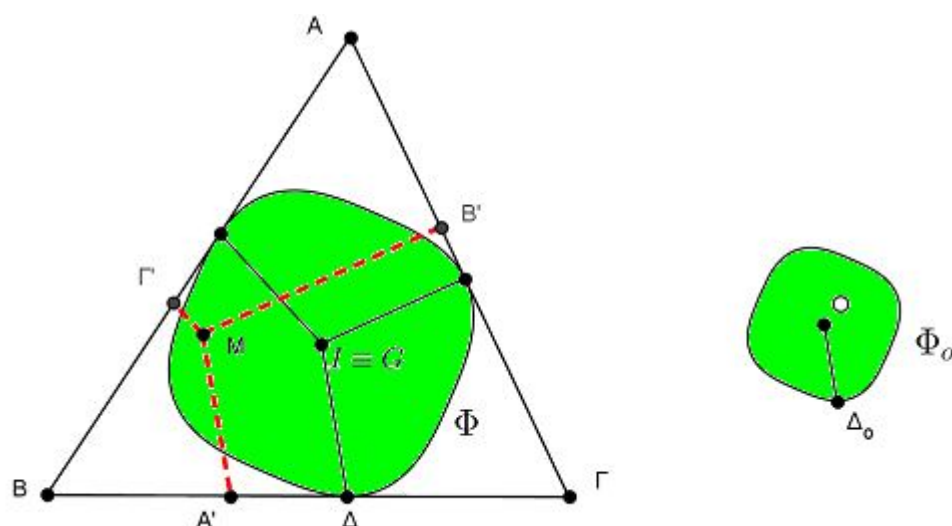


Εισαγωγή στη Γεωμετρία Minkowski



Δόρτσιος Κώστας, Μαθηματικός
Τσίντσιφας Γιώργος, Μαθηματικός

Περιεχόμενα:

1. Εισαγωγή. Σελ. 3.
2. Η μετρική της Γεωμετρίας Minkowski. Σελ. 4
3. Συμβολισμοί, βασικές έννοιες και θεωρήματα. Σελ. 8
 - 3.1 Κατασκευή του περιγεγραμμένου Minkowski κύκλου σε τρίγωνο ABΓ. Σελ. 8
 - 3.2. Κατασκευή του εγγεγραμμένου Minkowski κύκλου σε τρίγωνο ABΓ. Σελ. 11
 - 3.3 Απόσταση Minkowski σημείου από ευθεία. Σελ. 13
 - 3.4 Κατασκευή της Minkowski καθέτου. Σελ. 14
 - 3.5 Ισαπέχουσα ευθεία από τις πλευρές γωνίας. Σελ. 14
 - 3.6 Ισαπέχουσα καμπύλη από τα άκρα ευθ. τμήματος. Σελ. 15
 - 3.7 Μήκος γραμμής. Σελ. 16-21
4. Τρίγωνο. Σελ. 21-31
 4. 6 Το Special τρίγωνο. Σελ. 31
 4. 7 Το πρόβλημα του Ήρωνος. Σελ. 36-43
 - 4.8 Το πρόβλημα του Fermat. Σελ. 43-48
5. Κωνικές τομές. Σελ. 49-54.
6. Συμπληρωματικές προτάσεις. Σελ. 54- 57.
7. Βιβλιογραφία. Σελ. 58-59.

1.Εισαγωγή

Στη Γεωμετρία του Ευκλείδη το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος παραμένει σταθερό κατά την κίνησή του. Για το λόγο αυτό την Ευκλείδειο Γεωμετρία την χαρακτηρίζουμε ως **ισότροπο**. Εύλογη είναι η ερώτηση:

- Πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μη ισότροπη Γεωμετρία;
- Τι ιδιότητες έχει;

Ο **Herman Minkowski (1864-1909)** δημιούργησε τη Γεωμετρία των Αριθμών για να αντιμετωπίσει προβλήματα Θεωρίας Αριθμών. Μέσα στις πολλές καινούργιες έννοιες που εισήγαγε ήταν και η έννοια της **distance (ή radial) function**.

Αν είναι K ένα επίπεδο κεντροσυμμετρικό σχήμα κέντρου O και περιμέτρου (C) , για κάθε σημείο x του επιπέδου, ονομάζουμε distance function τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|\overrightarrow{Ox}|}{|\overrightarrow{Ox'}|}$$

όπου:

$$x' = (C) \cap Ox$$

Έστω τώρα AB ένα ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου και ότι $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{AB}$. Ο λόγος:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{Ox'}|}$$

ονομάζεται **Minkowski μέτρο** του AB . Με τον τρόπο αυτό ορίστηκε το μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB όχι μόνον με βάση το Ευκλείδειο μέτρο του αλλά και της διεύθυνσής του.

Η Γεωμετρία Minkowski είναι ιδιαίτερα σημαντική για δύο κυρίως λόγους. Κατ' αρχήν η Γεωμετρία αυτή είναι ένα καθαρό γεωμετρικό κατασκεύασμα με θεωρήματα και προβλήματα το οποίο καθίσταται ένα ισχυρό εργαλείο για τα Μαθηματικά και κατά δεύτερον αποτελεί την πρακτική εφαρμογή ενός τμήματος της Αλγεβρικής Γεωμετρίας η οποία αφορά πεπερασμένους Νορμικούς Χώρους (finite normed spaces).

Στη Γεωμετρία Minkowski ισχύει το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη, αλλά όμως δεν είναι Ευκλείδεια. Υπάρχουν τα όμοια τρίγωνα αλλά όχι το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ο χώρος είναι ομοπαράλληλικός (affine) και ο μοναδιαίος κύκλος είναι ένα κυρτό κεντροσυμμετρικό σχήμα με περίμετρο

μεταξύ 6 και 8.

Σημαντικός ερευνητής και δημιουργός του μεγαλύτερου μέρους της Γεωμετρίας αυτής είναι ο Γερμανός **Herbert Busemann** (1905-1994). Ένας ακόμα από τους πιο αξιόλογους ερευνητές είναι και ο Αγγλος **A. Thompson**, συγγραφέας του θαυμάσιου βιβλίου **Minkowski Geometry**. [11]

Αξιόλογες εργασίες έχουν δημοσιευθεί από τους **C. M. Petty, V. Davids, H. Eggleston, B. Phadke, C. D. Chakevian, P. Kelly, κ.ά.**

2. Η μετρική της Γεωμετρίας του Minkowski

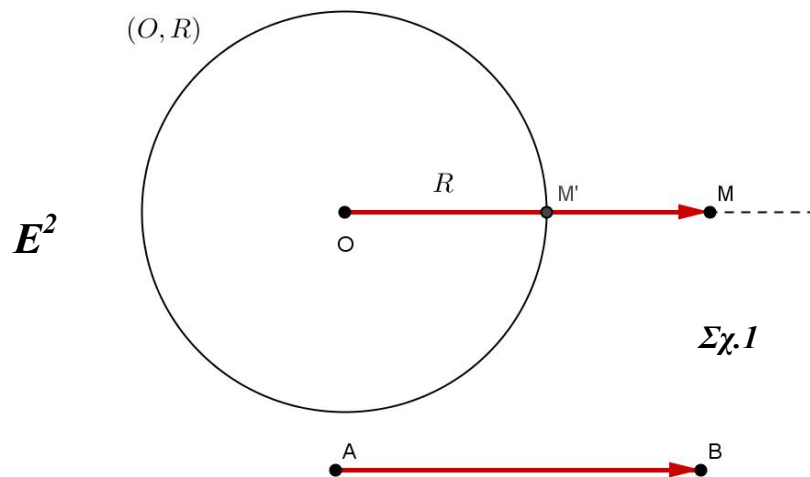
Θα προσπαθήσουμε να πλησιάσουμε με απλό τρόπο τη Γεωμετρία του Minkowski.

Ένα χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα μετριοούνται με μονάδα ένα ευθύγραμμο τμήμα ανεξάρτητα του προσανατολισμού.

Ας πούμε ότι έχουμε έναν κύκλο ακτίνας R , έστω τον (O, R) και AB ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου του κύκλου (**Σχ.1**). Θεωρούμε το σημείο M ώστε:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$$

και έστω M' το σημείο τομής της ημιευθείας OM και του κύκλου (O, R)

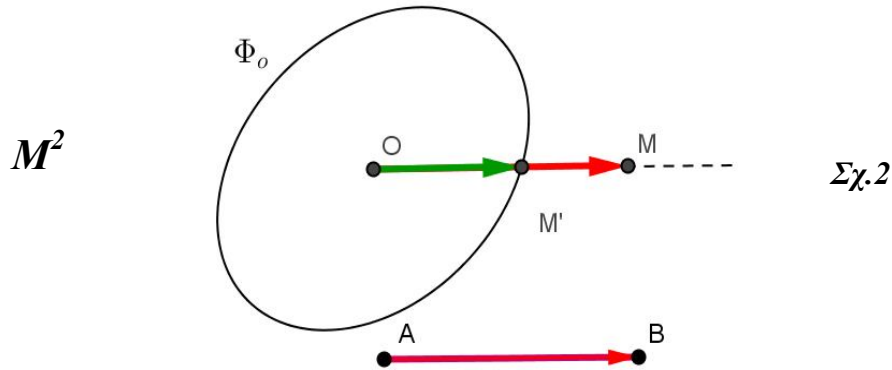


Τότε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OM'}|} = \frac{|\overrightarrow{OM}|}{R} \quad (1)$$

δηλαδή είναι ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές χωράει η ακτίνα R στο ευθύγραμμο τμήμα OM . Είναι προφανές από τον τύπο (1), ότι το $|\overline{AB}|$ είναι ανεξάρτητο από τη διεύθυνση του διανύσματος $\overline{AB}$.

Στη Γεωμετρία του Minkowski αντί του κύκλου (O, R) θεωρούμε



ένα **κυρτό κεντροσυμμετρικό σχήμα** Φ_o κέντρου O (Σχ.2). Το μέτρο του διανύσματος $\overline{AB}$ στη Γεωμετρία αυτή συνήθως συμβολίζεται με: $\|\overline{AB}\|$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$\|\overline{AB}\| = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{OM'}|} \quad (2)$$

Όπως φαίνεται κι από το σχήμα το μέτρο αυτό δεν είναι ανεξάρτητο από τη διεύθυνση του διανύσματος.

Με E^2 συμβολίζουμε το επίπεδο στην Ευκλείδειο Γεωμετρία και με M^2 το επίπεδο στη Γεωμετρία του Minkowski.

Στα θεωρήματα που θα επακολουθήσουν στο μεγαλύτερο μέρος θα θεωρούμε σιωπηρώς ότι η περίμετρος $\partial(\Phi_o)$ είναι smooth, δηλαδή σε κάθε σημείο της υπάρχει μία ακριβώς εφαπτομένη. Αυτό γίνεται για απλότητα των αποδείξεων σε πρώτη προσέγγιση της Minkowski Γεωμετρίας.

2.1 Ιδιότητες του μέτρου

Αν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι διανύσματα στο επίπεδο, σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου στην Γεωμετρία Minkowski ισχύει:

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$
2. $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$

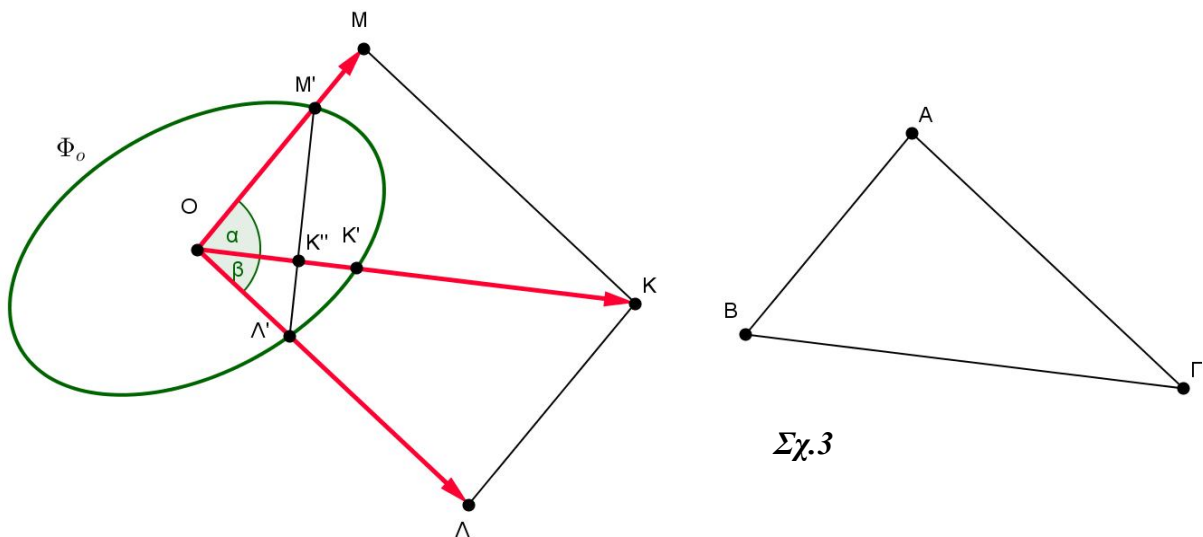
$$3. \|\vec{a}\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\|, \quad \text{για } a \in R$$

$$4. \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \quad (\text{τριγωνική ανισότητα})$$

Τα τρία πρώτα από τα τέσσερα αυτά αξιώματα των normed space, σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου στη Minkowski Γεωμετρία είναι αυταπόδεικτα. Ακόμα ότι ο M^2 είναι χώρος Complete είναι πολύ απλό, αν κανείς λάβει υπόψη του τον τρόπο με τον οποίο αυτός παράγεται από τον E^2 . Μένει προς απόδειξη το τέταρτο από τα ανωτέρω αξιώματα. Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο αξιολογες αποδείξεις.

1^η απόδειξη

Έστω $AB\Gamma$ τυχαίο τρίγωνο και ένα κυρτό κεντροσυμμετρικό σχήμα



Φ_o ως προς το οποίο αναφέρονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου αυτού. (Σχ.3)

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$\|\overrightarrow{A\Gamma}\| + \|\overrightarrow{AB}\| \geq \|\overrightarrow{B\Gamma}\| \quad (1)$$

Είναι προφανές ότι:

$$(\overrightarrow{OM'K'}) + (\overrightarrow{OK'\Lambda'}) \geq (\overrightarrow{OM'\Lambda'}) \quad (2)$$

όπου με (π) συμβολίζουμε το εμβαδόν του σχήματος π και

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{O\Lambda} = \overrightarrow{A\Gamma}, \quad \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{B\Gamma}$$

Η ανισότητα (2) γράφεται:

$$\frac{1}{2}|\overline{OM'}||\overline{OK'}|\eta\mu\alpha + \frac{1}{2}|\overline{OK'}||\overline{OL'}|\eta\mu\beta \geq \frac{1}{2}|\overline{OM'}||\overline{OL'}|\eta\mu(\alpha + \beta)$$

ή λόγω του ορισμού της απόστασης στο χώρο M^2 του Mikowski η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{2} \frac{|\overline{OM}||\overline{OK}|\eta\mu\alpha}{\|\overline{AB}\|\|\overline{B\Gamma}\|} + \frac{1}{2} \frac{|\overline{OK}||\overline{OL}|\eta\mu\beta}{\|\overline{B\Gamma}\|\|\overline{A\Gamma}\|} \geq \frac{1}{2} \frac{|\overline{OM}||\overline{OL}|\eta\mu(\alpha + \beta)}{\|\overline{A\Gamma}\|\|\overline{AB}\|} \quad (3)$$

Όμως:

$$\frac{1}{2}|\overline{OM}||\overline{OK}|\eta\mu\alpha = \frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{B\Gamma}|\eta\mu B = E(AB\Gamma)$$

Όμοια είναι:

$$\frac{1}{2}|\overline{OK}||\overline{OL}|\eta\mu\beta = \frac{1}{2}|\overline{OM}||\overline{OL}|\eta\mu(\alpha + \beta) = E(AB\Gamma)$$

Σύμφωνα με τις τελευταίες σχέσεις η (3) γίνεται:

$$\frac{1}{\|\overline{AB}\|\|\overline{B\Gamma}\|} + \frac{1}{\|\overline{B\Gamma}\|\|\overline{A\Gamma}\|} \geq \frac{1}{\|\overline{A\Gamma}\|\|\overline{AB}\|}$$

και με απαλοιφή των παρονομαστών τελικά είναι:

$$\|\overline{A\Gamma}\| + \|\overline{AB}\| \geq \|\overline{B\Gamma}\|$$

δηλαδή η (1).

Η ισότητα στην (1) ισχύει αν A, B, Γ είναι συνευθειακά, ή ακόμα αν τα σημεία M', K', L' είναι συνευθειακά.

2^η Απόδειξη

Αναφερόμενοι στο σχήμα 3, θέτουμε:

$$\|\overline{AB}\| = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{OM'}|} = \beta, \quad \|\overline{A\Gamma}\| = \frac{|\overline{OL}|}{|\overline{OL'}|} = \gamma, \quad \text{και} \quad \|\overline{B\Gamma}\| = \frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OK'}|} = \alpha$$

Έστω ακόμα ότι:

$$\overline{OK''} = \mu\overline{OM'} + \nu\overline{OL'}, \quad \mu\epsilon \quad \mu + \nu = 1$$

καθώς και:

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OK''}} = P \geq \frac{\overline{OK}}{\overline{OK'}} = \alpha \quad (1)$$

Άρα:

$$\mu\overline{OM'} + \nu\overline{OL'} = \frac{\overline{OK}}{P}$$

και:

$$\frac{\mu}{\beta} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{\nu}{\gamma} \cdot \overrightarrow{OL} = \frac{1}{P} (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL})$$

$$\frac{\mu}{\beta} = \frac{1}{P} \quad \text{και} \quad \frac{\nu}{\gamma} = \frac{1}{P} \Rightarrow \beta + \gamma = P \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\beta + \gamma \geq \alpha$$

και τελικά:

$$\|AG\| + \|AB\| \geq \|BG\|.$$

3. Συμβολισμοί, βασικές έννοιες, βασικά θεωρήματα.

Το ομοιόθετο ενός σχήματος P ως προς την αρχή O και λόγο λ θα συμβολίζεται με $\lambda \cdot P$. Ακόμα το ομόλογο του P κατά τη μεταφορά του κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ θα συμβολίζεται με $A + P$.

Αν τώρα Φ_o είναι ο μοναδιαίος Minkowski κύκλος, ο Minkowski κύκλος με κέντρο A και ακτίνα R θα είναι:

$$\Phi = A + R \cdot \Phi_o$$

και θα συμβολίζεται:

$$\Phi \equiv (A, \|R\|).$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν $AB\Gamma$ είναι ένα τυχαίο τρίγωνο, υπάρχει σημείο K και πραγματικό αριθμός R , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι εγγεγραμμένο στον Minkowski κύκλο:

$$\Phi = K + R \cdot \Phi_o$$

Ο Minkowski αυτός κύκλος Φ λέγεται ο **περιγεγραμμένος Minkowski κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$** και συμβολίζεται με:

$$(K, \|R\|).$$

Για τον παραπάνω κύκλο του Minkowski παραθέτουμε στη συνέχεια μια απόδειξη, όχι τόσο για την απόδειξη αυτή καθεαυτή, όσο για να δείξουμε τον τύπο των συλλογισμών που χρησιμοποιούνται καθώς επίσης και να διευκρινισθεί ότι το πρόβλημά μας στην ουσία δεν είναι πρόβλημα κατασκευής αλλά πρόβλημα υπάρξεως.

3.1. Κατασκευή

του περιγεγραμμένου Minkowski κύκλου σε τρίγωνο $AB\Gamma$

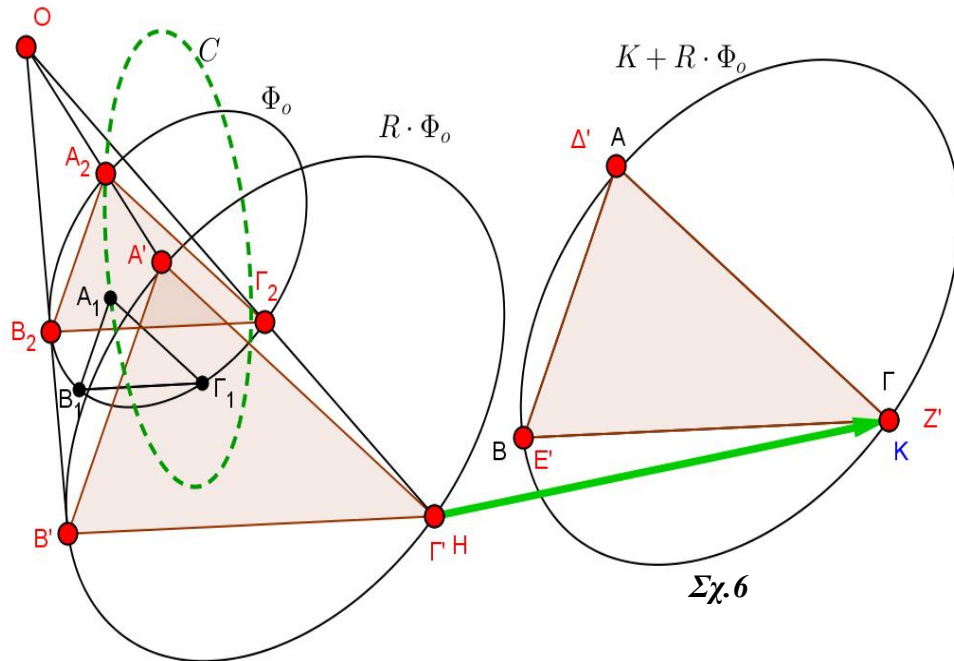
Minkowski Φ_o .

Στη συνέχεια θεωρώντας μια ομοιοθεσία με λόγο:

$$R = \frac{B\Gamma}{B_2\Gamma_2}$$

και με κέντρο ένα τυχαίο σημείο O του επιπέδου, μετασχηματίζουμε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ το οποίο είναι ίσο με το αρχικό $AB\Gamma$ καθώς επίσης και τον Φ_o στον $R \cdot \Phi_o$ ο οποίος είναι περιγεγραμμένος στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$. (Σχ.5)

Τέλος στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ και στον περιγεγραμμένο κύκλο $R \cdot \Phi_o$ εφαρμόζουμε μια παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο με $\overrightarrow{A'A}$ (στο σχήμα σημειώθηκε το ίσο του $\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$). (Σχ.6)



Η παράλληλη αυτή μεταφορά οδηγεί το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ σε σύμπτωση με το αρχικό $AB\Gamma$ και τον Φ_o στον $K + R \cdot \Phi_o$, όπου με K συμβολίζεται το πέρας ενός διανύσματος με αρχή την αρχή των αξόνων και ίσο με το ανωτέρω διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$.

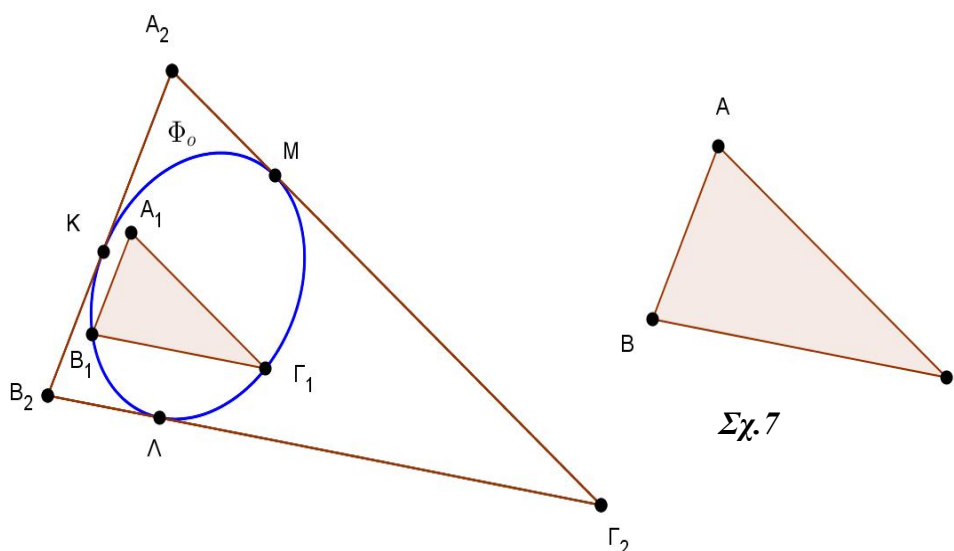
Είναι φανερό ότι με την ανωτέρω κατασκευή στο δοθέν τρίγωνο βρέθηκε ο περιγεγραμμένος κύκλος του Minkowski $K + R \cdot \Phi_o$ ή $(K, \|R\|)$.

3.2 Κατασκευή του εγγεγραμμένου Minkowski κύκλου σε τρίγωνο $AB\Gamma$

Είναι ακόμα εύκολο να δούμε και την κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου Minkowski.

Είναι εύκολο δηλαδή, να δούμε ότι υπάρχει r πραγματικός αριθμός και σημείο I του επιπέδου ώστε το κεντροσυμμετρικό σχήμα- κύκλος του Minkowski- $\Phi_I = I + r \cdot \Phi_o$ να είναι εγγεγραμμένο σε δοθέν τρίγωνο $AB\Gamma$.

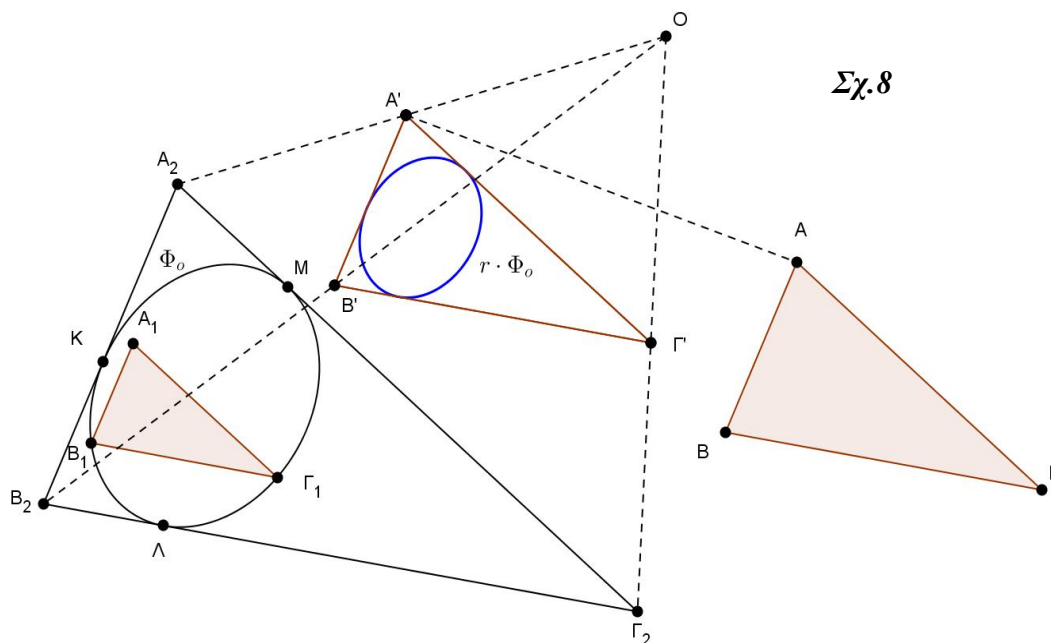
Για να φανεί αυτό θα εργαστούμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Θεωρούμε μια χορδή $B_1\Gamma_1$ του Φ_o παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ όμοιο προς το $AB\Gamma$. (Σχ. 7)



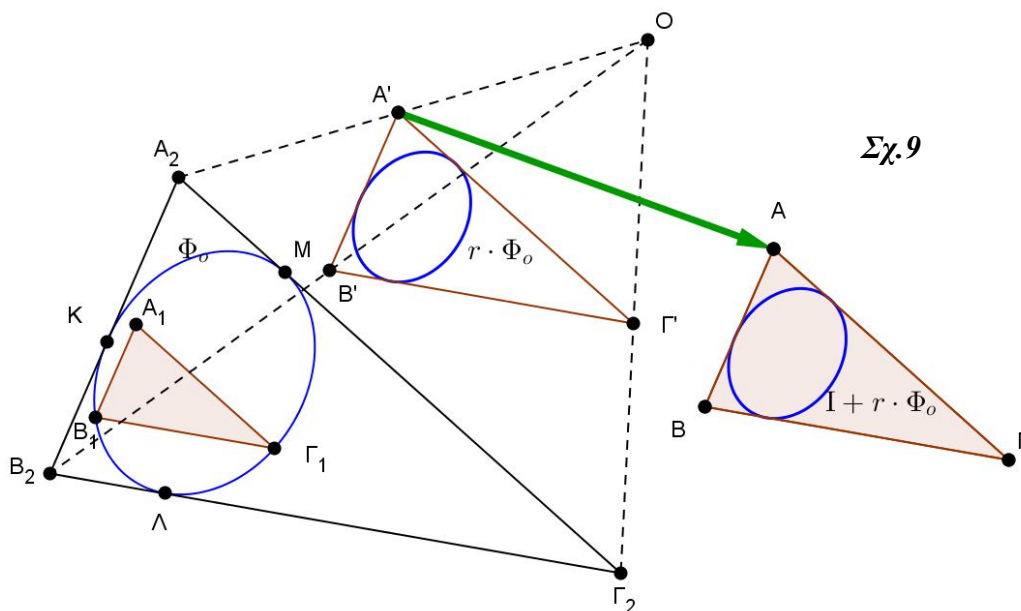
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τις πλευρές του $A_1B_1\Gamma_1$ καθώς επίσης και εφαπτόμενες στον κύκλο Minkowski Φ_o στα σημεία K, Λ, M . Προφανώς το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι όμοιο με το $AB\Gamma$.

Ακολουθώντας στο τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ και στον εγγεγραμμένο κύκλο Φ_o εφαρμόζουμε την ομοιοθεσία με λόγο $r = \frac{B\Gamma}{B_2\Gamma_2}$ και με κέντρο ένα τυχαίο σημείο O του επιπέδου.

Ο μετασχηματισμός αυτός οδηγεί το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ στη θέση του $A'B'\Gamma'$ καθώς και τον Φ_o στον $r \cdot \Phi_o$. (Σχ.8)



Τέλος στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ και στον εγγεγραμμένο κύκλο $r \cdot \Phi_o$ εφαρμόζουμε μια παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα ίσο με $\overline{A'A}$ (Σχ.9)



Η παράλληλη αυτή μεταφορά οδηγεί το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ σε σύμπτωση με το αρχικό $AB\Gamma$ και τον Φ_o στον $I+r\cdot\Phi_o$, όπου με I συμβολίζεται το πέρας ενός διανύσματος με αρχή την αρχή των αξόνων και ίσο με το ανωτέρω διάνυσμα $\overline{A'A}$.

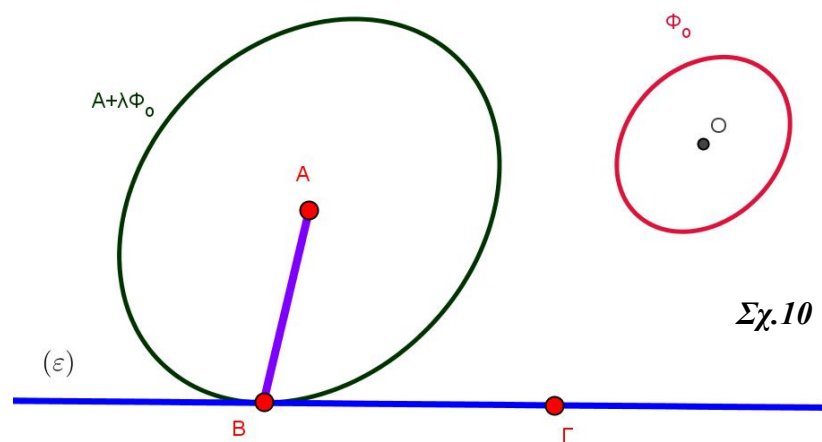
Είναι φανερό ότι με την ανωτέρω κατασκευή στο δοθέν τρίγωνο $AB\Gamma$ βρέθηκε ο εγγεγραμμένος κύκλος του Minkowski $I+r\cdot\Phi_o$ ή $(I, \|r\|)$.

Σημειώνεται ότι η κατασκευή του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$, οι πλευρές του οποίου εφάπτονται στο κεντροσυμμετρικό σχήμα Φ_o είναι δυνατή.

3.3 Απόσταση Minkowski ενός σημείου από δοθείσα ευθεία

Έστω ευθεία (ε) και σημείο A εκτός αυτής. (Σχ.10) Θεωρούμε τον Minkowski κύκλο $\Phi = A + \lambda \cdot \Phi_o$ ώστε η ευθεία (ε) να είναι εφαπτομένη στον Φ σε σημείο B . Τότε η AB λέγεται **Minkowski κάθετος από το A στην (ε)** και συμβολίζεται:

$$AB \perp (\varepsilon) \quad (1)$$



Σχ.10

Προφανώς, σύμφωνα με τα παραπάνω δεν ισχύει πάντα και το αντίστροφο. Δηλαδή όταν ισχύει η (1) δεν ισχύει πάντα ότι:

$$(\varepsilon) \perp AB \quad (2)$$

Σημείωση: Αν $AB \perp (\varepsilon)$ και $(\varepsilon) \perp AB$ τότε: $(\varepsilon) \overset{\perp}{M} AB$

Ορισμός:

Minkowski απόσταση του A από την (ε) λέγεται το τμήμα AB .

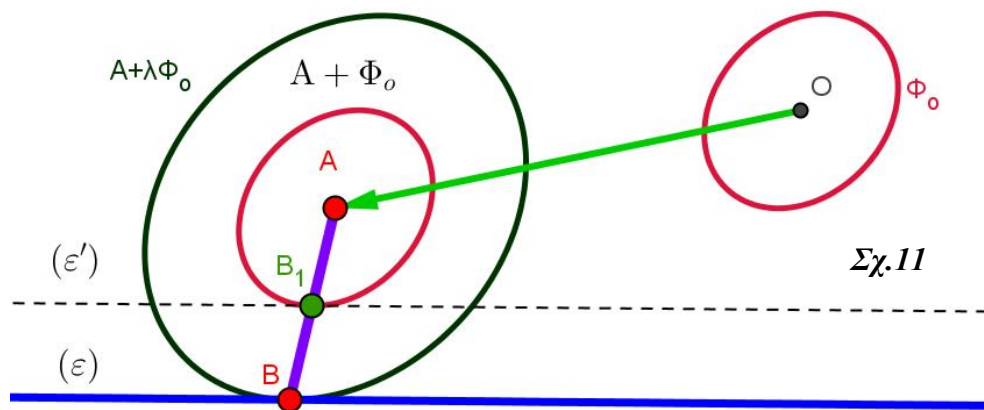
Εάν τώρα Γ τυχαίο σημείο της (ε) τότε είναι προφανές ότι:

$$\|A\Gamma\| > \|AB\|$$

3.4 Κατασκευή της Minkowski καθέτου

Για την κατασκευή της Minkowski καθέτου από το σημείο A προς τη δοθείσα ευθεία (ε) εργαζόμαστε ως εξής:

Μετακινούμε τον Φ_o κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ώστε να προκύψει ο $A + \Phi_o$. (Σχ.11)



Στη συνέχεια φέρουμε την εφαπτομένη (ε') στον $A + \Phi_o$ η οποία είναι παράλληλη προς τη δοθείσα (ε) . Ακολουθως θεωρούμε τον $A + \lambda\Phi_o$ ο οποίος είναι ο ομοιόθετος του $A + \Phi_o$, με λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = \frac{AB}{AB_1}$ και κέντρο το σημείο A .

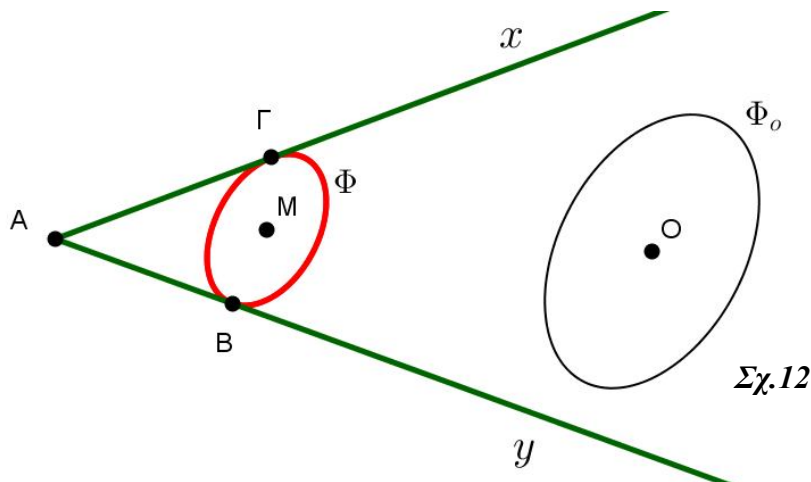
(Στην περίπτωση αυτή είναι: $\lambda(A + \Phi_o) = A + \lambda\Phi_o$)

3.5 Ισαπέχουσα ευθεία από τις πλευρές γωνίας

Έστω $\widehat{x\hat{A}y}$ μια τυχούσα γωνία και $(M, \|\rho\|)$ τυχαίος Minkowski κύκλος εγγεγραμμένος στη γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$. (Σχ.12)

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω οι Minkowski αποστάσεις του σημείου M από τις πλευρές της γωνίας είναι ίσες. Ακόμα ο

γεωμετρικός τόπος των σημείων M φαίνεται αμέσως ότι είναι η ευθεία AM_o όπου M_o τυχούσα αλλά ορισμένη θέση του σημείου M . Η ευθεία AM_o στη Γεωμετρία Minkowski θα λέγεται **ισαπέχουσα από τις πλευρές της γωνίας**. Βλέπουμε εδώ ότι η ισαπέχουσα γίνεται διχοτόμος της γωνίας

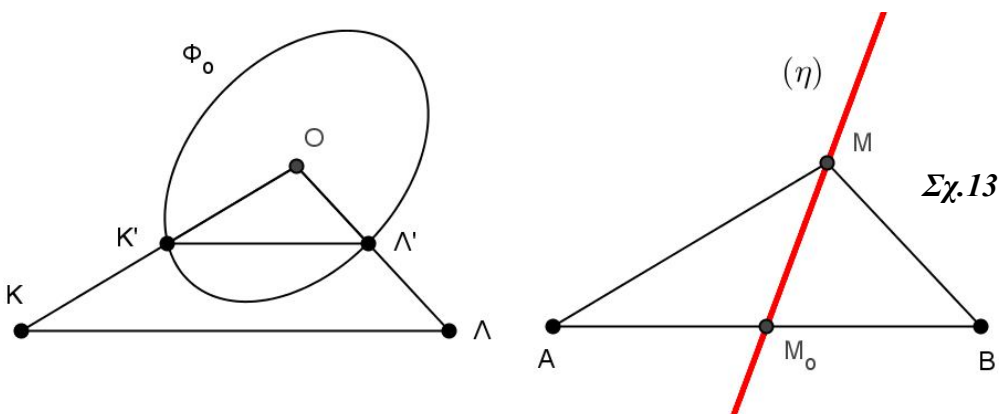


μόνο και μόνο όταν Φ_o είναι ένας ευκλείδειος κύκλος.

Από τα παραπάνω είναι πολύ εύκολο να παρατηρήσουμε ότι οι τρεις ισαπέχουσες από τις πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$ περνούν από το κέντρο του Minkowski εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

3.6 Ισαπέχουσα καμπύλη από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος

Τη μεσοκάθετο της Ευκλείδειου Γεωμετρίας στη Γεωμετρία Minkowski την αντικαθιστά μια καμπύλη (η) την οποία προσδιορίζουμε παρακάτω. (Σχ.13)



Έστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα και M σημείο τέτοιο ώστε:

$$\|MA\| = \|MB\| \quad (1)$$

Με αρχή το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου Φ_o του Minkowski θεωρούμε τα σημεία K, Λ τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MA} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{MB} \quad (2)$$

Προφανώς τότε θα είναι:

$$\widehat{KOL} = \widehat{AMB}$$

Ακόμα είναι:

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \frac{|\overrightarrow{OK}|}{|\overrightarrow{OK'}|} \quad \text{και} \quad \|\overrightarrow{MB}\| = \frac{|\overrightarrow{OL}|}{|\overrightarrow{OL'}|} \quad (3)$$

Η σχέση (3) λόγω των (1) και (2) δίνει:

$$KL // K'\Lambda'$$

Αν τώρα φανταστούμε την $K'\Lambda'$ μεταβλητή χορδή παράλληλη προς το τμήμα AB και το σημείο M τέτοιο ώστε $AM // OK'$ και $BM // OL'$, τότε το σημείο αυτό θα διαγράφει μια γραμμή (η) η οποία θα είναι ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων M για τα οποία θα είναι:

$$\|MA\| = \|MB\|$$

Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι οι τρεις αυτές ισαπέχουσες καμπύλες που αντιστοιχούν στις τρεις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι το κέντρο του Minkowski περιγεγραμμένου κύκλου περί το τρίγωνο $AB\Gamma$.

3.7 Μήκος γραμμής

Το μήκος κλειστής κυρτής γραμμής ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Πράγματι μπορούμε να πάρουμε μια ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων (Π_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\Pi_n = A_1A_2...A_n$ τα οποία είναι εγγεγραμμένα στην καμπύλη αυτή. Το Minkowski μήκος της περιμέτρου των πολυγώνων αυτών έχει όριο και το όριο αυτό ονομάζεται Minkowski μήκος της καμπύλης ή Minkowski περίμετρος αυτής.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι αν μια κλειστή καμπύλη (c) περιέχει την κυρτή καμπύλη (c') τότε το Minkowski μήκος της (c) είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο Minkowski μήκος της (c').

Αυτό συμβολίζεται:

$$\|L(c)\| \geq \|L(c')\|$$

3.7.1 Θεώρημα 1

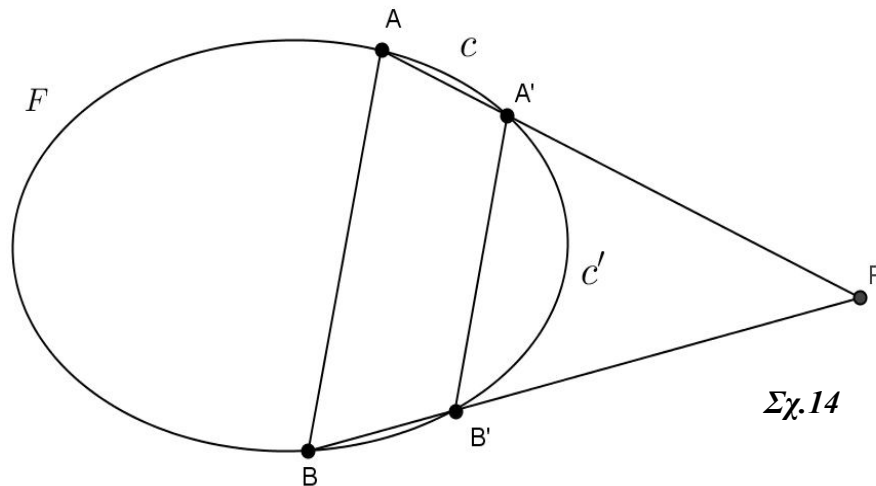
Επί της περιμέτρου ∂F κυρτού σχήματος F δίνονται τα σημεία A, B, A', B' τέτοια ώστε οι χορδές $AB, A'B'$ να είναι παράλληλες. Έστω ότι οι ευθείες AA', BB' τέμνονται εκτός του F στο σημείο P και ακόμα ότι τα τόξα $\widehat{AB} = c, \widehat{A'B'} = c'$ της ∂F είναι τέτοια ώστε $c \supset c'$, τότε:

$$\frac{\|L(c)\|}{\|A-B\|} \geq \frac{\|L(c')\|}{\|A'-B'\|}$$

όπου με το γράμμα M συμβολίζουμε τη διανυσματική ακτίνα $\overline{OM}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα κυρτό σχήμα F και τις δύο παράλληλες χορδές αυτού: $AB, A'B'$. (Σχ.14)



Η παραλληλία των χορδών αυτών σημαίνει, σύμφωνα και με τον συμβολισμό της εκφώνησης του θεωρήματος, ότι:

$$A - B = \mu(A' - B')$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα συμπεραίνεται ότι:

$$P = \frac{\mu A' - A}{\mu - 1} = \frac{\mu B' - B}{\mu - 1}$$

Άρα θα είναι:

$$P - A' = \frac{A' - A}{\mu - 1} \quad (1)$$

και

$$P - B' = \frac{B' - A}{\mu - 1} \quad (2)$$

Στη συνέχεια θα είναι:

$$\|L(c)\| \geq \|A - A'\| + \|B - B'\| + \|L(c')\| \quad (3)$$

Όμως από τις (1) και (2) θα είναι ακόμα:

$$\|A - A'\| = |\mu - 1| \|P - A'\|$$

$$\|B - B'\| = |\mu - 1| \|P - B'\|$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων θα προκύψει:

$$\|A - A'\| + \|B - B'\| = |\mu - 1| (\|P - A'\| + \|P - B'\|) \geq |\mu - 1| \|L(c')\| \quad (4)$$

Τέλος η σχέση (3) σύμφωνα με την (4) γίνεται:

$$\|L(c)\| \geq |\mu - 1| \|L(c')\| + \|L(c')\| \quad (5)$$

Αλλά δεχόμενοι το **Σχ.14**, δηλαδή ότι το σημείο P βρίσκεται στις ημιευθείες AA' και BB' με ακραία σημεία τα A, B θα είναι AB > A'B', δηλαδή $\mu > 1$.

Επομένως η σχέση (5) γίνεται:

$$\|L(c)\| \geq \mu \|L(c')\|$$

και τέλος:

$$\|L(c)\| \geq \frac{\|A - B\|}{\|A' - B'\|} \|L(c')\|$$

δηλαδή η ζητούμενη:

$$\frac{\|L(c)\|}{\|A - B\|} \geq \frac{\|L(c')\|}{\|A' - B'\|}$$

3.7.2 Πόρισμα

Αν A', B' σημεία της περιμέτρου $\mathcal{G}\Phi_o$ του μοναδιαίου Minkowski κύκλου Φ_o , τότε:

$$\|A' - B'\| \geq \frac{4\|L(c')\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|}$$

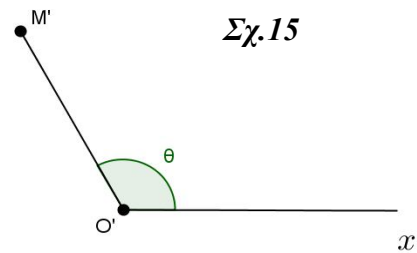
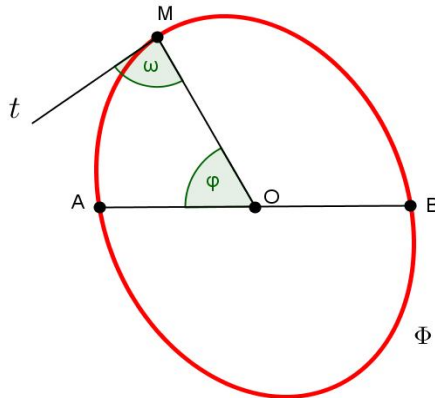
όπου c' το μικρότερο τόξο A'B'.

3.7.3 Λήμμα

Για κάθε κεντροσυμμετρικό σχήμα Φ υπάρχει περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμα του οποίου τα μέσα των πλευρών ανήκουν στην περίμετρο $\mathcal{G}\Phi$ του Φ .

Απόδειξη

Έστω σημείο $M \in \partial\Phi$ και θ η γωνία που σχηματίζει η OM με σταθερό άξονα $O'x$, $OM \parallel O'M'$. Φέρουμε την ευθεία AB η οποία έχει μια συγκεκριμένη θέση έστω για παράδειγμα ότι είναι παράλληλη με τον

**Σχ.15**

άξονα $O'x$.

Στο σημείο M φέρουμε την ημιευθεία Mt η οποία είναι εφαπτομένη του Φ στο σημείο M και η οποία σχηματίζει με την OM γωνία ω , ενώ η OM σχηματίζει με την OA γωνία ίση με ϕ .

Προφανώς οι γωνίες ω και ϕ είναι συνεχείς συναρτήσεις της γωνίας $\theta = \widehat{xO'M'}$. Είναι δηλαδή:

$$\omega = \omega(\theta) \quad \text{και} \quad \phi = \phi(\theta)$$

Υποθέτουμε ότι για τη συγκεκριμένη θέση του σημείου M , η οποία αντιστοιχεί στη γωνία θ_1 είναι:

$$\omega(\theta_1) + \phi(\theta_1) < \pi \quad (1)$$

Στη συνέχεια περιστρέφουμε το σημείο M αριστερόστροφα μέχρι να φθάσει στο σημείο B , το αντιδιαμετρικό του σημείου A . Έστω ακόμα ότι το τόξο που διέγραψε το σημείο M είναι: $\tau = \widehat{MB}$. Τότε η τιμή της γωνίας θ που αντιστοιχεί στη θέση αυτή θα είναι: $\theta_2 = \theta_1 + \tau$ και θα ισχύει:

$$\omega(\theta_1 + \tau) + \phi(\theta_1 + \tau) > \pi$$

Δηλαδή:

$$\omega(\theta_2) + \phi(\theta_2) > \pi \quad (2)$$

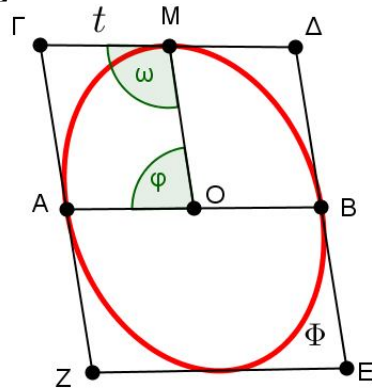
Άρα από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $\theta_o \in (\theta_1, \theta_2)$ τέτοιο ώστε:

$$\omega(\theta_o) + \phi(\theta_o) = \pi$$

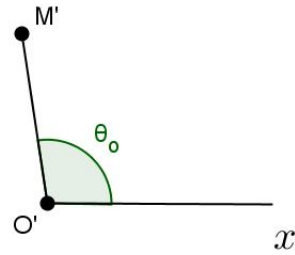
Αυτό σημαίνει ότι στη θέση αυτή θα είναι: $Mt \parallel AB$.

Αν τώρα φέρουμε τις εφαπτόμενες στο Φ στις θέσεις A , και B

προκύπτει το ζητούμενο παραλληλόγραμμο $\Gamma\Delta EZ$. (**Σχ.16**) Γενική απόδειξη στο [4]



Σχ.16



3.7.4 Θεώρημα 2

Αν Φ_o ο μοναδιαίος Minkowski κύκλος τότε είναι:

$$6 \leq \|L(\mathcal{G}\Phi_o)\| \leq 8$$

Απόδειξη

α') Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα υπάρχει περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο Π περί το Φ_o του οποίου τα σημεία επαφής (ή στηρίζεως) με το Φ_o είναι τα μέσα των αντιστοίχων πλευρών του παραλληλογράμμου. (Τετράγωνο Minkowski)

Η περίμετρος του Φ_o είναι μικρότερη από την αντίστοιχη του Π η οποία είναι ίση με 8.

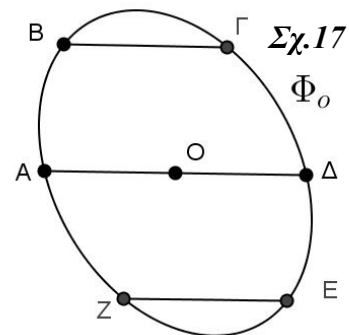
Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι η ισότητα:

$$\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\| = 8$$

αποδεικνύεται όταν και μόνον όταν το $\mathcal{G}\Phi_o$ είναι παραλληλόγραμμο. (**Βλέπε [3]**)

β') Είναι γνωστό ότι σε κάθε κυρτό σχήμα υπάρχει εγγεγραμμένο *affine κανονικό εξάγωνο*, το οποίο είναι η εικόνα κάθε κανονικού εξαγώνου μετά από έναν affine μετασχηματισμό. Ειδικά για το κεντροσυμμετρικό σχήμα υπάρχουν άπειρα εγγεγραμμένα affine κανονικά εξάγωνα και η απόδειξη είναι απλή.

Είναι αρκετό να πάρουμε μια διάμετρο $A\Delta$ (**Σχ.17**) και τις χορδές:



Σχ.17

$$B\Gamma // ZE = // \frac{A\Delta}{2}$$

Η Minkowski περίμετρος του Φ_o , δηλαδή η $\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|$, είναι μεγαλύτερη ή ίση της αντίστοιχης του εξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$ η οποία είναι ίση με 6.

Και εδώ η ισότητα $\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|=6$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο Φ_o πρέπει να είναι ένα affine κανονικό εξαγώνο. (Βλέπε [3])

4. Τρίγωνο

Πρόταση 4.1

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\Phi = (K, \|R\|)$.

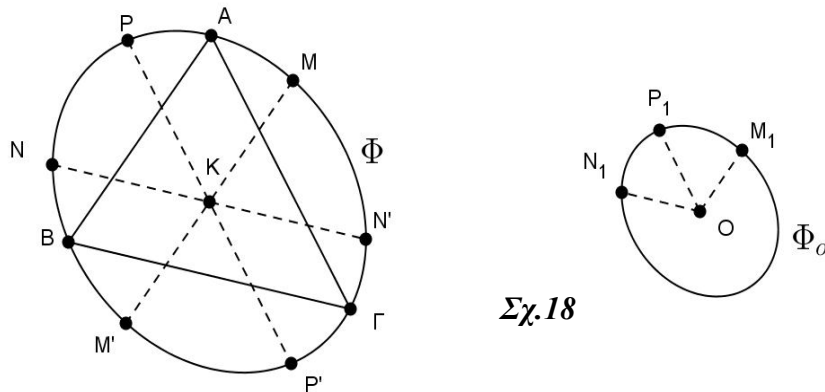
Τότε θα είναι:

$$2\|S\| = \|AB\| + \|B\Gamma\| + \|\Gamma A\| < 6\|R\|$$

όπου $\|S\|$ η Minkowski ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν πάρουμε υπόψη μας ότι η διάμετρος του Φ (Σχ.18) κατά τη διεύθυνση της AB περνάει από το κέντρο K του Φ , τότε



Σχ.18

μπορούμε να γράψουμε:

$$AB \leq 2 \cdot KM$$

κι ακόμα:

$$\frac{AB}{OM_1} \leq 2 \cdot \frac{KM}{OM_1} \quad (1)$$

Από την (1) αμέσως προκύπτει:

$$\|AB\| \leq 2\|R\| \quad (2)$$

Όμοια προκύπτουν και οι ακόλουθες δύο:

$$\|B\Gamma\| \leq 2\|R\| \quad (3)$$

$$\|\Gamma A\| \leq 2\|R\| \quad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$\|AB\| + \|B\Gamma\| + \|\Gamma A\| < 6\|R\|$$

Δηλαδή η ζητούμενη.

Παρατήρηση:

Η ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο για μια από τις τρεις παραπάνω σχέσεις.

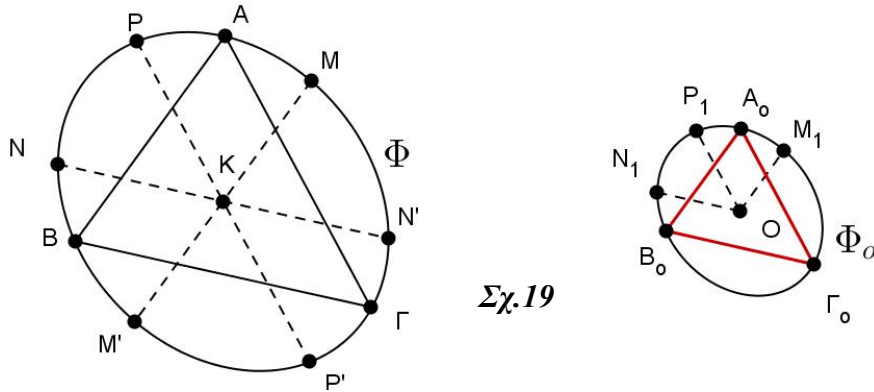
Πρόταση 4.2

Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε έναν Minkowski κύκλο $\Phi = (K, \|R\|)$ και που περιέχει το κέντρο K , είναι:

$$\|S\| > 2\|R\|$$

Απόδειξη

Έστω $A_oB_o\Gamma_o$ το ομοιόθετο του $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο Minkowski κύκλο Φ_o . (Σχ.19)



Σχ.19

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\|S_o\| > 2$$

όπου $\|S_o\|$ είναι η Minkowski ημιπερίμετρος του $A_oB_o\Gamma_o$.

Πράγματι, σύμφωνα με το πόρισμα 3.7.2 θα είναι:

$$\|A_oB_o\| \geq \frac{4\|S_{A_oB_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \quad (1)$$

όπου $S_{A_oB_o}$ το τόξο του Φ_o που αντιστοιχεί στη χορδή A_oB_o και δεν περιέχει το σημείο Γ_o .

Όμοια συμπεραίνονται και οι σχέσεις:

$$\|B_o \Gamma_o\| \geq \frac{4 \|S_{B_o \Gamma_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \quad (2)$$

$$\|\Gamma_o A_o\| \geq \frac{4 \|S_{\Gamma_o A_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|A_o B_o\| + \|B_o \Gamma_o\| + \|\Gamma_o A_o\| &\geq \frac{4 \|S_{A_o B_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} + \frac{4 \|S_{B_o \Gamma_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} + \frac{4 \|S_{\Gamma_o A_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \Rightarrow \\ 2 \|S_o\| &\geq \frac{4 \|S_{A_o B_o}\| + 4 \|S_{B_o \Gamma_o}\| + 4 \|S_{\Gamma_o A_o}\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \Rightarrow \|S_o\| \geq \frac{2 \|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|}{\|L(\mathcal{G}\Phi_o)\|} \Rightarrow \|S_o\| \geq 2 \end{aligned}$$

δηλαδή η ζητούμενη.

Πρόταση 4.3

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

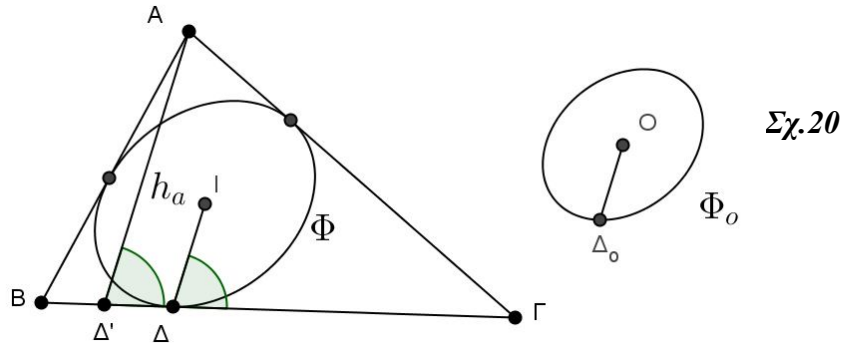
$$\|h_\alpha\| + \|h_\beta\| + \|h_\gamma\| \geq 9 \|r\|$$

όπου $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ τα Minkowski ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ και $(I, \|r\|)$ ο εγγεγραμμένος Minkowski κύκλος στο $AB\Gamma$.

Απόδειξη

Είναι (Σχ.20)

$$\|h_\alpha\| = \frac{A\Delta'}{O\Delta_o} = \frac{A\Delta'}{I\Delta} = \|r\| \frac{A\Delta'}{I\Delta}$$



Η τελευταία σχέση γράφεται ακόμα:

$$\frac{1}{\|h_\alpha\|} = \frac{1}{\|r\|} \cdot \frac{(B\Gamma)}{(AB\Gamma)} \quad (1)$$

Όμοια προκύπτει:

$$\frac{1}{\|h_\beta\|} = \frac{1}{\|r\|} \cdot \frac{(ΓΑ)}{(AB\Gamma)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\|h_\gamma\|} = \frac{1}{\|r\|} \cdot \frac{(A\Gamma)}{(AB\Gamma)} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{1}{\|h_\alpha\|} + \frac{1}{\|h_\beta\|} + \frac{1}{\|h_\gamma\|} = \frac{1}{\|r\|} \quad (4)$$

Όμως από τη γνωστή ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9, \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

και από την (4) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\|h_\alpha\| + \|h_\beta\| + \|h_\gamma\|) \left(\frac{1}{\|h_\alpha\|} + \frac{1}{\|h_\beta\|} + \frac{1}{\|h_\gamma\|} \right) &\geq 9 \Rightarrow \\ \|h_\alpha\| + \|h_\beta\| + \|h_\gamma\| &\geq 9\|r\| \end{aligned}$$

δηλαδή η ζητούμενη.

Πρόταση 4.4

Αν M τυχαίο εσωτερικό σημείο εντός τριγώνου $AB\Gamma$ και μ_1, μ_2, μ_3 οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του κέντρου I του εγγεγραμμένου Minkowski κύκλου $(I, \|r\|)$ τότε:

$$\mu_1 \|AM\| + \mu_2 \|BM\| + \mu_3 \|GM\| \geq 2\|r\|$$

Απόδειξη

Στο σχήμα (Σχ.21) και για τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες ισχύει:

$$\mu_1 = \frac{I\Delta'}{A\Delta} = \frac{I\Delta' : O\Delta_o}{A\Delta : O\Delta_o} = \frac{\|r\|}{\|h_\alpha\|} \quad (1)$$

Όμοια είναι:

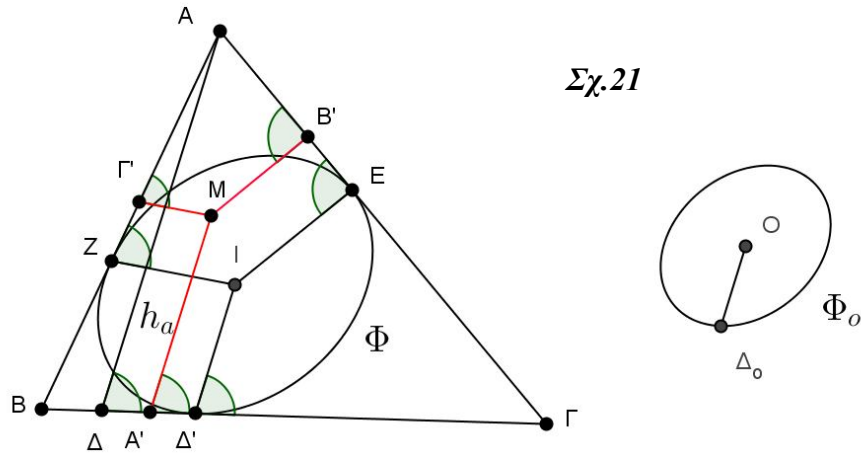
$$\mu_2 = \frac{\|r\|}{\|h_\beta\|}, \quad \mu_3 = \frac{\|r\|}{\|h_\gamma\|} \quad (2)$$

Όμως:

$$\frac{\|MA'\|}{\|h_a\|} = \frac{(BM\Gamma)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{\|MB'\|}{\|h_\beta\|} = \frac{(AM\Gamma)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{\|M\Gamma'\|}{\|h_\gamma\|} = \frac{(AMB)}{(AB\Gamma)}$$

και με άθροιση αυτών εύκολα προκύπτει:

$$\frac{\|MA'\|}{\|h_a\|} + \frac{\|MB'\|}{\|h_\beta\|} + \frac{\|M\Gamma'\|}{\|h_\gamma\|} = 1 \quad (3)$$



Σχ.21

Από τις (1),(2) και (3) προκύπτει:

$$\mu_1 \|MA'\| + \mu_2 \|MB'\| + \mu_3 \|M\Gamma'\| = \|r\| \quad (4)$$

Ακόμα είναι προφανές ότι:

$$\|AM\| + \|MA'\| \geq \|h_a\|$$

κι ακόμα:

$$\mu_1 \|AM\| + \mu_1 \|MA'\| \geq \mu_1 \|h_a\| = \|r\|$$

δηλαδή:

$$\mu_1 \|AM\| + \mu_1 \|MA'\| \geq \|r\| \quad (5)$$

Όμοια

$$\mu_2 \|BM\| + \mu_2 \|MB'\| \geq \|r\| \quad (6)$$

και

$$\mu_3 \|GM\| + \mu_3 \|M\Gamma'\| \geq \|r\| \quad (7)$$

Αθροίζοντας τέλος κατά μέλη τις (5),(6) και (7) και έχοντας υπόψη την (4) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\Sigma \mu_1 \|AM\| + \Sigma \mu_1 \|MA'\| &\geq 3\|r\| \Rightarrow \\ \Sigma \mu_1 \|AM\| + \|r\| &\geq 3\|r\| \Rightarrow \\ \Sigma \mu_1 \|AM\| &\geq 2\|r\|\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mu_1 \|AM\| + \mu_2 \|BM\| + \mu_3 \|GM\| \geq 2\|r\| \quad (8)$$

που είναι η ζητούμενη.

Παρατηρήσεις:

1η) Όταν το σημείο M είναι εκτός του τριγώνου και μέσα στη γωνία A , τότε η ανισότητα (8) εξακολουθεί να ισχύει με την ίδια απόδειξη. Άρα, σαν πόρισμα για $M \equiv K$, όπου K το περίκεντρο του τριγώνου (*Minkowski περιγεγραμμένος κύκλος*), προκύπτει η γενίκευση στο Minkowski επίπεδο (M^2) της γνωστής ανισότητας του Euler:

$$\|R\| \geq 2\|r\| \quad (9)$$

διότι τότε είναι: $\|AM\| = \|BM\| = \|GM\| = \|R\|$ κι αφού οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, άρα από την (8) προκύπτει η (9).

2η) Όλα τα παραπάνω γενικεύονται στον M^n , σε $n-Simplex$. (*Βλέπε [5]*)

3η) Η ισότητα στη σχέση (8) ισχύει όταν τα ύψη περνούν από το ίδιο σημείο H και ακόμα όταν το σημείο αυτό H ταυτίζεται με το κέντρο K του περιγεγραμμένου Minkowski κύκλου $(K, \|R\|)$.

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε την ακόλουθη αξιολόγηση απόδειξης της ανισότητας του Euler:

Ανισότητα του Euler

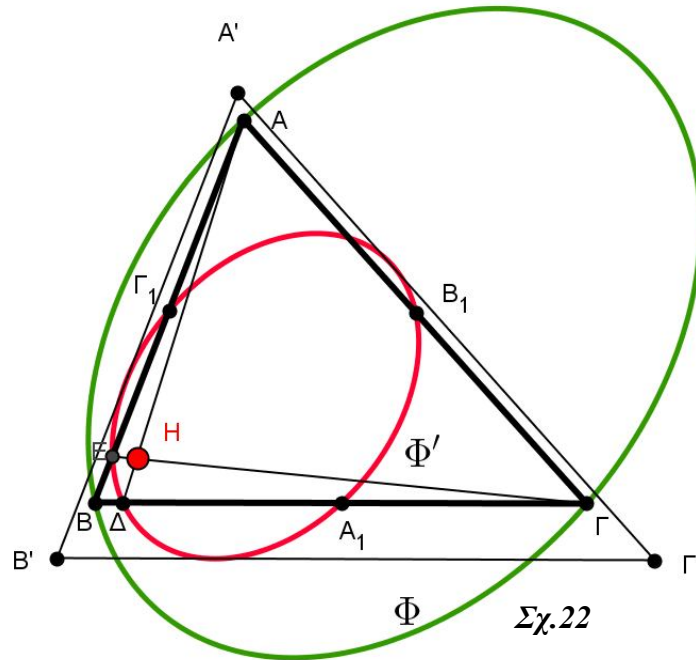
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ του M^2 ισχύει:

$$\|R\| \geq 2\|r\|$$

όπου R, r οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου στο τρίγωνο αυτό κύκλου.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τα μέσα A_1, B_1, Γ_1 των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$ (**Σχ.22**) του τριγώνου $AB\Gamma$. Ο Minkowski περιγεγραμμένος κύκλος Φ' του



τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ομοιόθετος του Minkowski κύκλου $\Phi = (K, \|R\|)$ ως προς κέντρο ομοιοθεσίας το H που είναι το σημείο τομής των υψών $A\Delta$ και ΓE του τριγώνου $AB\Gamma$ και με λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = \frac{1}{2}$. Άρα η

ακτίνα του Minkowski κύκλου Φ' είναι $\frac{\|R\|}{2}$

Στη συνέχεια φέρουμε τις παράλληλες ευθείες στήριξης(εφαπτόμενες) του Φ' προς της πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$, οι οποίες τεμνόμενες σχηματίζουν το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$.

Ο Minkowski κύκλος Φ' είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ το οποίο περιέχει το $AB\Gamma$. Άρα:

$$\frac{\|R\|}{2} \geq \|r\|$$

και συνεπώς:

$$\|R\| \geq 2\|r\|$$

Σημείωση: Η απόδειξη ισχύει και σε Simplex στον M^n .

$$\|MA'\| + \|MB'\| + \|M\Gamma'\| = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} \right) \|r\| \quad (4)$$

Όμως:

$$\|AM\| + \|MA'\| \geq \|h_\alpha\| = \frac{\|r\|}{\mu_1} \Rightarrow \|AM\| + \|MA'\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_1} \quad (5)$$

Όμοια είναι:

$$\|BM\| + \|MB'\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_2} \quad (6)$$

$$\|GM\| + \|M\Gamma'\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_3} \quad (7)$$

Προσθέτοντας τις (5), (6), (7) κατά μέλη προκύπτει:

$$\|AM\| + \|MA'\| + \|BM\| + \|MB'\| + \|GM\| + \|M\Gamma'\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_1} + \frac{\|r\|}{\mu_2} + \frac{\|r\|}{\mu_3}$$

ή ακόμα:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|GM\| + \|MA'\| + \|MB'\| + \|M\Gamma'\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_1} + \frac{\|r\|}{\mu_2} + \frac{\|r\|}{\mu_3}$$

και τέλος σύμφωνα με την (4) θα είναι:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|GM\| + \|r\| \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} \right) \geq \frac{\|r\|}{\mu_1} + \frac{\|r\|}{\mu_2} + \frac{\|r\|}{\mu_3}$$

άρα:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|GM\| \geq \frac{\|r\|}{\mu_1} + \frac{\|r\|}{\mu_2} + \frac{\|r\|}{\mu_3} - \|r\| \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} \right)$$

Δηλαδή:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|GM\| \geq \|r\| \left(\frac{1-\lambda_1}{\mu_1} + \frac{1-\lambda_2}{\mu_2} + \frac{1-\lambda_3}{\mu_3} \right)$$

και τέλος:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|GM\| \geq \|r\| \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\mu_1} + \frac{\lambda_3 + \lambda_1}{\mu_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_3} \right)$$

Δηλαδή η ζητούμενη.

Παρατηρήσεις

1η) Αν το M ταυτίζεται με το βαρύκεντρο G του ABΓ τότε:

$$\alpha) \quad \|AG\| + \|BG\| + \|GG\| \geq \frac{2}{3}\|r\| \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right) \quad (1)$$

$$\beta) \quad \|AG\| + \|BG\| + \|GG\| \geq 6\|r\| \quad (2)$$

Απόδειξη της (2)

$$\begin{aligned} \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| \left(3 + \frac{1}{\mu_1} - 1 + \frac{1}{\mu_2} - 1 + \frac{1}{\mu_3} - 1 \right) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| \left(3 + \frac{1-\mu_1}{\mu_1} + \frac{1-\mu_2}{\mu_2} + \frac{1-\mu_3}{\mu_3} \right) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| \left(3 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_1} + \frac{\mu_3 + \mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_3} \right) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| \left(3 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_3} + \frac{\mu_3}{\mu_2} \right) + \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right) \right) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq \frac{2}{3}\|r\| (3 + 2 + 2 + 2) \Rightarrow \\ \Sigma \|AG\| &\geq 6\|r\| \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|AG\| + \|BG\| + \|GG\| \geq 6\|r\|$$

Η οποία είναι η ζητούμενη (2).

2η) Αν $M \equiv I$ (έγκεντρο του ABΓ) πάλι προκύπτει:

$$\|AI\| + \|BI\| + \|GI\| \geq 6\|r\|$$

παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\frac{I\Delta}{A\Delta'} = \frac{\|r\|}{\|h_\alpha\|} = \mu_1 = \frac{1}{3}$$

άρα:

$$\|h_\alpha\| = 3\|r\|$$

Όμοια δείχνεται ότι:

$$\|h_\beta\| = \|h_\gamma\| = 3\|r\|$$

Άρα:

$$\|h_\alpha\| = \|h_\beta\| = \|h_\gamma\| = 3\|r\|$$

όπου:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$$

οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του σημείου G

Πρόταση 4.6.2

Για κάθε σημείο M που ανήκει εσωτερικά σε ένα Special τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|\Gamma M\| \geq 6\|r\|$$

Απόδειξη

Είναι συνέπεια της σχέσης (8) της πρότασης 4.4

Πρόταση 4.6.3

Αν από τυχαίο σημείο M εσωτερικό ενός Special τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τις Minkowski κάθετες MA' , MB' , $M\Gamma'$ αντίστοιχα προς τις πλευρές $B\Gamma$, ΓA , AB του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε:

$$\|MA'\| + \|MB'\| + \|M\Gamma'\| = ct$$

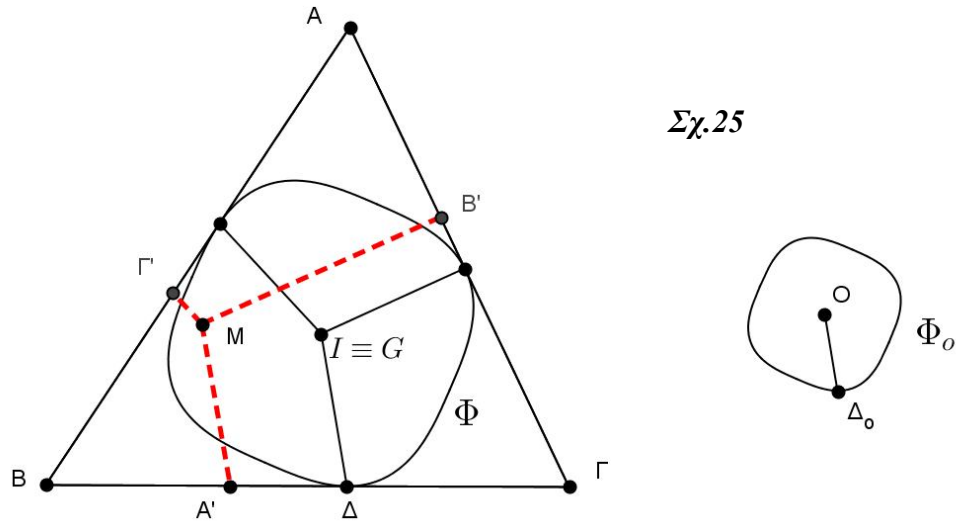
Απόδειξη

Πράγματι (Σχ.25) από τη σχέση (4) της πρότασης 4.4 προκύπτει:

$$\mu_1 \|MA'\| + \mu_2 \|MB'\| + \mu_3 \|M\Gamma'\| = \|r\| \quad (1)$$

Αν τώρα πάρουμε υπόψη μας ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Special, δηλαδή $G \equiv I$. Τότε θα είναι:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$$



Σχ.25

και συνεπώς η (1) γίνεται:

$$\|MA'\| + \|MB'\| + \|M\Gamma'\| = 3\|r\| = ct$$

Παρατήρηση:

Ακόμα λόγω της **πρότασης 6.1** η σταθερή αυτή τιμή είναι το κοινό μήκος των υψών του Special τριγώνου, δηλαδή:

$$\|MA'\| + \|MB'\| + \|M\Gamma'\| = \|h_\alpha\| = \|h_\beta\| = \|h_\gamma\|$$

Πρόταση 4.6.4

Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι ευκλείδειες αποστάσεις του I (έγκεντρο) από τις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ενός Special τριγώνου $AB\Gamma$ και $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα αντίστοιχα στις $B\Gamma, \Gamma A, AB$, τότε

$$\frac{\vec{u}_1}{\rho_1} + \frac{\vec{u}_2}{\rho_2} + \frac{\vec{u}_3}{\rho_3} = \vec{0} \quad (1)$$

και αντιστρόφως: Αν ισχύει η (1) τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι Special.

Απόδειξη

Επειδή $G \equiv I$, θα είναι:

$$\alpha\rho_1 = \beta\rho_2 = \gamma\rho_3 = 2E(AB\Gamma)/3 = c \quad (1)$$

όπου α, β, γ τα μήκη αντίστοιχα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$ του $AB\Gamma$. (Ευκλείδειος Χώρος)

Επίσης είναι γνωστό (*) ότι είναι:

$$\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 = \vec{0} \quad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{c}{\rho_1} \vec{u}_1 + \frac{c}{\rho_2} \vec{u}_2 + \frac{c}{\rho_3} \vec{u}_3 = \vec{0} \quad \xRightarrow{c \neq 0} \quad \frac{\vec{u}_1}{\rho_1} + \frac{\vec{u}_2}{\rho_2} + \frac{\vec{u}_3}{\rho_3} = \vec{0}$$

δηλαδή η ζητούμενη.

(*) **Σημείωση:**

Η απόδειξη της (2) γίνεται εύκολα:

1^{ος} τρόπος: Αρκεί να αποδειχθεί ότι:

$$\left| \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 \right|^2 = 0$$

ή ακόμα:

$$(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3) \cdot (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3) = 0$$

η οποία οδηγείται στην:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Lambda - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\text{B} = 0$$

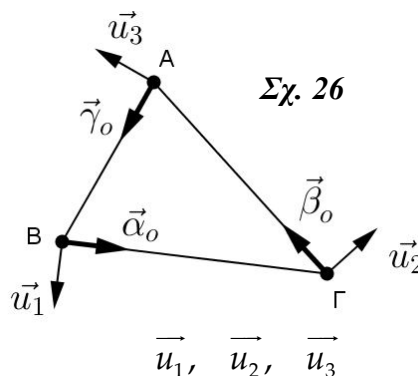
που είναι γνωστή και εύκολα δείχνεται.

2^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε (**Σχ.26**) τα μοναδιαία διανύσματα:

$$\vec{\alpha}_o, \quad \vec{\beta}_o, \quad \vec{\gamma}_o$$

των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοίχως καθώς και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα:



στις ανωτέρω πλευρές κατά την ίδια αντιστοιχία. Τότε θα είναι:

$$\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$$

Άρα:

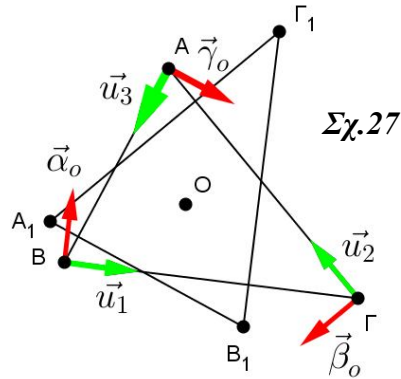
$$\alpha \cdot \vec{\alpha}_o + \beta \cdot \vec{\beta}_o + \gamma \cdot \vec{\gamma}_o = \vec{0}$$

Αν τώρα περιστρέψουμε το τρίγωνο κατά 90 μοίρες δεξιόστροφα και γύρω από ένα τυχαίο σημείο O, τότε, όπως φαίνεται από το παράπλευρο σχήμα (Σχ.27), τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$$

γίνονται παράλληλα με τις πλευρές του τριγώνου ABΓ, γίνονται δηλαδή τα μοναδιαία διανύσματα των διανυσμάτων των πλευρών του τριγώνου αυτού και συνεπώς θα ισχύει:

$$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$$



Σημείωση:

1^η) Από τις αποδείξεις αυτές φαίνεται ότι η σχέση (2) ισχύει ακόμα και όταν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ σχηματίζουν όχι μόνον ορθή γωνία αντίστοιχα με τις πλευρές του τριγώνου, αλλά και μια τυχούσα γωνία θ.

2^η) Η σχέση αυτή δείχνεται ότι ισχύει όχι μόνο για μια τριγωνική γραμμή αλλά και για μια τυχούσα πολυγωνική.

Αντίστροφα:

Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι ευκλείδειες αποστάσεις του I αντίστοιχα από τις πλευρές BΓ, ΓΑ, ΑΒ ενός τριγώνου ABΓ και $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα αντίστοιχα στις BΓ, ΓΑ, ΑΒ, και ισχύει η σχέση:

$$\frac{\vec{u}_1}{\rho_1} + \frac{\vec{u}_2}{\rho_2} + \frac{\vec{u}_3}{\rho_3} = \vec{0} \quad (3)$$

τότε $I = G$, δηλαδή το τρίγωνο ABΓ είναι Special τρίγωνο.

Απόδειξη:

Στο τρίγωνο αυτό ισχύει:

$$\frac{\vec{u}_1}{\rho_1} + \frac{\vec{u}_2}{\rho_2} + \frac{\vec{u}_3}{\rho_3} = \vec{0}$$

Άρα:

$$\vec{u}_3 = -\frac{\rho_3}{\rho_1} \vec{u}_1 - \frac{\rho_3}{\rho_2} \vec{u}_2 \quad (4)$$

Επίσης ισχύει:

$$\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Άρα:

$$\vec{u}_3 = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{u}_1 - \frac{\beta}{\gamma} \vec{u}_2 \quad (5)$$

Επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οι εκφράσεις (4) και (5) του διανύσματος $\vec{u}_3$ ως προς αυτά θα είναι μονοσήμαντος.

Άρα:

$$-\frac{\rho_3}{\rho_1} = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{και} \quad -\frac{\rho_3}{\rho_2} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

δηλαδή:

$$\alpha \rho_1 = \beta \rho_2 = \gamma \rho_3$$

που σημαίνει ότι: $I = G$.

Το πρόβλημα του Ήρωνος

Πρόταση 4.7.

Έστω δύο σημεία A και B προς το αυτό ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (η). Το γνωστό πρόβλημα του Ήρωνος είναι να προσδιοριστεί ένα σημείο M της ευθείας (η) ώστε το άθροισμα AM + MB να είναι ελάχιστο. Στη γεωμετρία Minkowski το πρόβλημα αυτό παρόμοια ζητά:

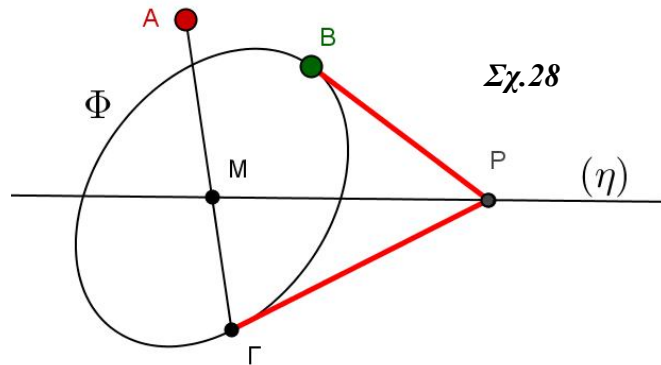
$$\|AM\| + \|MB\| = \text{ελάχιστο}$$

Από τα θεωρήματα ακροτάτων της Ανάλυσης είναι γνωστή η ύπαρξη ανάλογου σημείου M. Στη συνέχεια θα δείξουμε με γεωμετρικό τρόπο την ύπαρξη του σημείου αυτού και θα προσδιορίσουμε τις ιδιότητές του.

Πρόταση 4.7.1 (Θεώρημα 1)

Αν δύο σημεία A και B βρίσκονται προς το αυτό ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (η) τότε πάνω στην ευθεία αυτή θα

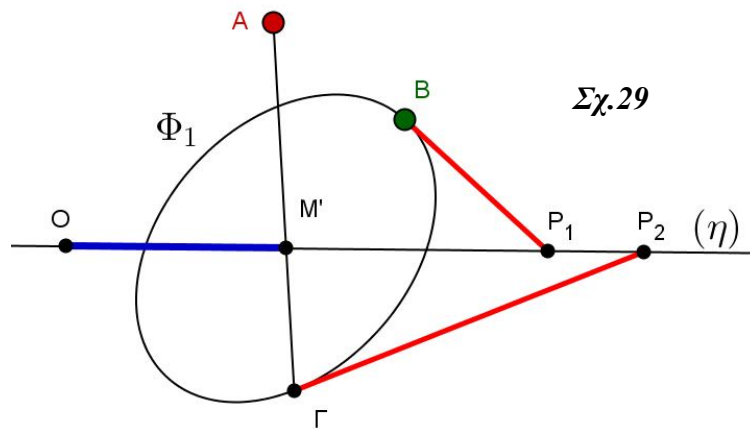
υπάρχει σημείο M τέτοιο ώστε αν θεωρήσουμε τον Minkowski κύκλο Φ με κέντρο το σημείο M και να διέρχεται από το σημείο B , οι



εφαπτόμενες(ευθείες στήριξης) του Φ στα σημεία B και Γ , όπου Γ ένα από τα σημεία τομής της AM με τον Φ , τέμνονται επί της ευθείας (η) . (Σχ.28)

Απόδειξη

Θεωρούμε την αρχή O ενός συστήματος συντεταγμένων πάνω στην ευθεία (η) και για τυχαίο σημείο $M' \in (\eta)$ θέτουμε $OM' = x$. (Σχ.29)



Έστω ακόμα Φ_1 ο Minkowski κύκλος με κέντρο το σημείο M' ο οποίος διέρχεται από σημείο B .

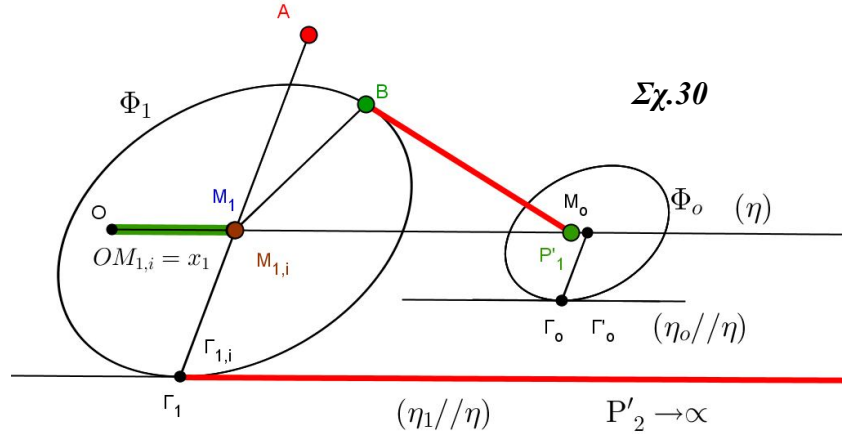
Τα ευθύγραμμα τμήματα $M'P_1, M'P_2$ είναι προφανώς συνεχείς συναρτήσεις του x . Θέτουμε:

$$M'P_1 = f_1(x), \quad M'P_2 = f_2(x)$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου M' σε σημείο $M_{1,i}(x_1)$ έτσι ώστε:

$$f_1(x_1) - f_2(x_1) < 0 \quad (1)$$

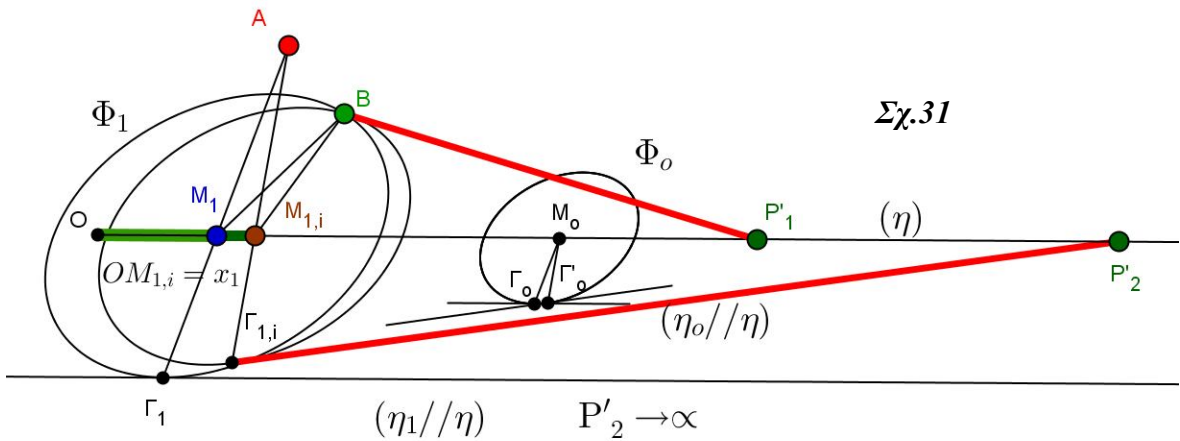
Πράγματι, αυτό μπορεί να μας το δείξει η ακόλουθος κατασκευή:
Θεωρούμε τον Minkowski κύκλο Φ_o με $M_o \in (\eta)$. Η (η_o) είναι η



παράλληλη προς την (η) εφαπτομένη(ευθεία στήριξης) του Φ_o . (Σχ.30).

Στη συνέχεια φέρουμε την AM_1 παράλληλη προς την $M_o\Gamma_o$ και θεωρούμε τον Minkowski κύκλο Φ_1 με κέντρο το σημείο M_1 και ο οποίος διέρχεται από το σημείο B . Η ευθεία στήριξης στο σημείο Γ_1 του Φ_1 είναι παράλληλη προς την (η_o) , ενώ η εφαπτομένη στο σημείο B ορίζει επί της (η) το σημείο P'_1 .

Μια ελαφρά μετακίνηση (Σχ.31) του σημείου M_1 στη θέση $M_{1,i}$



δίνει:

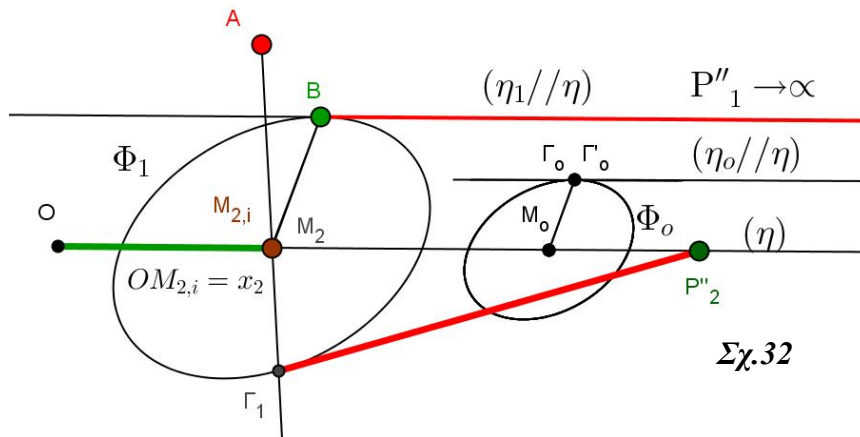
$$f_1(x_1) - f_2(x_1) < 0 \quad \mu\epsilon \quad x_1 = OM_{1,i} \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι βρέθηκε σημείο $M_{1,i}$ με $OM_{1,i} = x_1$ και τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση (1)

Όμοια μπορούμε να βρούμε ένα σημείο $M_{2,i}(x_2)$ επί της (η) , τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f_1(x_1) - f_2(x_1) > 0 \quad (3)$$

Αυτό γίνεται αν θεωρήσουμε πάλι τον Minkowski κύκλο Φ_o με κέντρο M_o πάνω στην (η) και την εφαπτομένη σ' αυτόν $(\eta_o) // (\eta)$ (Σχ.32). Στη συνέχεια από το σημείο B φέρουμε παράλληλη προς την

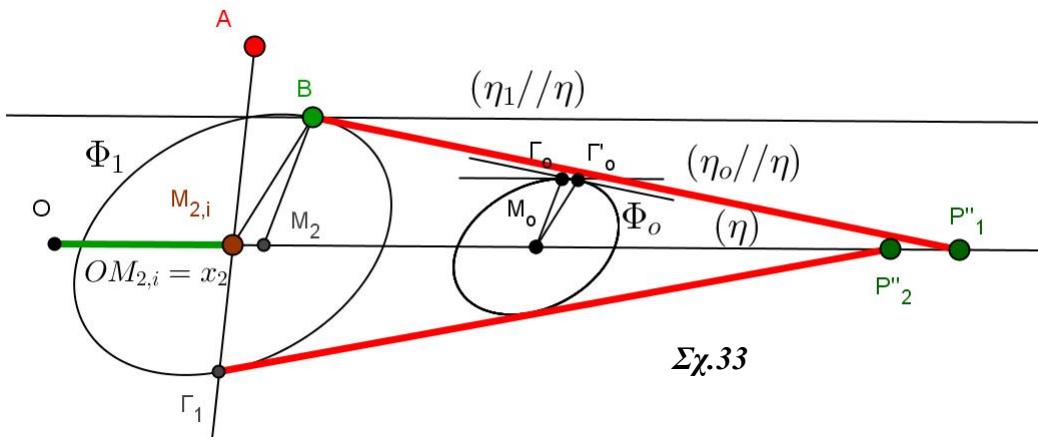


Σχ.32

$M_o\Gamma_o$ η οποία ορίζει το σημείο M_2 . Κατόπιν κατασκευάζουμε τον Minkowski κύκλο Φ_1 , ο οποίος έχει κέντρο το σημείο M_2 και διέρχεται από το σημείο B στο οποίο η εφαπτομένη $(\eta_1) // (\eta)$.

Αν ενώσουμε το σημείο A με το κέντρο M_2 τότε ορίζεται το σημείο Γ_1 η εφαπτομένη στο οποίο τέμνει τον (η) στο σημείο P''_2 .

Στη συνέχεια μετακινούμε για μικρή απόσταση το σημείο M_2 από την αρχική του θέση προς τη θέση του σημείου $M_{2,i}$ (Σχ.33). Τότε



Σχ.33

παρατηρούμε ότι στη νέα αυτή θέση ισχύει:

$$f_1(x_2) - f_2(x_2) > 0 \quad \mu\epsilon \quad x_2 = OM_{2,i} \quad (4)$$

Άρα βρέθηκε ένα σημείο, το $M_{2,i}$ επί της (η) με $OM_{2,i} = x_2$, για το οποίο ισχύει:

$$f_1(x_2) - f_2(x_2) > 0 \quad (5)$$

Οι σχέσεις (3) και (5) δηλώνουν ότι για τη συνεχή συνάρτηση $G(x) = (f_1 - f_2)(x)$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano και συνεπώς υπάρχει σημείο M μεταξύ των σημείων $M_{1,i}$ και $M_{2,i}$, με $OM = x_o$, τέτοιο ώστε:

$$f_1(x_o) - f_2(x_o) = 0$$

Δηλαδή:

$$MP_1 = MP_2$$

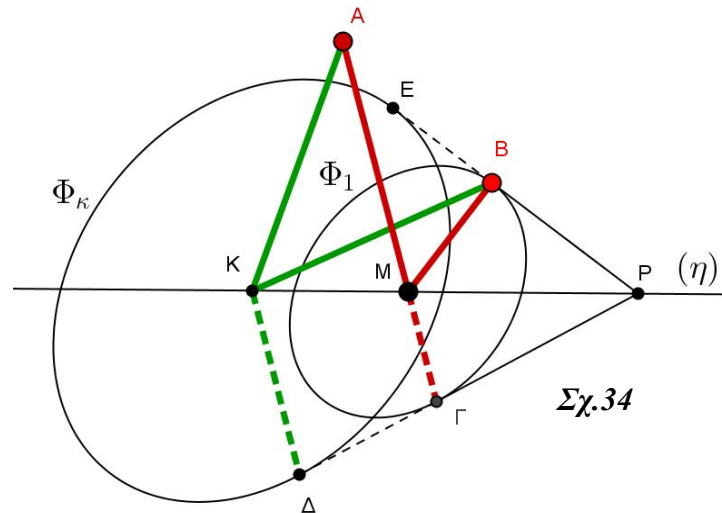
Πρόταση 4.7.2 (Θεώρημα 2)

Για τη θέση του σημείου M που αναφέρεται στην πρόταση 4.7.1 (Θ. 1) ισχύει:

$$\|AM\| + \|MB\| = \text{ελάχιστο}$$

Απόδειξη

Έστω K τυχαίο σημείο της ευθείας (η) (Σχ.34). Κατασκευάζουμε



τον Minkowski κύκλο Φ_κ , ομοιόθετο του Φ_1 με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο P και λόγο $\lambda = \frac{PK}{PM}$, δηλαδή:

$$\Phi_{\kappa} = \lambda \cdot \Phi_1$$

Τότε θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$\|AK\| + \|KB\| > \|AM\| + \|MB\| \quad (1)$$

Πράγματι είναι:

$$\|AK\| + \|K\Delta\| > \|A\Delta\| > \|A\Gamma\| = \|AM\| + \|MB\| \quad (2)$$

διότι σύμφωνα με την 3.4 η $A\Gamma$ είναι η Minkowski απόσταση του σημείου A από την εφαπτομένη $P\Delta$, άρα και μικρότερη της $A\Delta$.

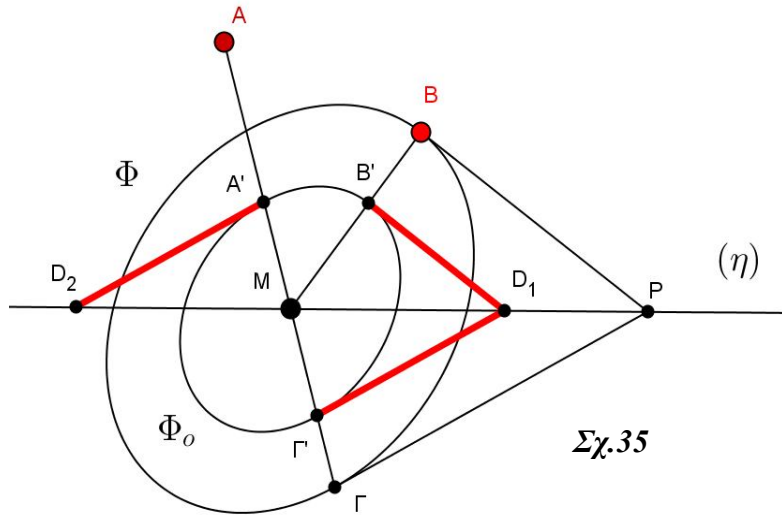
Όμως για τον ίδιο λόγο θα είναι:

$$\|K\Delta\| = \|KE\| < \|KB\| \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) εύκολα προκύπτει η ζητούμενη (1).

Παρατήρηση:

Αν με κέντρο το προηγούμενο σημείο M (Σχ.35) θεωρήσουμε τον μοναδιαίο Minkowski κύκλο Φ_o , τότε οι εφαπτόμενες στα σημεία A', B'



τέμνουν τον άξονα (η) αντίστοιχα στα σημεία D_2, D_1 τότε θα είναι:

$$MD_1 = MD_2$$

Πρόταση 4.7.3 (Θεώρημα 3)

Αν A, B δύο δοθέντα σημεία εκτός ενός Minkowski κύκλου (K) κέντρου O , τότε υπάρχει πάνω στον (K) ένα ακριβώς σημείο P τέτοιο ώστε:

Άρα:

$$\|AP\| + \|PB\| = \text{ελάχιστο}$$

Το πρόβλημα του Fermat

Πρόταση 4.8.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προσδιοριστεί η θέση ενός σημείου M έτσι ώστε να ισχύει:

$$\|AM\| + \|BM\| + \|\Gamma M\| = \text{ελάχιστο}$$

Το πρόβλημα στην Ευκλείδειο Γεωμετρία είναι γνωστό και έχει διάφορες λύσεις, οι περισσότερες από τις οποίες αναφέρονται στην τυπική βιβλιογραφία. Στη Γεωμετρία Minkowski σε γενικευμένους χώρους M^n μπορεί να δει κανείς στη συνημμένη βιβλιογραφία [5] κα [8].

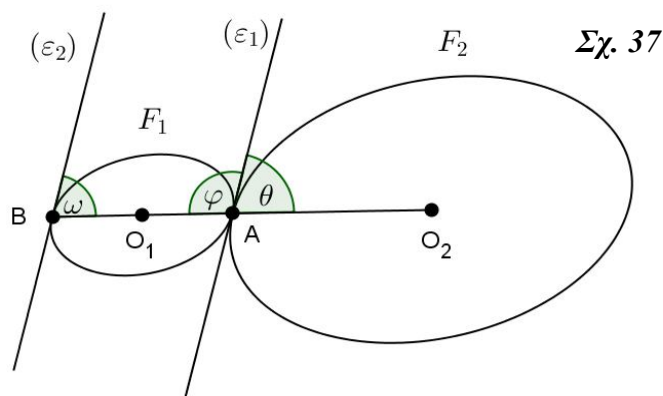
Στην παρούσα εργασία θα δοθεί μια στοιχειώδης λύση που στηρίζεται στο πρόβλημα του Ήρωνα, αφού πρώτα γίνει αναφορά στο ακόλουθο απλό λήμμα:

Λήμμα 4.8.1

Αν δύο ομοιόθετα κεντροσυμμετρικά σχήματα μεταφερθούν (με παράλληλη μετατόπιση) ώστε να εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A , τότε η ευθεία που περνά από τα κέντρα τους περιέχει το σημείο A .

Απόδειξη

Έστω F_1 και F_2 δύο ομοιόθετα κεντροσυμμετρικά σχήματα τα οποία



με κατάλληλη παράλληλη μετατόπιση μετακινήθηκαν ώστε να εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Αν ακόμα O_1 , O_2 είναι αντίστοιχα τα κέντρα αυτών τότε θα δείξουμε ότι η O_1O_2 διέρχεται από το σημείο επαφής A .

Πράγματι αν θεωρήσουμε το αντιδιαμετρικό σημείο B του σημείου επαφής A , και φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) σ' αυτά τότε αυτές είναι μεταξύ των παράλληλες. Άρα:

$$\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ \quad (1)$$

Όμως λόγω ομοιοθεσίας των F_1 και F_2 οι γωνίες ω και θ είναι ομοιόθετες κατά την ομοιοθεσία αυτή και συνεπώς:

$$\hat{\omega} = \hat{\theta} \quad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) προκύπτει:

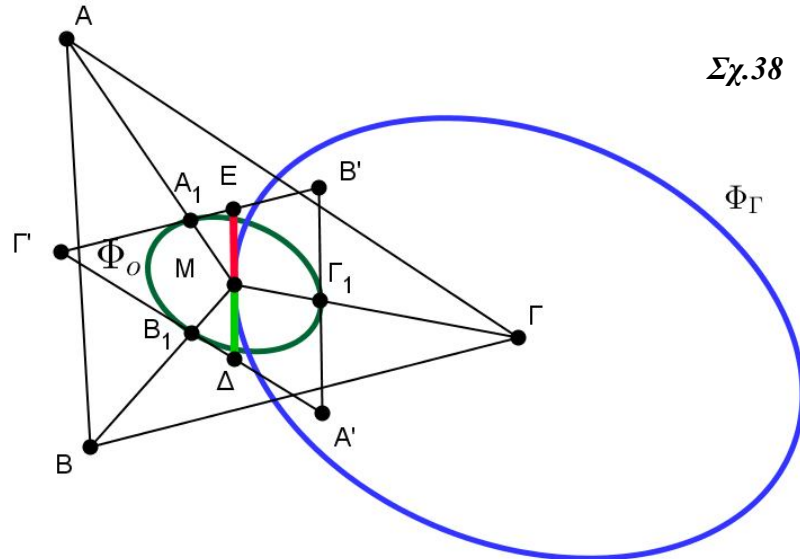
$$\hat{\theta} + \hat{\phi} = 180^\circ$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι τα σημεία O_1, A, O_2 είναι συνευθειακά. Δηλαδή η ευθεία που περνά από τα κέντρα τους περιέχει το σημείο A .

4.8.2 Λύση του προβλήματος του Fermat

Η ύπαρξη του σημείου M στο πρόβλημα του Fermat επιβεβαιώνεται από τα γνωστά θεωρήματα υπάρξεως ακροτάτων της Ανάλυσης.

Έστω ότι είναι γνωστό το σημείο αυτό M . Τότε θεωρούμε τον Minkowski κύκλο Φ_o (μοναδιαίο) κέντρου M (**Σχ.38**). Αν τώρα πάρουμε



τον Minkowski κύκλο Φ_Γ κέντρου Γ , ο οποίος διέρχεται από το σημείο M , τότε η εφαπτομένη (ευθεία στήριξης) του Φ_Γ στο σημείο M τέμνει τις εφαπτόμενες στα σημεία A_1, B_1 αντίστοιχα στα σημεία E, Δ , ώστε:

$$ME = M\Delta$$

σύμφωνα με την παρατήρηση της **πρότασης 4.7.2 (Θεώρημα 2)**.

Η ΔΕ όμως είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του Φ_o στο σημείο Γ_1 , διότι ο Minkowski κύκλος $(\Gamma, \|\Gamma\Gamma_1\|)$ εφάπτεται με τον Φ_o στο σημείο Γ_1 , σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα.

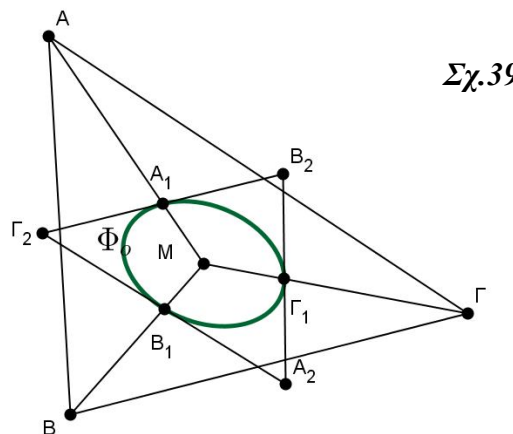
Ύστερα από αυτά στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ισχύει: $\Delta E // A'B'$ καθώς επίσης και η σχέση:

$$M\Delta = ME$$

Ανάλογα ισχύουν και για τις άλλες πλευρές $B'\Gamma'$, $\Gamma'A'$ του τριγώνου $A'B'\Gamma'$. Έτσι λοιπόν συμπεραίνεται ότι το ζητούμενο σημείο M θα είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου $A'B'\Gamma'$. (Κέντρο βάρους). Άρα το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι ένα special τρίγωνο.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με άτοπο απαγωγή αν λάβουμε υπόψη μας την παρατήρηση της πρότασης 4.7.2 (Θεώρημα 2).

Μια αναλυτική λύση του προβλήματος του Fermat μπορεί να δοθεί και ως εξής:



Σχ.39

Στο σχήμα 39 (Σχ.39) αναζητούμε σημείο M ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα:

$$P(x) = f_A(x) + f_B(x) + f_\Gamma(x)$$

με:

$$f_A(x) = \frac{AM}{A_1M}, \quad f_B(x) = \frac{BM}{B_1M}, \quad f_\Gamma(x) = \frac{\Gamma M}{\Gamma_1M}$$

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να είναι:

$$\text{grad}P(x) = 0$$

Αποδεικνύεται, (βλέπε: (8) σελ. 229), ότι τότε θα είναι ακόμα:

$$\frac{u_1}{p_1} + \frac{u_2}{p_2} + \frac{u_3}{p_3} = 0$$

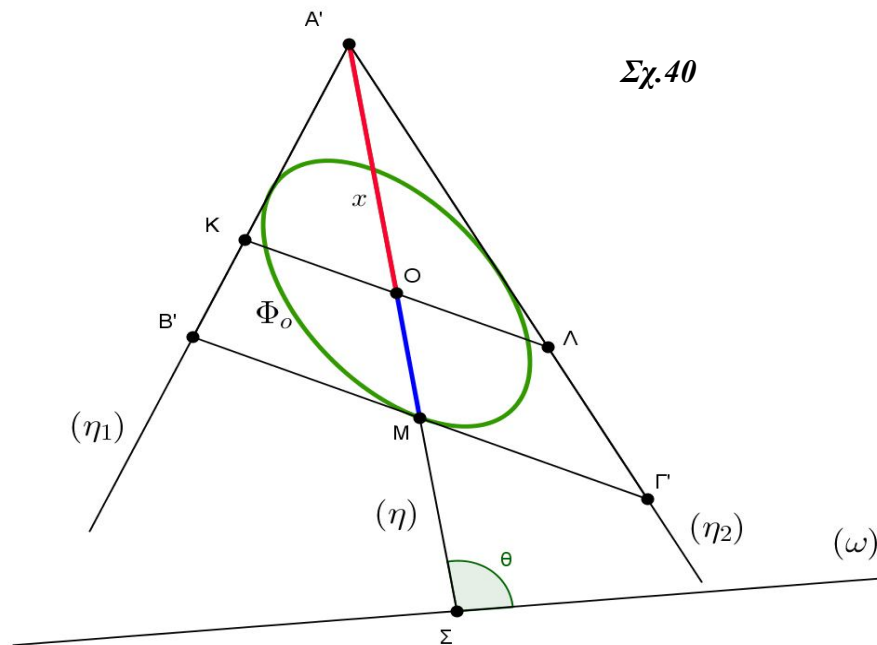
όπου u_1, u_2, u_3 τα μοναδιαία διανύσματα των πλευρών $B_2\Gamma_2, \Gamma_2A_2, A_2B_2$ τα κατευθυνόμενα προς το εξωτερικό του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ και p_1, p_2, p_3 οι αντίστοιχες αποστάσεις του σημείου M από τις πλευρές του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$, όπου $B_2\Gamma_2, \Gamma_2A_2, A_2B_2$ οι εφαπτόμενες του Φ_o στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 . Δηλαδή τότε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ένα Special τρίγωνο.

4.8.3 Προσδιορισμός του σημείου Fermat

Θα προσδιορίσουμε αρχικά ένα τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ώστε να είναι περιγεγραμμένο στο μοναδιαίο Minkowski κύκλο:

$$\Phi_o(O, \|r\| = 1)$$

και μάλιστα το κέντρο O να είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου αυτού.



Σχ.40

Με άλλα λόγια θα προσδιορίσουμε ένα Special τρίγωνο περιγεγραμμένο στον Φ_o .

Θεωρούμε ότι το σημείο A' κινείται πάνω σε μια ευθεία (η) η οποία σχηματίζει με ένα σταθερό άξονα (ω) γωνία ίση με (θ) .

Υποθέτουμε ότι είναι $OA' = x$. Φέρουμε τις εφαπτόμενες $A'\eta_1, A'\eta_2$ προς τον Φ_o καθώς επίσης και την τέμνουσα αυτών ΚΟΛ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$OK = OL$$

Στη συνέχεια φέρουμε μια εφαπτομένη παράλληλη προς την ΚΛ η οποία ορίζει στις $A'\eta_1, A'\eta_2$ αντίστοιχα τα σημεία B', Γ' .

Επίσης πάνω στη $B'\Gamma'$ η προέκταση της $A'O$ ορίζει το σημείο Μ το οποίο είναι μέσον της $B'\Gamma'$.

Θεωρούμε ότι:

$$f(x) = \frac{OA'}{OM} = \frac{x}{OM}, \quad x > 0$$

Από το σχήμα (**Σχ.40**) φαίνεται ότι μετακινώντας το σημείο A' επί της (η) μπορούμε να βρούμε δύο θέσεις του σημείου αυτού οι οποίες αντιστοιχούν αντίστοιχα στις τιμές x_1, x_2 τέτοια ώστε:

$$f(x_1) > 2, \quad f(x_2) < 2$$

και συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι μεταξύ των δύο αυτών θέσεων υπάρχει ένα σημείο x_o τέτοιο ώστε:

$$f(x_o) = 2$$

Στη θέση αυτή το σημείο Ο είναι κέντρο βάρους του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ και συνεπώς το τρίγωνο αυτό είναι ένα Special τρίγωνο.

4.8.4 Κατασκευή του σημείου

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω μπορούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε το σημείο του Fermat με τον ακόλουθο τρόπο:

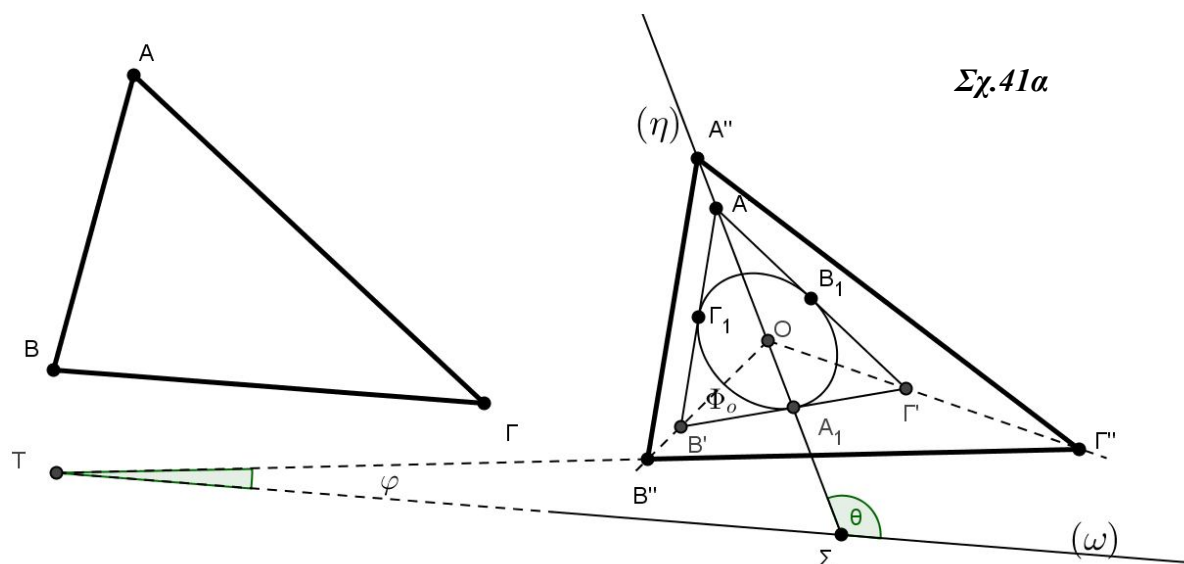
Έστω (**Σχ.41α**) το δοθέν τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ζητούμε το σημείο του Fermat, δηλαδή το σημείο εκείνο Ο για το οποίο ισχύει:

$$\|AO\| + \|BO\| + \|GO\| = \text{ελάχιστο}$$

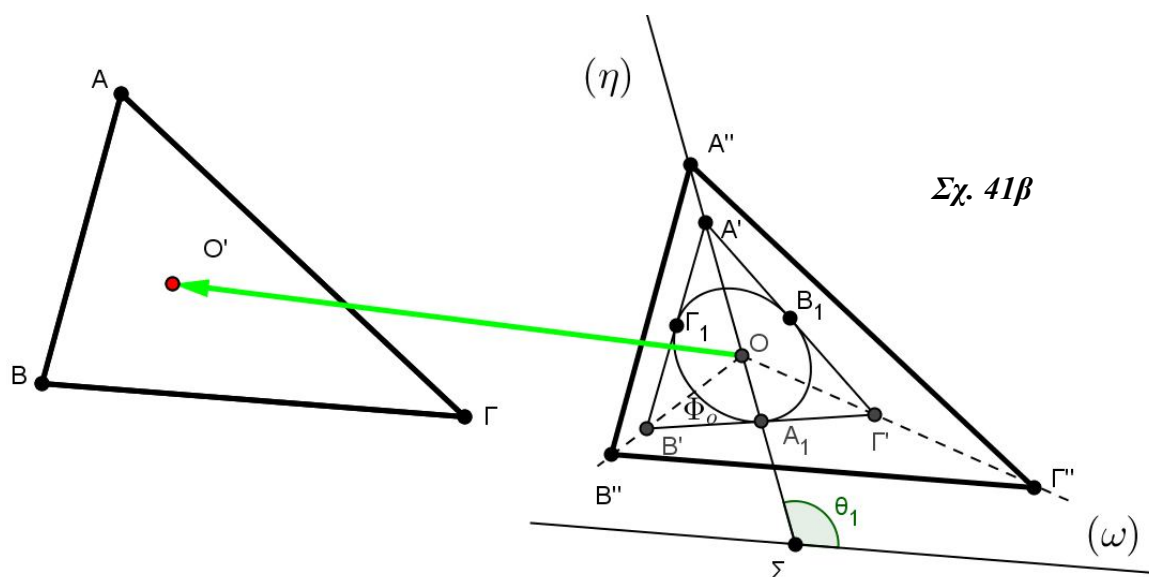
Έστω ακόμα ο μοναδιαίος Minkowski κύκλος Φ_o περί του οποίου έχουμε περιγράψει το Special τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ σύμφωνα με τον τρόπο της παραγράφου 4.8.3. Έστω ακόμα ότι η ευθεία OA' σχηματίζει με κάποιο σταθερό άξονα $(\omega) // B\Gamma$ γνωστή γωνία ίση με θ .

Είναι δυνατόν στη συνέχεια να βρούμε σημεία A'', B'', Γ'' πάνω στις ευθείες που ορίζουν τα τμήματα $OA_1, OB_1, O\Gamma_1$ ώστε το τρίγωνο $A''B''\Gamma''$ να είναι ίσο με το δοθέν $AB\Gamma$. (Ευκλείδεια γεωμετρική κατασκευή).

Έστω ακόμα ότι η $B''\Gamma''$ σχηματίζει με τον άξονα (ω) μια γωνία τη $\phi = \phi(\theta)$.



Τότε η εξίσωση $\phi(\theta) = 0$ δίνει μια ρίζα, έστω την θ_1 η οποία οδηγεί στην περίπτωση όπου $B''\Gamma'' \parallel (\omega)$ (Σχ. 41β).



Αν τώρα μετακινήσουμε με μια παράλληλη μετατόπιση το τρίγωνο $A''B''\Gamma''$ στη θέση του αρχικού $AB\Gamma$, τότε έχουμε πλέον το σημείο Fermat από τη θέση O στη θέση O' .

5. Κωνικές Τομές

5.1 Minkowski Έλλειψη

Ορισμός: Το σύνολο των σημείων M του χώρου M^2 για τα οποία ισχύει:

$$\|AM\| + \|BM\| = 2\alpha$$

όπου A, B δυο σταθερά σημεία του M^2 και $\alpha > 0$, ονομάζεται **Minkowski έλλειψη με εστίες τα σημεία A, B .**

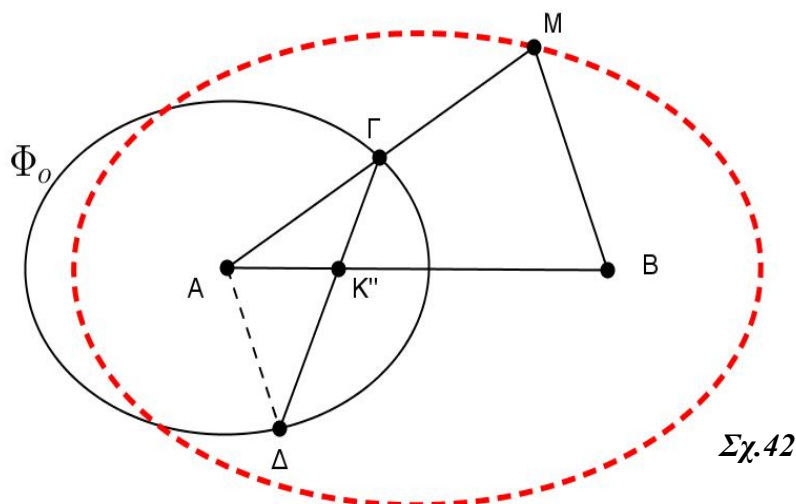
Αν ονομάσουμε (c) το παραπάνω σημειοσύνολο εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτό είναι το σύνορο ενός κυρτού σχήματος F για το οποίο ισχύει:

$$F = \{M / \|AM\| + \|BM\| \leq 2\alpha\}$$

Το σημειοσύνολο F είναι σχήμα συμμετρικό ως προς την ευθεία που ορίζει το AB καθώς επίσης και ως προς τη μεσοκάθετο του τμήματος AB .

Κατασκευή σημείων της Minkowski έλλειψης

Έστω ότι γνωρίζουμε τις δύο εστίες A, B της Minkowski έλλειψης καθώς και την σταθερή παράμετρο $\alpha > 0$. Έστω ακόμα Φ_o ο μοναδιαίος Minkowski κύκλος με κέντρο το σημείο A . (Σχ.42) Ζητούμε να



Σχ.42

κατασκευάσουμε σημεία της έλλειψης αυτής.

Κατασκευάζουμε το σημείο K'' πάνω στην AB τέτοιο ώστε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AK''}} = 2\alpha \quad (1)$$

Από το σημείο K'' φέρουμε μια τυχαία τέμνουσα τον Φ_o που ορίζει σ' αυτόν τα σημεία Γ και Δ . Τέλος από το σημείο B φέρουμε παράλληλη προς την $A\Delta$ η οποία ορίζει πάνω στην $A\Gamma$ το σημείο M .

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι σημείο της Minkowski έλλειψης. Δηλαδή:

$$\|AM\| + \|BM\| = 2\alpha \quad (2)$$

Πράγματι, από τον ορισμό της μετρικής στο Minkowski χώρο, είναι:

$$\|AM\| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{A\Gamma}|} = \kappa \quad (3)$$

$$\|MB\| = \frac{|\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{A\Delta}|} = \lambda \quad (4)$$

Επίσης από την (1) θα είναι:

$$\overrightarrow{AK''} = \frac{1}{2\alpha} \overrightarrow{AB} \quad (5)$$

Όμως:

$$\overrightarrow{AK''} = \mu \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \nu \cdot \overrightarrow{A\Delta}, \quad \text{όπου} \quad \mu + \nu = 1 \quad (6)$$

Η τελευταία αυτή σχέση σύμφωνα με τις (1), (3), (4) και (5) γίνεται:

$$\frac{1}{2\alpha} \overrightarrow{AB} = \mu \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AM}}{\kappa} \right) + \nu \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MB}}{\lambda} \right)$$

κι απ' αυτή άμεσα προκύπτει:

$$\frac{1}{2\alpha} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \mu \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AM}}{\kappa} \right) + \nu \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MB}}{\lambda} \right)$$

Επειδή τώρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα προκύπτει τελικά:

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{\mu}{\kappa} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\alpha} = \frac{\nu}{\lambda}$$

άρα:

$$\kappa + \lambda = 2\alpha\mu + 2\alpha\nu \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 2\alpha(\mu + \nu)$$

Θεωρούμε τον μοναδιαίο Minkowski κύκλο με κέντρο το σημείο A .
(Σχ.43) Όπως και στην περίπτωση της έλλειψης, θεωρούμε το σημείο K_1 τέτοιο ώστε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AK_1}} = 2\alpha \quad (1)$$

Από το σημείο K_1 φέρουμε τυχαία τέμνουσα τον Φ_o , την $K_1\Delta\Gamma'$, στη συνέχεια θεωρούμε το αντιδιαμετρικό σημείο Γ του Γ' . Η παράλληλη από το σημείο B προς την $A\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο M . Θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι σημείο της Minkowski υπερβολής.

Έστω ακόμα:

$$\|AM\| = \frac{\overline{AM}}{\overline{A\Gamma}} = \kappa, \quad \|BM\| = \frac{\overline{AN}}{\overline{A\Delta}} = \lambda \quad (2)$$

Τότε θα είναι:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A\Gamma'}} = -\kappa \quad (3)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$\overrightarrow{AK_1} = \frac{1}{2\alpha} \overrightarrow{AB} \quad (4)$$

Όμως αναλύοντας το διάνυσμα $\overrightarrow{AK_1}$ θα είναι επίσης:

$$\overrightarrow{AK_1} = \mu \cdot \overrightarrow{A\Gamma'} + \nu \cdot \overrightarrow{A\Delta}, \quad \mu + \nu = 1 \quad (5)$$

Η (5) σύμφωνα με τις (2) και (3) γίνεται στη συνέχεια:

$$\overrightarrow{AK_1} = -\frac{\mu}{\kappa} \overrightarrow{AM} + \frac{\nu}{\lambda} \overrightarrow{MB}, \quad \mu + \nu = 1 \quad (6)$$

Από τις (4) και (6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} \overrightarrow{AB} &= -\frac{\mu}{\kappa} \overrightarrow{AM} + \frac{\nu}{\lambda} \overrightarrow{MB}, \quad \mu + \nu = 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2\alpha} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) &= -\frac{\mu}{\kappa} \overrightarrow{AM} + \frac{\nu}{\lambda} \overrightarrow{MB}, \quad \mu + \nu = 1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά θα είναι:

$$\frac{1}{2\alpha} = -\frac{\mu}{\kappa} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\alpha} = \frac{\nu}{\lambda}$$

Από τις οποίες προκύπτει:

$$\mu = -\frac{\kappa}{2\alpha} \quad \text{και} \quad \nu = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

και επειδή: $\mu + \nu = 1$ τελικά θα είναι:

$$\lambda - \kappa = 2\alpha$$

δηλαδή:

$$\|BM\| - \|AM\| = 2\alpha$$

Επομένως το σημείο M είναι σημείο της Minkowski υπερβολής.

5.3 Minkowski Παραβολή

Ορισμός: Το σύνολο των σημείων M του χώρου M^2 για τα οποία ισχύει:

$$\|AM\| = \|MN\|$$

όπου A ένα σταθερό σημείο του M^2 και MN η ευκλείδεια απόσταση του σημείου M από μια σταθερή ευθεία (ε) η οποία δεν διέρχεται από το σημείο A, ονομάζεται Minkowski παραβολή με εστία το σημείο A και διευθετούσα την ευθεία (ε).

Κατασκευή σημείων της Minkowski παραβολής

Θεωρούμε τον μοναδιαίο Minkowski κύκλο με κέντρο το σημείο A και την ευθεία (ε). (Σχ.44)

Από το σημείο A φέρουμε την ΑΓ κάθετη προς την (ε) και έστω B το σημείο τομής του τμήματος ΑΓ με τον μοναδιαίο Minkowski κύκλο Φ_o .

Έστω ακόμα η ευθεία (η)//(ε) και σε απόσταση ίση με AB, δηλαδή:

$$GP_o = AB.$$

Για να προσδιορίσουμε σημεία M της παραβολής εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $P \in (\eta)$ και στη συνέχεια φέρουμε την $PN \perp (\varepsilon)$ και την AN.

Από το σημείο P φέρουμε την παράλληλη προς την AN η οποία τέμνει τον Φ_o σε ένα σημείο M' (εκτός της ευθείας που ορίζει η ΑΓ).

Η τομή της ευθείας AM' με την ευθεία PN ορίζει το σημείο M.

space ή πότε από τον ορισμό του Μέτρου σε Νορμικό χώρο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι προκύπτει εσωτερικό γινόμενο.

Όταν ο Νορμικός χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση τότε λέγεται Ευκλείδειος και από Γεωμετρική άποψη είναι ο χώρος της Ευκλείδειου Γεωμετρίας.

Στην Minkowski Γεωμετρία βασική ομάδα είναι η ομάδα των affine Μετασχηματισμών. Αν ο χώρος είναι ένας *inner product space* τότε στην περίπτωση αυτή ο μοναδιαίος κύκλος είναι η έλλειψη.

Τα κριτήρια που καθορίζουν πότε σε έναν Νορμικό χώρο μπορεί να οριστεί εσωτερικό γινόμενο είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που παραμένει πάντα επίκαιρο. (βλ. [4],[21])

Τα σημαντικότερα κριτήρια είναι τα ακόλουθα:

1° Κριτήριο (*P.Jordan και J. Von Newman*)

Αν $x, y \in E$ (*normed space*) και ισχύει:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

τότε ο E είναι ένας *inner product space*.

Το κριτήριο αυτό είναι το παλαιότερο και το πλέον σημαντικό κριτήριο.

2° Κριτήριο.

Αν $x, y \in E$ (*normed space*) και ισχύει:

$$(\|x\| = \|y\|) \wedge (\|ax + by\| = \|bx + ay\|), \quad \mu\epsilon \quad a, b \in R$$

τότε ο E είναι ένας *inner product space*.

3° κριτήριο.

Αν $x, y \in E$ (*normed space*) , $\lambda \in R$ και ισχύει:

$$(\|x + y\| = \|x - y\|) \wedge (\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|), \quad \lambda \neq 0, \pm 1$$

τότε ο E είναι ένας *inner product space*.

4° Κριτήριο.

Αν τα σημεία A, B, C, D βρίσκονται στο επίπεδο E (*normed space*) και είναι:

$$\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{CD}\| + \|\overline{AD}\| \cdot \|\overline{BC}\| \geq \|\overline{AC}\| \cdot \|\overline{BD}\|$$

δηλαδή να ισχύει το Θεώρημα του Πτολεμαίου, τότε ο E είναι ένας Ευκλείδειος χώρος.

5° Κριτήριο (*M. S. Moslehian και Γ. Ρασσιάς καθηγητής του ΕΚΠΑ*)

Αν $x_1, x_2 \in E$ (*normed space*), $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\|r_2 x_1 - r_1 x_2\|^2 + \|r_1 x_1 + r_2 x_2\|^2 = (r_1^2 + r_2^2)(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)$$

τότε ο E είναι ένας *inner product space*.

Βλέπουμε ότι το πέμπτο κριτήριο είναι μια γενίκευση του πρώτου κριτηρίου των P.Jordan και J. Von Newman και ανήκει σε μια εργασία που δημοσιεύτηκε το 2010.

Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι τα παραπάνω πέντε κριτήρια θεωρούνται ως **αλγεβρικά**. Στη συνέχεια παραθέτουμε έξι κριτήρια τα οποία θεωρούνται ως **γεωμετρικά**.

1° Κριτήριο

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας Νορμικός χώρος E *inner product space* είναι:

«Κάθε διδιάστατος υποχώρος του να είναι Ευκλείδειος»

ή ισοδύναμα:

«Ο μοναδιαίος κύκλος του να είναι έλλειψη»

2° Κριτήριο

Έχουμε δει (3.4) ότι η καθετότητα για την Minkowski Γεωμετρία δεν είναι συμμετρική ιδιότητα. Υπάρχουν βέβαια καμπύλες με συμμετρική καθετότητα. Είναι δυνατόν δηλαδή αν Φ_o ο μοναδιαίος κύκλος σε Minkowski επίπεδο M^2 και $A, B \in \partial(\Phi_o)$ να είναι:

$$A \underset{M}{\perp} B$$

δηλαδή $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ αμοιβαία (κατά Minkowski) κάθετα και παρόλα αυτά να μη προκύπτει Ευκλείδειος χώρος.

Στην παραπάνω περίπτωση λέμε ότι η καμπύλη $\partial(\Phi_o)$ είναι μια καμπύλη **Radon [2]**.

Αποδεικνύεται ότι:

«Αν ένας Νορμικός χώρος E έχει συμμετρική καθετότητα τότε κάθε διδιάστατος υποχώρος του είναι Minkowski M^2 επίπεδο».

Στις καμπύλες **Radon**, ο δεύτερος εκ των δύο συγγραφέων της παρούσης εργασίας έχει αποδείξει παλαιότερα τα ακόλουθα δύο Θεωρήματα – Κριτήρια:

3^ο Κριτήριο

Αν $x, y \in \partial(\Phi_o)$, όπου $\partial(\Phi_o)$ καμπύλη Radon και είναι $x \perp_M y$

και

$$|x|^2 + |y|^2 = \text{σταθερά},$$

τότε η καμπύλη $\partial(\Phi_o)$ θα είναι κύκλος ή έλλειψη.

4^ο Κριτήριο

Αν x, y ανήκουν σε μια Radon καμπύλη (C) και ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$(x + y) \perp_M (x - y)$$

$$\|x + y\| = \|x - y\|$$

τότε θα είναι: $M^2 = E^2$.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν και τα ακόλουθα ποιοτικά θεωρήματα – Κριτήρια:

5^ο Κριτήριο (Bertrand)

Αν οι χορδές μιας τυχαίας δοθείσης διεύθυνσης για το μοναδιαίο κύκλο Φ_o έχουν μέσα κείμενα επ' ευθείας, τότε η $\partial(\Phi_o)$ θα είναι έλλειψη.

6^ο Κριτήριο (Thompson)

Αν $x, y \in \partial(\Phi_o)$ και $(x + y) \perp (x - y)$ τότε $\partial(\Phi_o)$ θα είναι έλλειψη.

Εδώ τελειώνει η προσπάθεια που κάναμε για μια μοντέρνα προσέγγιση ενός τμήματος της Γεωμετρίας. Ελπίζουμε να είναι χρήσιμη για όλους εκείνους που αγαπούν τη Γεωμετρία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. L. M. Blumenthal, K. Menger, Studies in Geometry, W. H. Freeman and Company, 1970, p. 18
2. R. V. Benson, Euclidean Geometry and Convexity, Mc Graw Hill book Company 1966, p.225
3. J.J. Schaffer, Geometry of spheres in normed spaces, Marcel Dekker 1976, pp. 17-18
4. M. M. Day, Polygons circumscribed about closed convex curves, Trans. Amer. Math. Soc. Vol 62, 1957, pp 315-319
5. M.M. Day, Normed Linear Spaces, Springer.
6. G. Tsintsifas, On Minkowski Geometry,(blog: gtsintsifas)
7. A. Oppenheim, The Erdos inequality and other inequalities for a triangle, Amer. Math. Monthly March 1961, pp 226-230.
8. O. Bottema and others, Geometric inequalities, Wolters – Noordhoff, Groningen 1969, p.106.
9. G. D. Chakevian, M. A. Chandehari, Fermat problem in Minkowski space, Geometrical Dedicata, vol 17, No 3, Feb. 1985, pp.227-238
10. H. Busemann, The foundations of Minkowskian Geometry, Commentarii Mathematici Helvetici, vol 24, tase 2 (1950), pp 156-187
11. C. M. Petty, On the Geometry of the Minkowski plane, Rivista Math. Univ. Parma, 6, 1956, pp 269-292
12. A. C. Thompson, Minkowski Geometry Cambridge University press.
13. James R..C. Inner Products in Normed lineara spaces, Bul. Amer. Math. Soc. 1997, vol 53, pp 559-566.

14. Asplund and B. Grunbaum, on Geometry of Minkowski planes, l' Enseignement Mathematiques, 196 vol 6, pp.299-306
15. H. Busemann, the isoperimetric problem for Minkowski area, Amer. Journal of Math, vol. LXXI, No 4, Oct 1949.
16. H. Busemann and B. Phadke, Minkowskian Geometry, convexity conditions and the parallel axiom, Journal of Geometry, vol 12/1, 1979
17. P. J. Kelly, A property of Minkowskian circles, Amer. Math. Monthly, vol LVII No 10, 1950
18. N. Davids, A characterization of Minkowskian Geometry, Johns Hopkins University.
19. H. Eggleston, Notes on Minkowski Geometry
20. F. Valentine, A characteristic property of the circle in Minkowskian plane, Amer. Math. Monthly, Sept. 1951
21. Mohammad S. Moslehian and John Rassias, A chatacterization of Inner Product Spaces, concerning an Euler – Lagrange Identity, Commun, Math Anal Vol.8, n° 2(2010)
22. Amir D. Characterizations of Inner Product Spaces, Birkhauser.
23. I. J. Schoenberg, A remartk on M. M. Day's characterization of Inner Product Spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal, proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), 961-964.