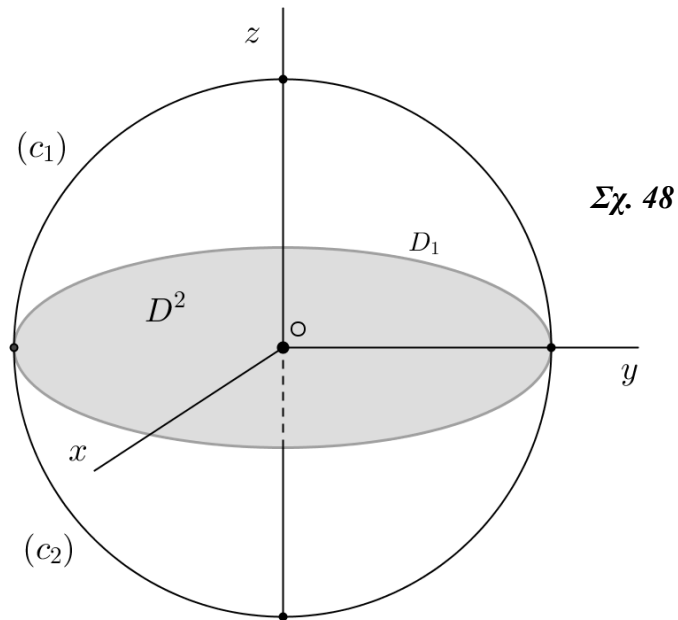
Έστω  $Oxyz$  ένα ορθοκανονικό Καρτεσιανό σύστημα στον  $E^3$  και η σφαίρα  $(C) = (O, 1)$ :

$$(C) : \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad (1)$$

Το επίπεδο  $p : \{z = 0\}$  χωρίζει τη σφαίρα αυτή σε δύο ημισφαίρια



ανοιχτά, τα  $(c_1)$  και  $(c_2)$ , όπου  $(c_1)$  το άνω του επιπέδου  $p$  ημισφαίριο,

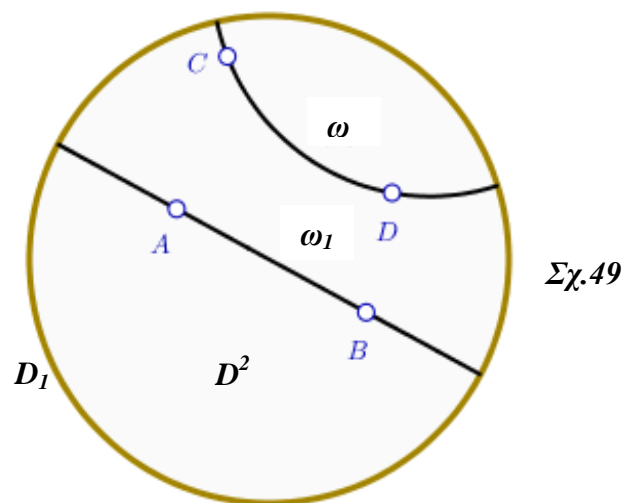


Σχ. 48

όπως αυτά φαίνονται στο ανωτέρω σχήμα (Σχ.48).

### Ορισμός

Ο ανοικτός δίσκος  $D^2 = (c_1) \cap p$  είναι το μοντέλο του Poincaré. Επίσης ονομάζουμε  $D_1$  τον κύκλο (περιφέρεια) του δίσκου  $D^2$ . Τέλος ευθεία του  $D^2$  λέγεται κάθε κύκλος  $\omega \in D^2$  ο οποίος είναι ορθογώνιος με τον  $D_1$  καθώς επίσης και κάθε διάμετρος του  $D_1$



Σχ.49

Στο σχήμα 49 (Σχ.49) φαίνεται ο δίσκος του Poincaré και δύο ευθείες του, η  $AB$  διάμετρος του κύκλου και η  $CD$  που ανήκει σε κύκλο που τέμνει το δίσκο του Poincaré ορθογώνια.

### Η μετρική στο δίσκο του Poincaré

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά στο μοντέλο  $D^2$  προσδιορίζονται από τη μετρική του Riemann και η οποία είναι:

$$dS_D^2 = \frac{4(dy_1^2 + dy_2^2)}{1 - (y_1^2 + y_2^2)}$$

όπου  $(y_1, y_2) \in D^2$

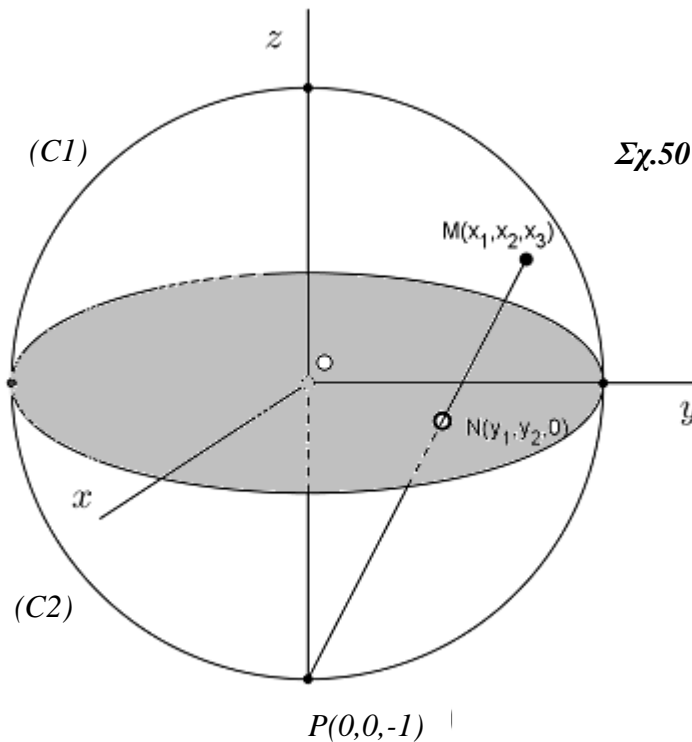
#### Θεώρημα 1:

Η μετρική που χαρακτηρίζει το δίσκο του Poincaré είναι η ακόλουθη:

$$dS_D^2 = \frac{4(dy_1^2 + dy_2^2)}{1 - (y_1^2 + y_2^2)} \quad (2)$$

#### Απόδειξη:

Εργαζόμαστε στο σχήμα 50 (Σχ.50) όπου εμφανίζεται η σφαίρα (1)



και έστω ένα τυχαίο σημείο  $M(x_1, x_2, x_3) \in c_1$  τέτοιο ώστε:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (3)$$

Θεωρούμε την αντιστροφή με πόλο το σημείο  $P(0,0,-1)$  και δύναμη το 2. Τότε προφανώς η εικόνα του σημείου  $M$  θα είναι το σημείο  $N = PM \cap D^2 = (y_1, y_2, 0)$  επί του δίσκου του Poincaré και για το οποίο θα ισχύει η γνωστή σχέση της αντιστροφής:

$$|\overrightarrow{PM}| |\overrightarrow{PN}| = 2 \quad (4)$$

όπου:

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2} \quad (5)$$

$$|\overrightarrow{PN}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1} \quad (6)$$

Ακόμα θα είναι:

$$\frac{|\overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{PN}|} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3 + 1}{1} \quad (7)$$

Από τη σχέση (7) εύκολα προκύπτει:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{|\overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{PN}|} = \frac{|\overrightarrow{PM}| |\overrightarrow{PN}|}{|\overrightarrow{PN}|^2} \stackrel{(4)}{=} \frac{2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}$$

Άρα:

$$x_1 = \frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \quad (8)$$

Όμοια προκύπτει ότι:

$$x_2 = \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \quad (9)$$

Εξάλλου η μετρική στον Ευκλείδειο χώρο  $E^3$  εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (10)$$

Δουλεύοντας τις ανωτέρω σχέσεις (3) μέχρι και (10) μπορεί κανείς να καταλήξει στην

$$dS_D^2 = \frac{4(dy_1^2 + dy_2^2)}{1 - (y_1^2 + y_2^2)}$$

δηλαδή στην ζητούμενη (2).

### 3.4 Το μοντέλο $D^n$ , $n=3,4,\dots$

Η γενίκευση της έννοιας του δίσκου του Poincaré σε χώρους  $n$  διαστάσεων γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Θεωρώντας τη σφαίρα:

$$(C) : \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

δημιουργούμε το δίσκο  $D^n$  μέσω αντιστροφής και στον οποίο λειτουργεί η ακόλουθη μετρική:

$$dS_D^2 = \frac{4(dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2)}{1 - (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)} = 4 \frac{\sum_{i=1}^n dy_i^2}{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

### 3.5 Το μοντέλο $H^3$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως θεωρούμε μια ανοιχτή σφαίρα με την εξής σχέση:

$$C = \{N \in E^2 / |\overrightarrow{ON}| < 1\}$$

όπου  $O$  ένα σταθερό σημείο του  $E^2$ . (Σχ.51)

Αν για το τυχαίο σημείο  $N$  της σφαίρας αυτής εφαρμοστεί η ίδια αντιστροφή που εφαρμόστηκε και για τα προηγούμενα μοντέλα, δηλαδή η αντιστροφή:

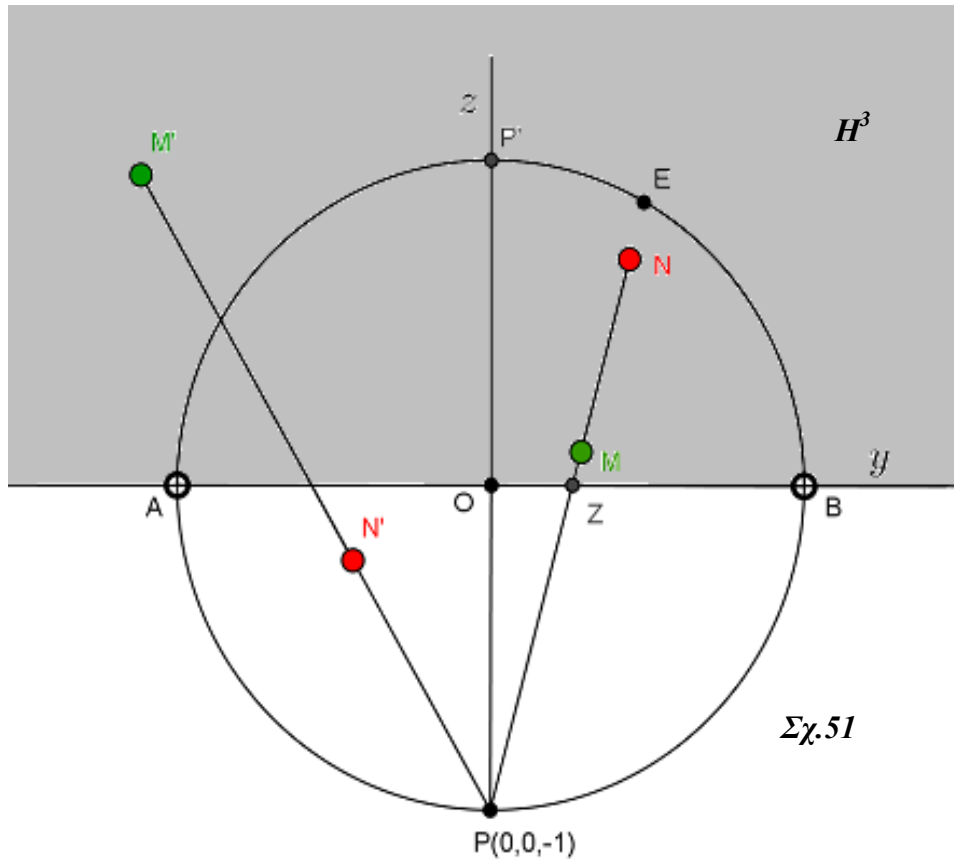
$$J_{(P, k^2=2)}$$

η οποία έχει κέντρο το σημείο  $P(0,0,-1)$  και δύναμη ίση με 2, τότε η εικόνα του σημείου αυτού  $N(y_1, y_2, y_3)$  θα είναι ένα νέο σημείο το  $M(z_1, z_2, z_3)$  με  $z_3 > 0$ .

Άρα ο χώρος  $H^3$  ο οποίος θα φιλοξενεί τις εικόνες των σημείων  $N$  θα

είναι ο ανοιχτός ημιχώρος που βρίσκεται υπεράνω του επιπέδου  $xOy$ . Θα είναι δηλαδή:

$$J_{(P, k^2=2)}(c) = H^3$$



Στο σχήμα 51 (**Σχ.51**) φαίνεται μια τομή της σφαίρας  $(c)$  και του χώρου  $H^3$  με το επίπεδο των  $yOz$ . Επίσης διακρίνονται δύο σημεία εντός της σφαίρας, τα  $N, N'$  καθώς και οι εικόνες αυτών  $M, M'$  αντίστοιχα τα οποία ανήκουν στο χώρο  $H^3$ .

Για τις συντεταγμένες των σημείων  $N$  και  $M$ , όπως και προηγούμενα, εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$y_i = \frac{2z_i}{z_1^2 + z_2^2 + (z_3 + 1)^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών και τη μετρική, όπως αυτή

δείχθηκε (*θεώρημα 1 της 3.3*), αποδειχεται ότι η μετρική του  $H^3$  θα είναι:

$$dS_H^2 = \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2}{y_3^2}$$

Τέλος όμοια εργαζόμενοι, όπως και στα προηγούμενα, βρίσκουμε ότι η μετρική στο χώρο  $H^n$  είναι:

$$dS_H^2 = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{z_n^2}$$

### Βιβλιογραφία

- [1] D.M.Y. Sommerville, The elements of non-Euclidean Geometry, Dover 1958
- [2] H.S.M. Coxeter, Non-Euclidean Geometry, Mathematical Association of America, 6th edition
- [3] C. Caratheodory, Theory of Functions, vol I Chelsea Pub. Company.
- [4] Arlan Ramsey, Robert D. Richtmyer, Introduction to Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag.
- [5] Henry Parker Manning, Introductory non- Euclidean Geometry, Dover
- [6] H. Meschkowski, Noneuclidean Geometry, Academic Press.
- [7] A.S. Smogovzhersky, Lobachevskian Geometry, Mir.
- [8] N.V. Etimov, Higher Geometry, Mir.
- [9] Elmer G. Rees, Notes on Geometry, Springer-Verlag.
- [10] Marvin Jay Greenberg, Euclidean and non-Euclidean Geometries, W.H. Freeman and Company
- [11] M. S. Klamkin – G. Tsintsifas, Triangles Inequalities in Euclidean, Elliptic and Hyperbolic Geometries, Scientia, vol 2(1988), pp 83-86.
- [12] M.S. Klamkin and A. Meir, Ptolemy's inequality, Chordal metric, multiplicative metric, Pacific journal of mathematics, vol 101, No 2, 1982.
- [13] Γ. Τσίντσιφας, Γεωμετρία 1, Γεωμετρία 3 (Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί).
- [14] T. M. Apostol, Ptolemy's inequality and Chordal Metric, Math. Magazine, vol.40, 1967 No 5, pp 233-235.
- [15] I. J. Schoenberg, A remark on M. M. Day's characterisation of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), pp 961-964.
- [16] D. A. Murvey, Spherical Trigonometry, Logmans.

- [17] N. A. Court, College Geometry, Barnes and Noble  
[18] R. A. Jonson, Advanced Euclidean Geometry, Dover

### **Λογισμικά**

*1º) Geogebra*

*2º) Cabri- geometry II*

*3º) Cabri 3D*

*4º) Carmetal*

