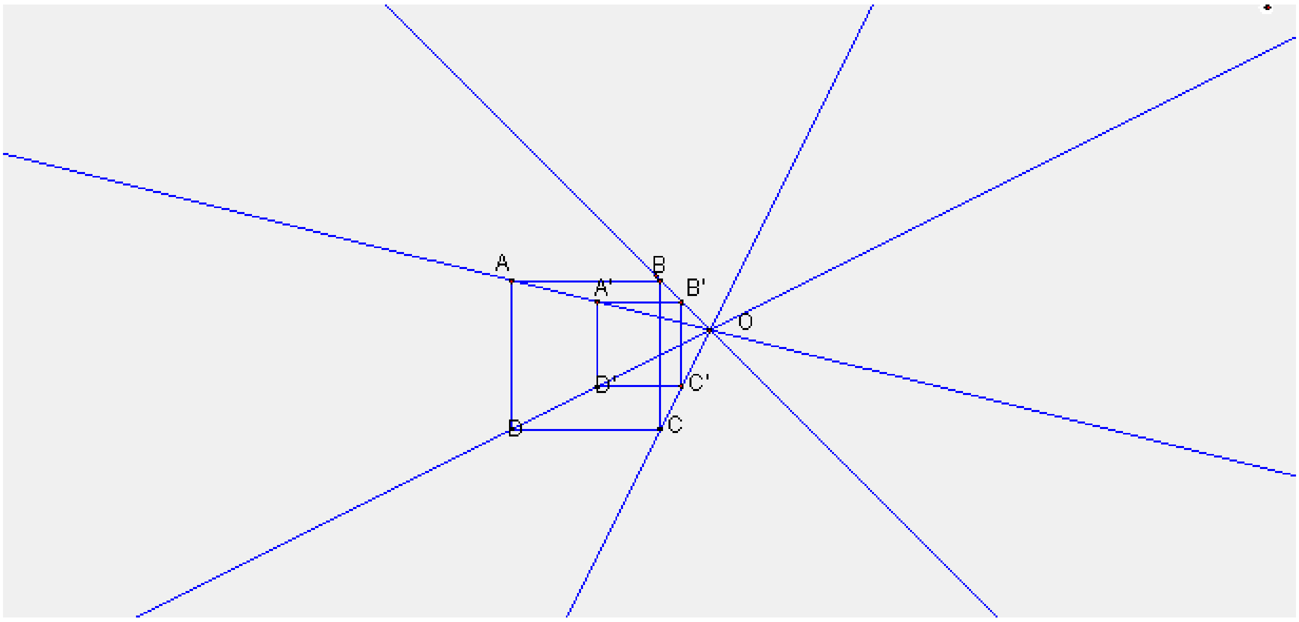
Κάλυψη ενός κυρτού σχήματος F με ομοιόθετα ίσα προς kF

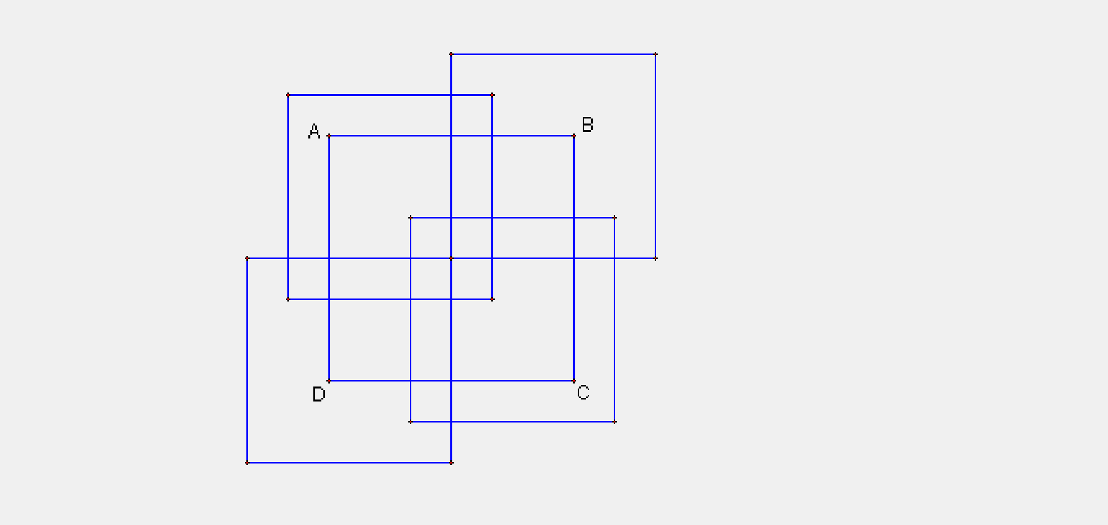
Γεωρ.Τσίντσιφας

Προφανώς για $k \geq 1$ δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα. Ας δούμε το πρόβλημα αναλυτικά και ας υποθέσουμε οτι έχουμε να καλύψουμε ένα τετράγωνο για k<1 με ομοιόθετα του ίσα προς kF .



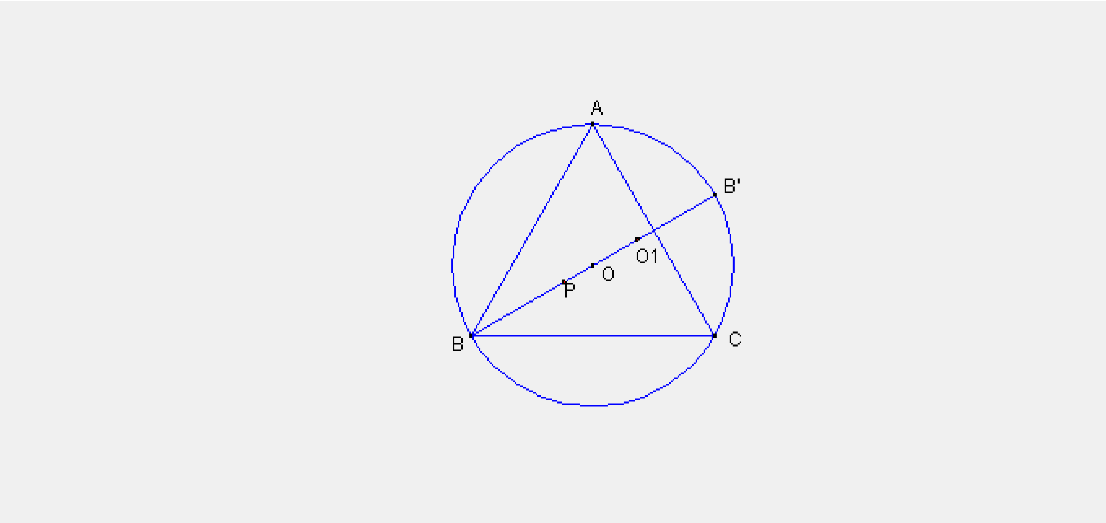
Το σχήμα F'= A'B'C'D' είναι ομοιόθετό του F= ABCD με λόγο ομοιοθεσίας k . Πρέπει να μεταφέρουμε παραλλήλως το F' κατάλληλα ώστε κάποιος αριθμός από F' να καλύψει το F .

Μπορούμε να δούμε οτι αν πάρουμε



4 F' με κατάλληλο τρόπο καλύπτουμε το F .
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται καθαρά πως με 3 F' καλύπτουμε μόνο τρείς κορυφές .

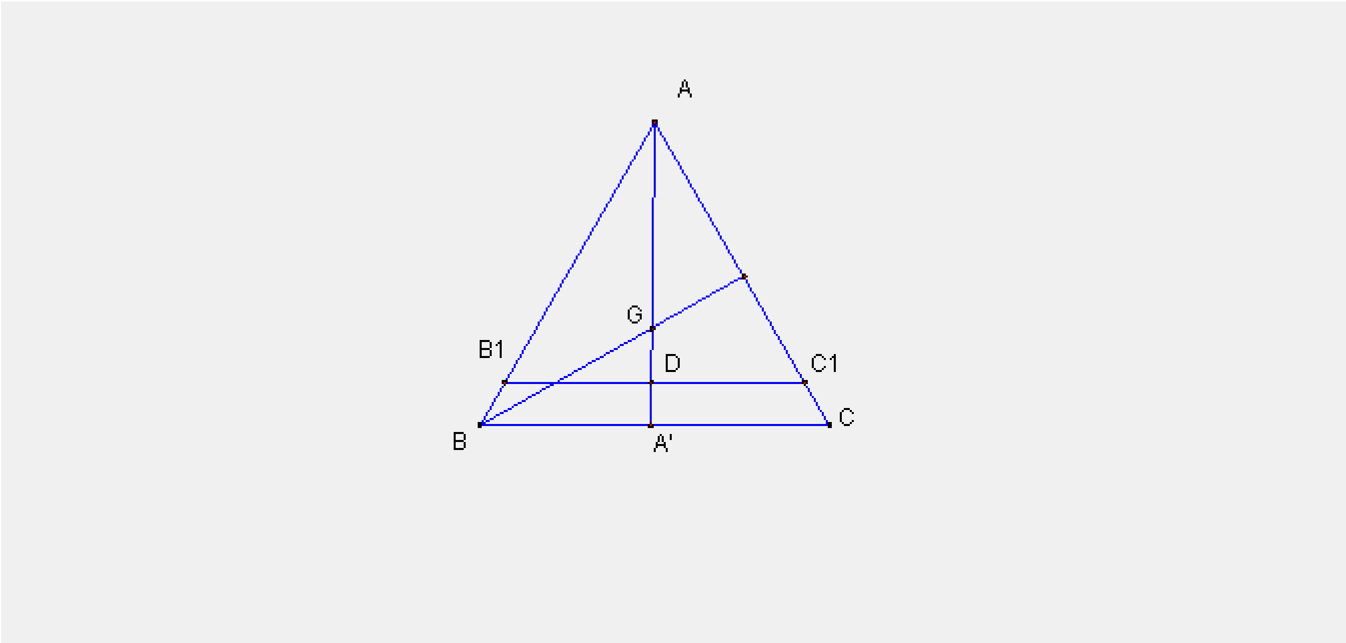
Τον Κύκλο F(ο,R) μπορούμε να τον καλύψουμε με τρείς κύκλους F'=kF όπου K=1-ε , $\varepsilon \to 0$.



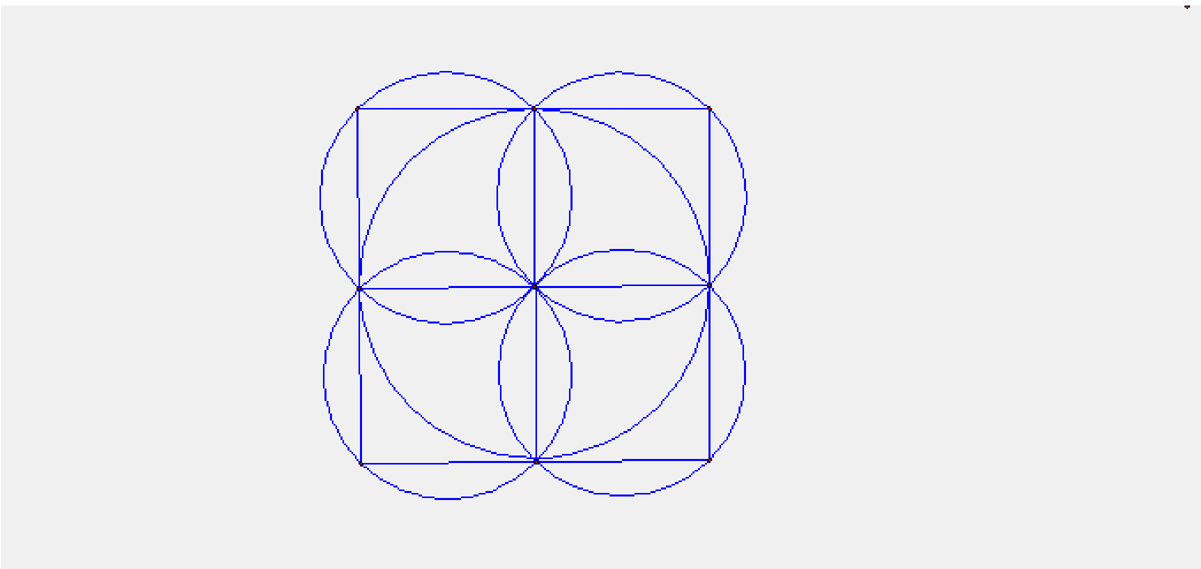
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να βρούμε αυτούς τους τρείς κύκλους. Στο παραπάνω σχήμα, το ABC είναι ισόπλευρο τρίγωνο, P τυχόν σημείο του τμήματος BB' και O_1 το μέσον του PB'.
Θεωρούμε το κύκλο (O_1,O_1A). Ανάλογα προσδιορίζουμε άλλους δύο κύκλους.

Αν τώρα το F είναι ισόπλευρο τρίγωνο για k πολύ κοντά στο 1 για να καλυφθεί επαρκούν 3 F'

Γενικά αποδεικνύεται (βλ.[3]) οτι για κάθε κυρτό σχήμα F για κ=1-ε , ε πολύ μικρό Επαρκούν τέσσερα ομοιόθετα kF για να καλυφθεί.
Υπάρχει η περίφημη εικασία του Hadwiger που λέγει οτι στον E^n για κάθε κυρτό σχήμα F επαρκούν 2^n ομοιόθετα kF για να καλυφθεί. Η εικασία παραμένει άλυτη Ακόμη και για n=3. O Πολωνός Μαθηματικός Marek Lassak απέδειξε οτι για $κ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ επαρκούν τέσσερα ομοιόθετα kF να καλύψουν το κυρτό σχήμα F.
Παραδείγματα τα παρακάτω σχήματα



$AB_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}ABC \qquad AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AA$



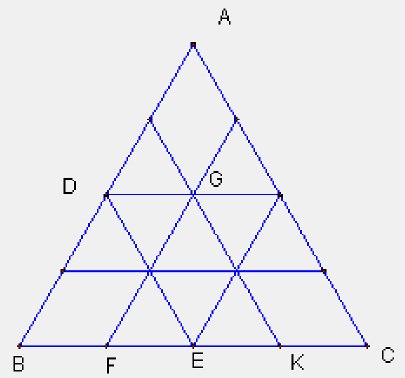
Την ίδια περίπου εποχή με το θεώρημα του Lassak βρήκα οτι:

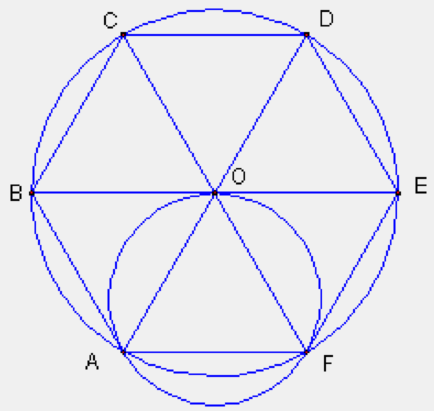
Θεώρημα.

Για να καλυφθεί το κυρτό σχήμα F με ομοιόθετα $F' = \frac{1}{2}F$ επαρκούν επτά ομοιόθετα.

Να δούμε λίγα παραδείγματα.

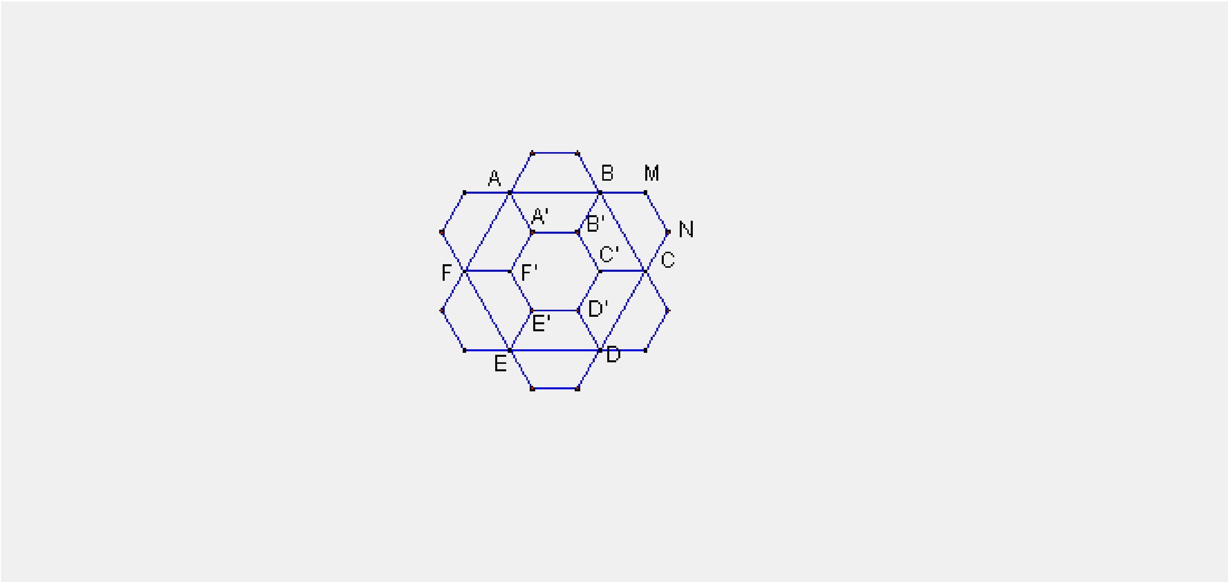
Το ισόπλευρο ABC καλύπτεται απο έξη τρίγωνα της μορφής BDE.





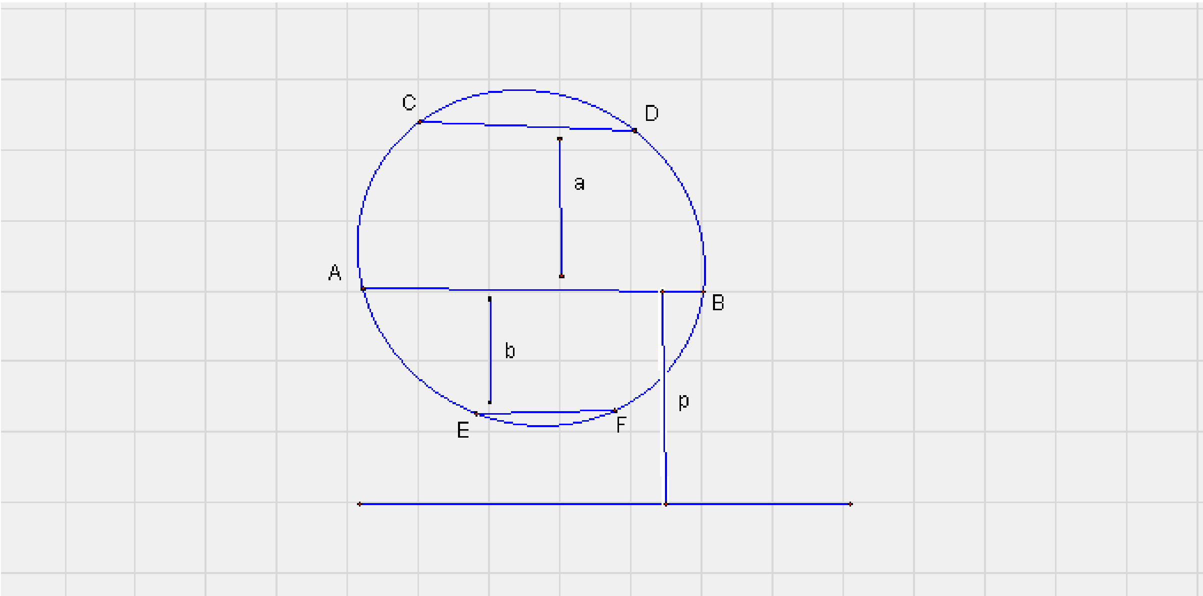
Ο κύκλος (O,R)

Το ABCDEF είναι κανονικό εξάγωνο. Οπως πολύ εύκολα φαίνεται ο κύκλος (O,R} καλύπτεται απο έξη κύκλους AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA ακτίνος R/2.

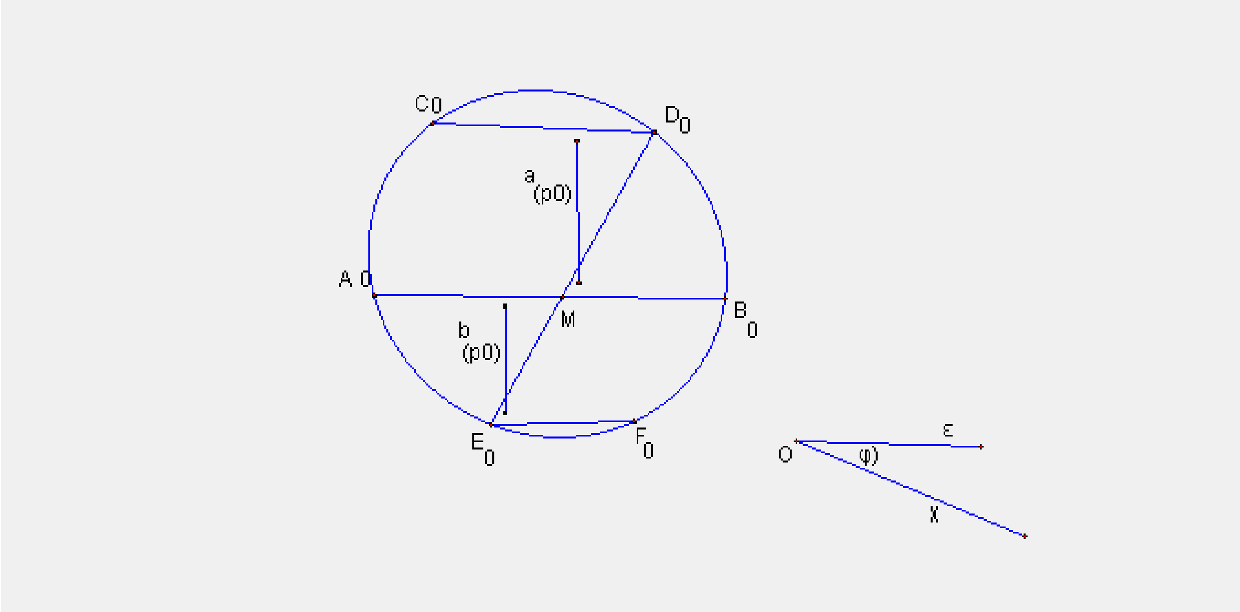


Το κανονικό εξάγωνο F=ABCDEF για να καλυφθεί απο τα ομοιόθετα του $\frac{1}{2}F$ χρειάζονται επτά ομοιόθετα, είναι το A'B'C'D'E'F' και έξη περιφερικά του τύπου του BMNCC'B'.
Για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω λήμμα, (βλ.[2]).
Σε κάθε κυρτό σχήμα F υπάρχει εγγεγραμμένο affine κανονικό εξάγωνο, δηλαδή εξάγωνο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες.
Μιά συνοπτική απόδειξη του λήμματος είναι η εξής.

$$A_1M = MB_1$$



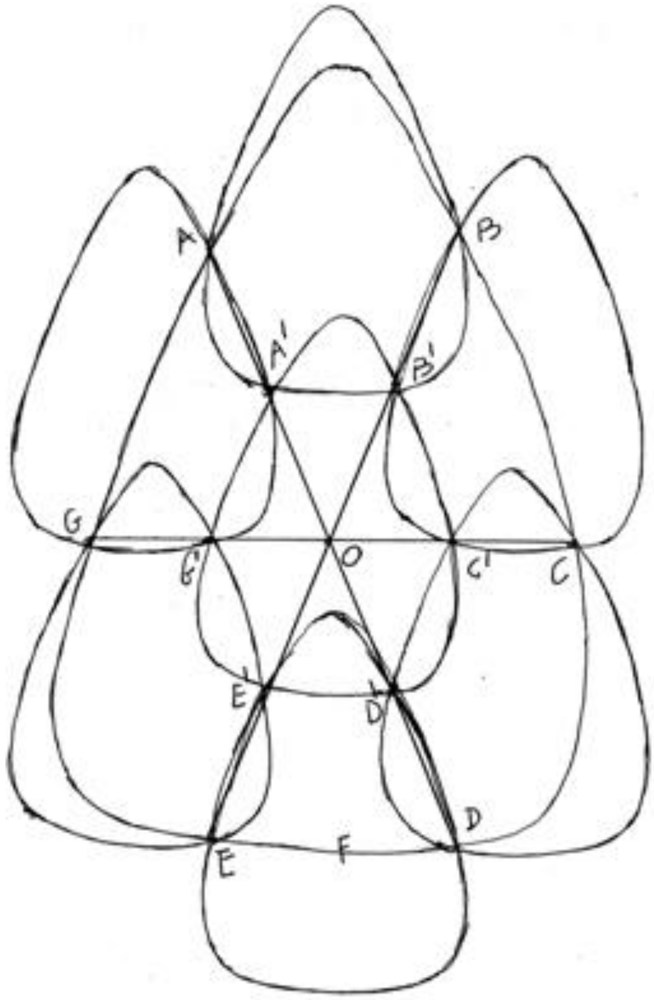
Εστω Α,Β σημεία της περιμέτρου του F και ΑΒ παράλληλος προς ευθεία (ε) σε απόσταση p. Eιναι προφανές οτι μπορούμε να βρούμε δύο χορδές CD,EF παραλληλες και ίσες προς AB/2 σε αποστάσεις a και b αντίστοιχα. Παρατηρούμε οτι τα a και b είναι συναρτήσεις του p και έστω οτι $a(p) \geq b(p)$. Ακόμη μπορεί να Βρεθεί θέση της ΑΒ παράλληλη προς (ε) , σε απόσταση p' ώστε .
Λόγω της συνέχειας προς p θα υπάρχει po ώστε a(po)=b(po).
Εστω οτι τα παραπάνω συμβαίνουν για τη θέση AoCoDoBoZoEo και οτι η AoBo Σχηματίζει γωνία φ με τον άξωνα οχ.
Υποθέτουμε ακόμη $AoM \geq MBo$
Αν περιστραφεί η AoBo κατά 180 μοίρες στη νέα θέση θα είναι $AoM \leq MBo$.
Λόγω της συνέχειας θα υπάρχει γωνία φ_1 ώστε $\mathrm{A_1M = MB_1}$ φ_1
Απ'όσα έχουμε ήδη αναφέρει προκύπτει οτι υπάρχει εγγεγραμμένο εξάγωνο στο F ώστε CD,EZ είναι παράλληλες και ίσες προς το ήμιση της ΑΒ και ακόμη οι διαγώνιοι AB,CZ,DE αλληλοδιχοτομούνται. Δηλαδή το ACDBZE ειναι affine Εξάγωνο.



Στην απόδειξη του θεωρήματος τώρα.
Θεωρούμε το affine κανονικό εξάγωνο κέντρου O, το εγγεγραμμένο στο κυρτό σχήμα F, έστω T=ABCDEG και είναι AB και ED ίσες, παράλληλες και παράλληλες και ίσες πρός CG/2.
Τα σημεία A',O, G' διαιρούν την AD σε τέσσερα ίσα μέρη. Ομοια τα B', O, E' την BE και τέλος τα C', O, G' την CG' σε τέσσερα ίσα μέρη.
Εστω
$\frac{1}{2}$ F=h(F). Στο εξάγωνο A'B'C'D'E'G' είναι περιγεγραμμένο το $\frac{1}{2}$ F=h(F)
Εύκολα βλέπουμε οτι το σχήμα F καλύπτεται απο το h(F) και απο τα ακόλουθα σχήματα που προκύπτουν απο το h(F) κατα την μεταφορά κατά τα διανύσματα:

B'A, C'B, E'D, G'E, A'G,.

Αρα λοιπόν το F καλύπτεται απο επτά ομοιόθετα του ίσα προς $\frac{1}{2}$ F.


A
B
A'
B'
G
G'
O
C'
C
E'
D'
D
E
F

Βιβλιογραφία

1. T.Bonnesen, W. Fencel, Theory of convex bodies, B.Associetes.

2 . I.M. Yaglom ,V.C Boltyanskii, Convex Figures, Holt Rinehart and Winston

3. V. Voltjansky, I. Golberg, Results and Problems in Combinatorial Geometry, Cambridge Uni. Press.

4. K. Bezdek, Classical topics in Discrete Geometry, Can. Math. Society.

5. Marek Lassak, Covering a plane convex body by four homothetical copies with the smalest positive ratio, Geometriae Dedicata 21 (1986) 157-167.

6. G.A. Rogers, Packing and Covering, Camb. Uni. Press.