Εφαρμογή της Υπερβολικής Γεωμετρίας στο μοντέλο του Poincaré

Δόρτσιος Κων/νος, Μαθηματικός
Τσίντσιφας Γεώργιος, Μαθηματικός

Εισαγωγή

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη, το πρώτο επιστημονικό βιβλίο σε παραγωγική διαδικασία με τους κανόνες της Λογικής, τυπώθηκε για πρώτη φορά το 1482 στη Βενετία. Έκτοτε έχουν γίνει χιλιάδες εκδόσεις σε όλες σχεδόν τις γλώσσες του πλανήτη. Σε διάφορες παραλλαγές με το ίδιο περιεχόμενο τα Στοιχεία εξακολουθούν να είναι ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία παγκόσμια. Η διαίσθηση του Ευκλείδη, ώστε το 5^{ο} αίτημα των παραλλήλων, να τεθεί αξιωματικά είναι αξιοθαύμαστη.

Η προσπάθεια πολλών Μαθηματικών διά μέσου των αιώνων να αποδείξουν ως θεώρημα το πέμπτο αίτημα, τελικά, οδήγησε τους Gauss(1777-1855), Lobatschewsky(1793-1856), Bolyai(1802-1870) στην υπερβολική Γεωμετρία και τον Riemann(1826-1866) στην ελλειπτική Γεωμετρία. Το 1899 μετά από έρευνα στις βάσεις της Γεωμετρίας ο D. Hilbert(1862-1943) παρουσίασε το βιβλίο του **Grundlangen der Geometrie.** Κλασσικό βιβλίο στο οποίο ανατρέχει κάθε ερευνητής της Γεωμετρίας.

Σήμερα, το κοινό κομμάτι σε όλες τις Γεωμετρίες λέγεται *Απόλυτη Γεωμετρία* και είναι βασισμένη στα ακόλουθα αξιώματα όπως τέθηκαν από τον Hilbert:

I. Αξιώματα συμβολής
II. Αξιώματα διατάξεως
III. Αξιώματα ισότητας
IV. Αξιώματα συνεχείας

Στην Ευκλείδειο Γεωμετρία δεχόμαστε τα αξιώματα της Απολύτου Γεωμετρίας και το αξίωμα των παραλλήλων, δηλαδή:

V. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται ακριβώς μία παράλληλος προς αυτή.

Στην Ελλειπτική Γεωμετρία(μετά από μια διαφοροποίηση σε ένα από τα αξιώματα συμβολής και σε ένα από τα αξιώματα διατάξεως) δεχόμαστε ότι:

$V_ε$. Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου τέμνονται πάντα.

Εφαρμογή της Ελλειπτικής Γεωμετρίας είναι η Γεωμετρία στην επιφάνεια μιας σφαίρας.

Στην Υπερβολική Γεωμετρία δεχόμαστε ως αξίωμα ότι:

Vυ. Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν δύο τουλάχιστον παράλληλες προς την ευθεία αυτή στο υπερβολικό επίπεδο.

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα για τα οποία ισχύει η Υπερβολική Γεωμετρία. Το πιο απλό και στο οποίο ισχύουν ιδιότητες προερχόμενες από την Ευκλείδειο Γεωμετρία είναι το μοντέλο του Poincaré. Τα μοντέλα εφαρμογής μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, εκτός του ότι είναι μια δικαίωση όσων δούλεψαν στις βάσεις της Γεωμετρίας, απεδείχθησαν ιδιαίτερα χρήσιμα στη γενική έρευνα των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Τα θεωρήματα της Απολύτου Γεωμετρίας ισχύουν στην Ευκλείδειο και Υπερβολική Γεωμετρία και σε γενικές γραμμές στην Ελλειπτική*(υπάρχουν κάποιες διαφορές)*.

Μερικά τέτοια θεωρήματα είναι τα παρακάτω:

Θ1. Αν δύο ευθείες τέμνονται, το άθροισμα των παρακειμένων γωνιών είναι 2 ορθές.
Θ2. Οι κατακορυφήν γωνίες δύο τεμνομένων ευθειών είναι ίσες.
Θ3. Οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

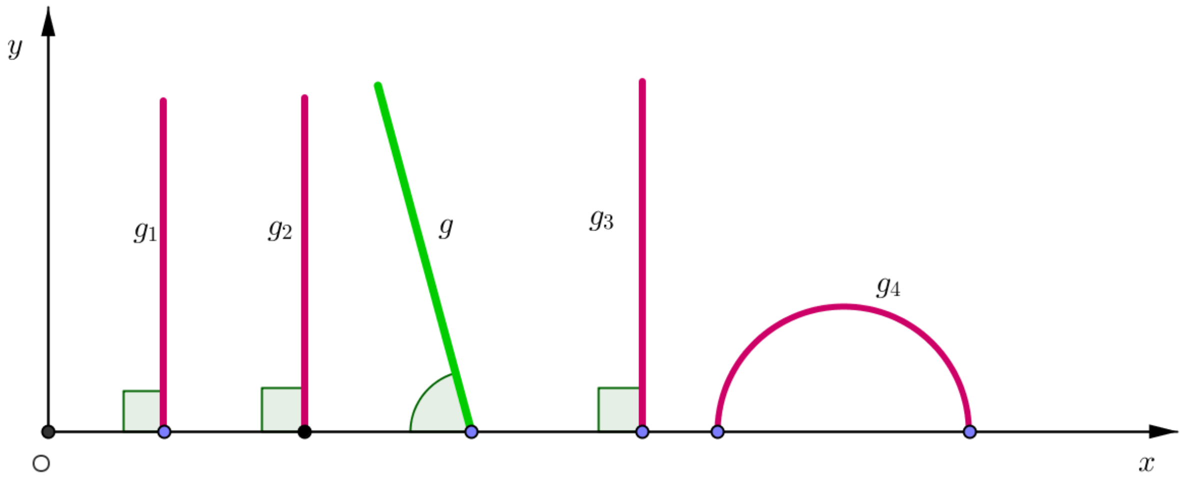
Θ4. Ισχύουν οι ισότητες των τριγώνων Π-Γ-Π και Γ-Π-Γ.
Θ5. Οι παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
Θ6. Οι μεσοκάθετοι στις πλευρές τριγώνου διέρχονται δια του αυτού σημείου.
Θ7. Σε κύκλο η ακτίνα που διχοτομεί την επίκεντρο γωνία, είναι μεσοκάθετος στην αντίστοιχη χορδή και διχοτομεί το τόξο που ορίζεται από αυτήν.
Θ8. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία κάθετος προς την ευθεία αυτή.

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι ένα πολύ μικρό μέρος της Απολύτου Γεωμετρίας. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή του μοντέλου του Poincaré και κατόπιν θα δούμε μερικά αξιόλογα θεωρήματα γνωστά από την Ευκλείδειο Γεωμετρία που συνεχίζουν να ισχύουν και στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Το μοντέλο του Poincaré

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy στο επίπεδο. Υπερβολικός χώρος που αναπτύσσεται στο μοντέλο του Poincaré είναι το ημιεπίπεδο $y>0$ που θα ονομάζεται στο εξής ***h-επίπεδο***. Τα σημεία του h-επιπέδου θα λέγονται ***h–σημεία***. Οι υπερβολικές ευθείες, ***h-ευθείες***, είναι οι ημιπεριφέρειες με κέντρα πάνω στον άξονα των x και οι οποίες ανήκουν στο ***h-επίπεδο.***

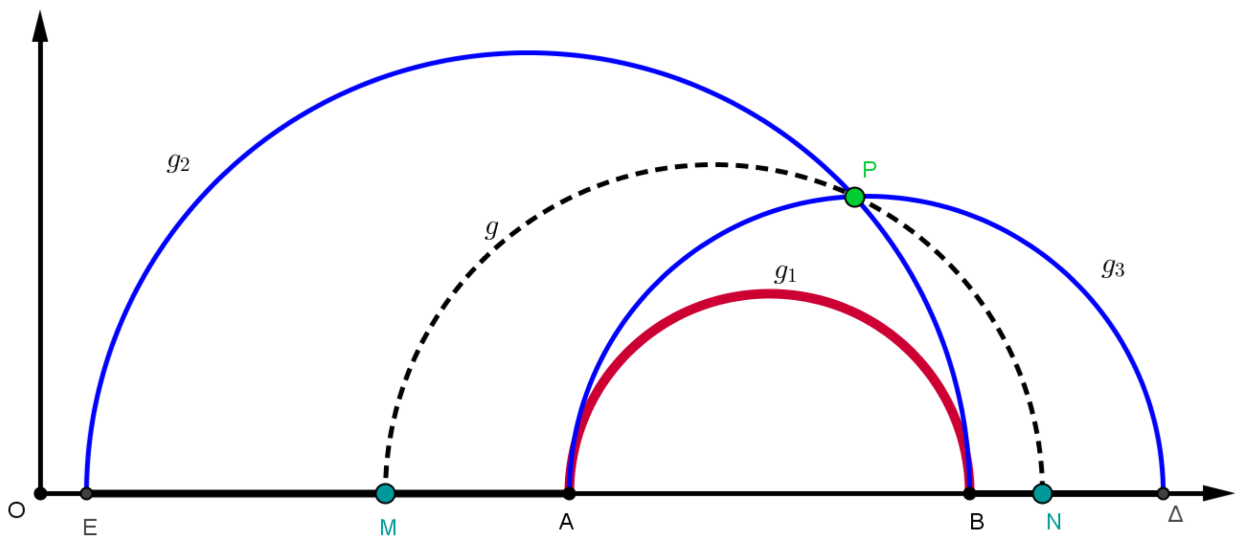
Στο παρακάτω σχήμα 1 οι $g_1\, g_2, g_3, g_4$ είναι ***h-ευθείες*** ενώ η g όχι. Οι



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ \ 1$

g_1, g_2, g_3 μπορούν να θεωρηθούν κύκλοι ακτίνας $R=\infty$.

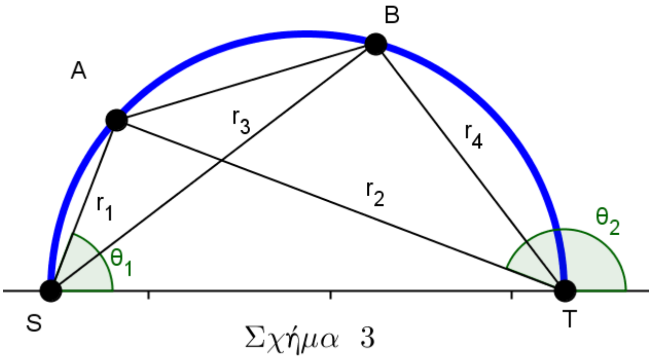
Στο σχήμα 2 φαίνονται άπειρες ευθείες g από το h-σημείο P παράλληλες προς την g_1, με οριακές τις g_2, g_3.



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ \ 2$

h-απόσταση δύο σημείων

Ταυτίζουμε το h-επίπεδο με το μιγαδικό επίπεδο $y>0$ και έστω A,B δύο h-σημεία. Οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία A,B θα συμβολίζονται με τα ίδια γράμματα.



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ \ 3$

Έστω τώρα η h-ευθεία που διέρχεται από τα A και B. *(Σχήμα 3)*

Ορίζουμε ως h-απόσταση των A,B τον αριθμό που δίδεται από τον τύπο:

$$h-AB=R\left|\ln(ABST)\right| \quad (1)$$

όπου R σταθερά και $(ABST)$ ο διπλός λόγος των σημείων A,B,S,T δηλαδή:

$$(ABST)=\frac{A-S}{B-S}:\frac{A-T}{B-T}$$

Ο παραπάνω διπλός λόγος είναι θετικός, διότι:

$$\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{2} \ (\sigma\chi.3)$$

$$\frac{A-S}{A-T}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ακόμα:

$$\frac{B-S}{B-T}=\frac{r_3}{r_4}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

άρα:

$$(ABST)=\frac{r_1}{r_2}:\frac{r_3}{r_4}=\frac{r_1\cdot r_4}{r_2\cdot r_3}>0\Rightarrow$$

$$h-AB=R\left|\ln\frac{r_1\cdot r_4}{r_2\cdot r_3}\right| \quad (1)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία είναι $T=\infty$ η περιφέρεια που διέρχεται από τα A,B γίνεται η ευκλείδεια ευθεία $\varepsilon\perp Ox$ *(Σχήμα 4)*

Βλέπουμε ότι:

$$h-AB=R\left|\ln(ABST)\right|$$

για $T=\infty$ γίνεται:

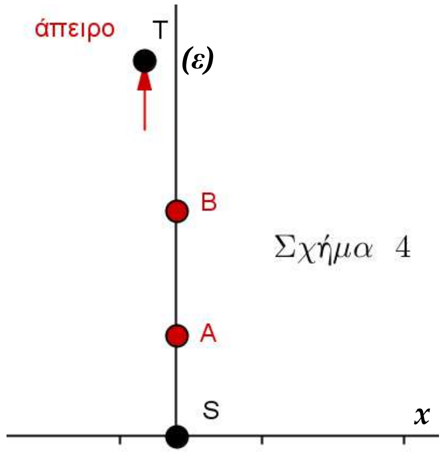
$$(ABST) = \frac{A-S}{B-S} : \frac{A-T}{B-T} = \frac{A-S}{B-S}$$

δηλαδή:

$$(ABST) = \frac{\left|\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|}$$

και συνεπώς:

$$h - AB = R\left|\ln\frac{\left|\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|}\right| \quad (2)$$



Μετασχηματισμός του Moebius

Λέγεται ο μετασχηματισμός F του μιγαδικού επιπέδου C στον εαυτό του και ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$F : z \to z' : z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \mu\varepsilon \quad a,b,c,d \in C \quad \kappa\alpha\iota \quad ad - bc \neq 0$$

Θεώρημα 1. ***Το σύνολο των μετασχηματισμών του Moebius αποτελεί ομάδα.***

Απόδειξη:

Έστω F_1, F_2 δύο μετασχηματισμοί του Moebius και $z \in C$. Τότε:

$$z_1 = F_1(z), \quad \mu\varepsilon \quad z_1 = \frac{az+b}{cz+d} \quad \kappa\alpha\iota \quad z_2 = F_2(z_1) \quad \mu\varepsilon \quad z_2 = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}$$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$z_2 = F_2 F_1(z) = \frac{(a_1 a + b_1 c)z + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)z + (c_1 b + d_1 d)}$$

ακόμα:

$$\left|\begin{bmatrix} a_1 a + b_1 c & a_1 b + b_1 d \\ c_1 a + b_1 c & c_1 b + d_1 d \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right| \cdot \left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| \neq 0$$

δηλαδή το γινόμενο των μετασχηματισμών του Moebius μετατράπηκε σε γινόμενο πινάκων. Έτσι η απόδειξη ότι αποτελούν ομάδα μπορεί να μεταφερθεί στο γινόμενο των πινάκων.

Το βασικό θεώρημα που είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου του Poincaré είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 2. ***Ο μετασχηματισμός του Moebius διατηρεί το διπλό λόγο.***

Απόδειξη:

Πράγματι αν είναι: $z_i' = F(z_i)$ όπου $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mu\varepsilon \quad |T| \neq 0$.

Τότε:

$$z_i' - z_j' = \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}$$

και αν τεθεί:

$$k = \frac{(ad-bc)^2}{(cz_1+d)(cz_2+d)(cz_3+d)(cz_4+d)}$$

προκύπτει:

$$(z_1' - z_3')(z_2' - z_4') = k(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$$

κι ακόμα:

$$\frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_2' - z_3')(z_1' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

δηλαδή:

$$(z_1' z_2' z_3' z_4') = (z_1 z_2 z_3 z_4)$$

Η παραπάνω ιδιότητα των μετασχηματισμών Moebius μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Moebius ως την ισομετρική ομάδα για το μοντέλο του Poincaré. Άρα, η αντιστροφή, η μεταφορά και η ομοιοθεσία διατηρούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο μετασχηματισμός Moebius διατηρεί και τις γωνίες μεταξύ δύο γραμμών βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ισομετρικός για το συγκεκριμένο μοντέλο του Poincaré. Στην ουσία τα ανωτέρω είναι γνωστά από τη Στοιχειώδη Γεωμετρία, όπως για παράδειγμα η διατήρηση των γωνιών κατά την αντιστροφή.

Τις ιδιότητες αυτές μπορούμε με Στοιχειώδη Γεωμετρία να τις μελετήσουμε πώς λειτουργούν και στο μοντέλο του Poincaré.

Διατήρηση της απόστασης δύο σημείων

Έστω h-AB με A,B στην περιφέρεια $(c)=(O,OS=OT)$ (Σχήμα 5). Η αντιστροφή (T,k^2) μετασχηματίζει την ημιπεριφέρεια (c) στην ημιευθεία (c') και το τμήμα h-AB στο τμήμα h-Α΄Β΄.

Θα δείξουμε ότι είναι:

$$h - AB = h - A'B' \quad (3)$$

Πράγματι:

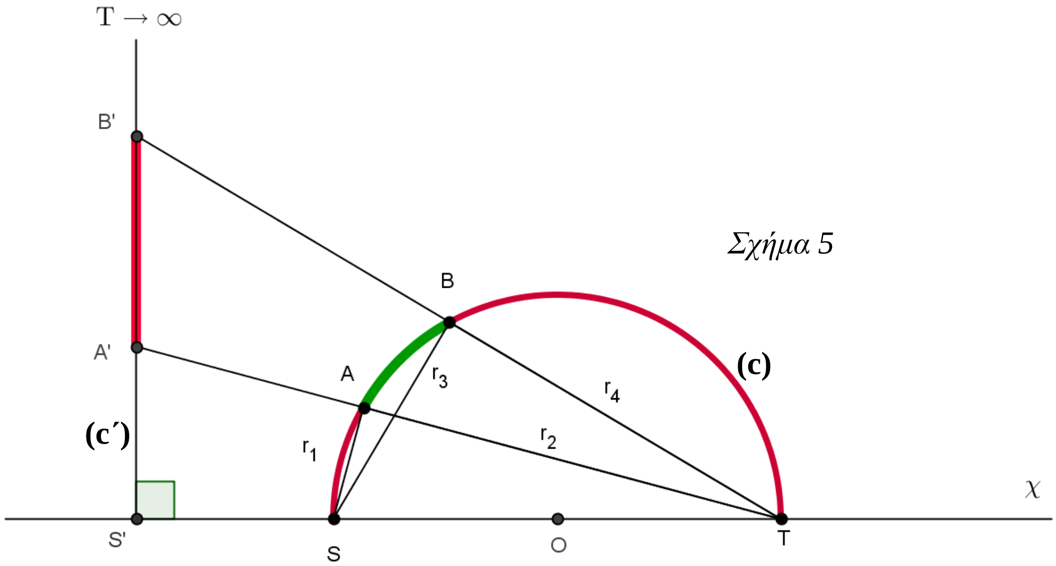
Θεωρώντας την αντιστροφή με κέντρο το σημείο T και δύναμη k^2, έχουμε:

$$S \to S', \quad A \to A', \quad B \to B', \quad T' \to \infty$$

άρα:

$$S'A' = \frac{k^2 r_1}{TS \cdot r_2}, \quad S'B' = \frac{k^2 r_3}{TS \cdot r_4}$$

και συνεπώς από τον τύπο (2) προκύπτει:



Σχήμα 5

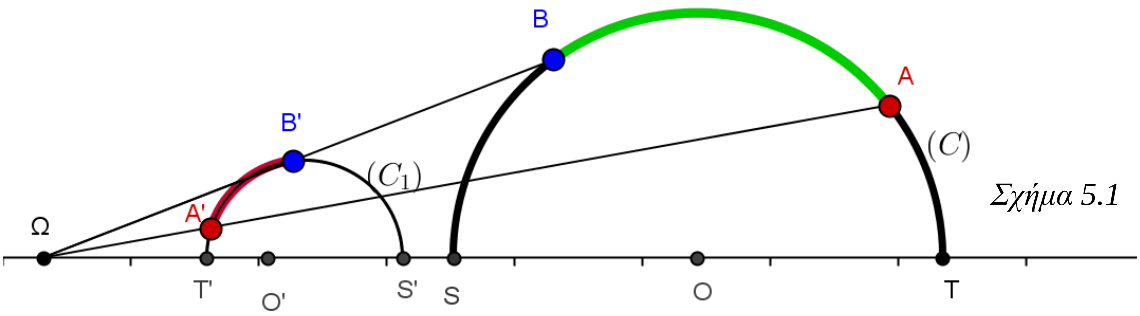
$$h - A'B' = R\left|\ln\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3}\right| \quad (4)$$

Επίσης από τον τύπο (1) είναι:

$$h - AB = R\left|\ln\frac{r_1 \cdot r_4}{r_2 \cdot r_3}\right| \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει η ζητούμενη (3).

Αν τώρα ο πόλος αντιστροφής είναι αντί του σημείου T ένα άλλο σημείο εκτός του κύκλου (O), οπότε το αντίστροφο του κύκλου αυτού είναι άλλος κύκλος, η απόδειξη της (3) είναι περίπου η ίδια.



Σχήμα 5.1

Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται η αντιστροφή (c') του κύκλου (c) ως προς κέντρο το σημείο Ω και δύναμη το k^2 *(Κύκλος αντιστροφής* (Ω,k)).

Τα $h-AB=h-A'B'$ λέγονται συμμετρικά ως προς τον κύκλο (Ω,k).

h – κύκλος

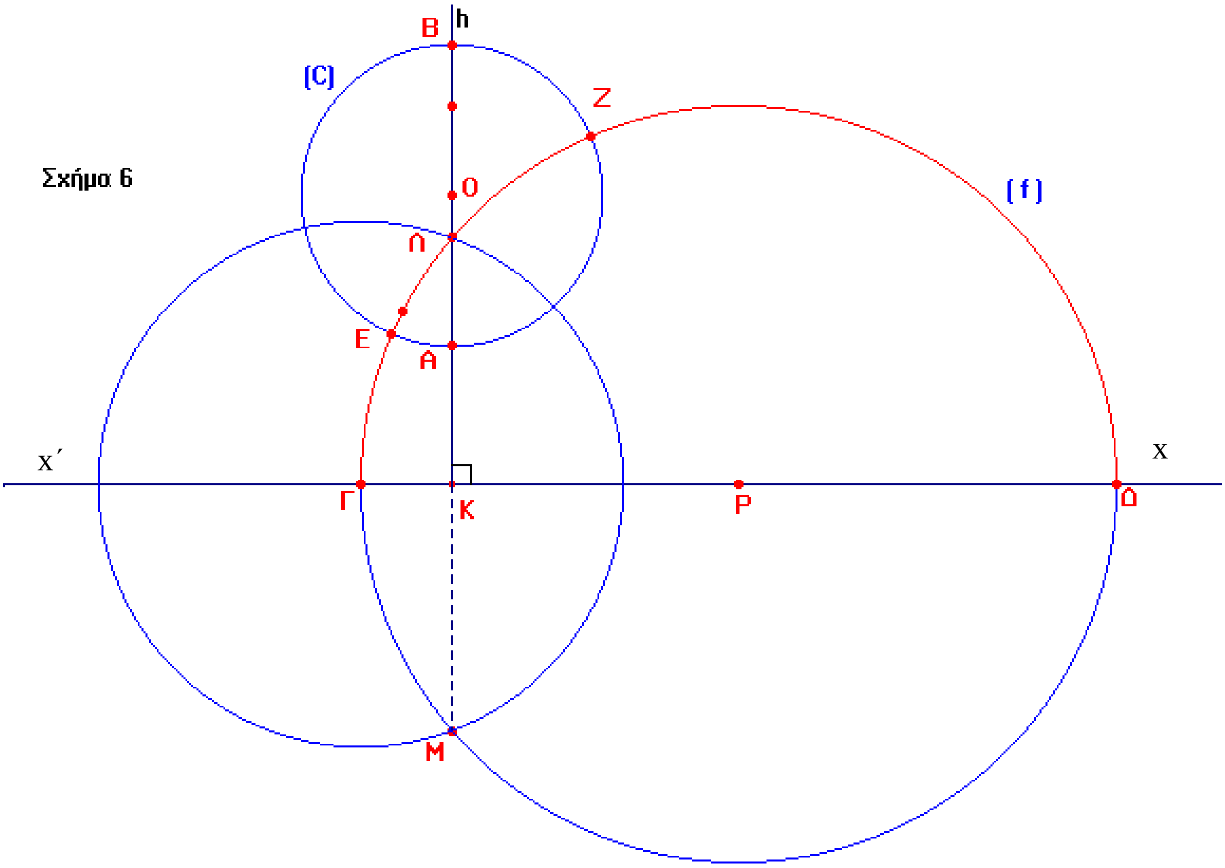
Είναι κάθε κύκλος που περιέχεται στο h-ημιεπίπεδο.

Έστω (c) ***κύκλος Ευκλειδείου κέντρου O. Θα προσδιορίσουμε το h-κέντρο.***

Από το κέντρο O(Σχ.6) φέρουμε την κάθετη OK *(ευθεία h)* στον άξονα των x και A,B τα σημεία τομής αυτής με τον ο κύκλο (c). Επιλέγουμε το σημείο Λ στο τμήμα AB τέτοιο ώστε:

$$\mathrm{K\Lambda}^2 = \mathrm{KA}\cdot\mathrm{KB} \quad (1)$$

καθώς και το σημείο M στην προέκταση της $\mathrm{\Lambda K}$ ώστε: $\mathrm{\Lambda K} = \mathrm{KM}$. Στην περίπτωση αυτή τα σημεία $\mathrm{B},\mathrm{A},\Lambda,\mathrm{M}$ αποτελούν αρμονική τετράδα.



Σχήμα 6

Ακόμα είναι:

$$h - \mathrm{\Lambda B} = \left|\ln(\mathrm{\Lambda BK}\infty)\right| = \left|\ln\frac{\mathrm{\Lambda K}}{\mathrm{BK}}\right| = -\ln\frac{\mathrm{\Lambda K}}{\mathrm{BK}}, \quad (\mathrm{\Lambda K} < \mathrm{BK}) \quad (2)$$

$$h - \mathrm{A\Lambda} = \left|\ln(\mathrm{A\Lambda K}\infty)\right| = \left|\ln\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{\Lambda K}}\right| = -\ln\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{\Lambda K}}, \quad (\mathrm{AK} < \mathrm{\Lambda K}) \quad (3)$$

Έτσι από την (1) και από τις (2), (3) προκύπτει:

$$h - \mathrm{\Lambda B} = h = \mathrm{A\Lambda}$$

Επίσης ο κύκλος (f) *(κέντρου* P*)* που διέρχεται από τα σημεία Λ,M τέμνει τον άξονα των x στα σημεία Γ,Δ. Τέλος ο κύκλος $(\Gamma,\Gamma\Lambda)$ ανήκει στη δέσμη με σημεία βάσης τα Λ,M *(σημεία Poncelet)* και είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο (c).

Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια την αντιστροφή με κέντρο το σημείο Γ και κύκλο αντιστροφής τον $(\Gamma,\Gamma\Lambda)$ τότε ως προς το μετασχηματισμό αυτό ο κύκλος (c) παραμένει αναλλοίωτος *(κύκλος c και κύκλος (Γ,Λ) ορθογώνιοι)*, ενώ η ευθεία (h) απεικονίζεται στο ημικύκλιο $\Gamma\mathrm{EZ}\Delta$ του κύκλου (f). Έτσι είναι: $h - \mathrm{\Lambda E} = h - \mathrm{B\Lambda}$ και $h - \mathrm{\Lambda Z} = h - \mathrm{A\Lambda}$. Δηλαδή το h-κέντρο του (c) είναι το σημείο Λ.

Ο άξονας $x'x$ είναι ο ριζικός άξονας του κύκλου (c) και του σημείου Λ.

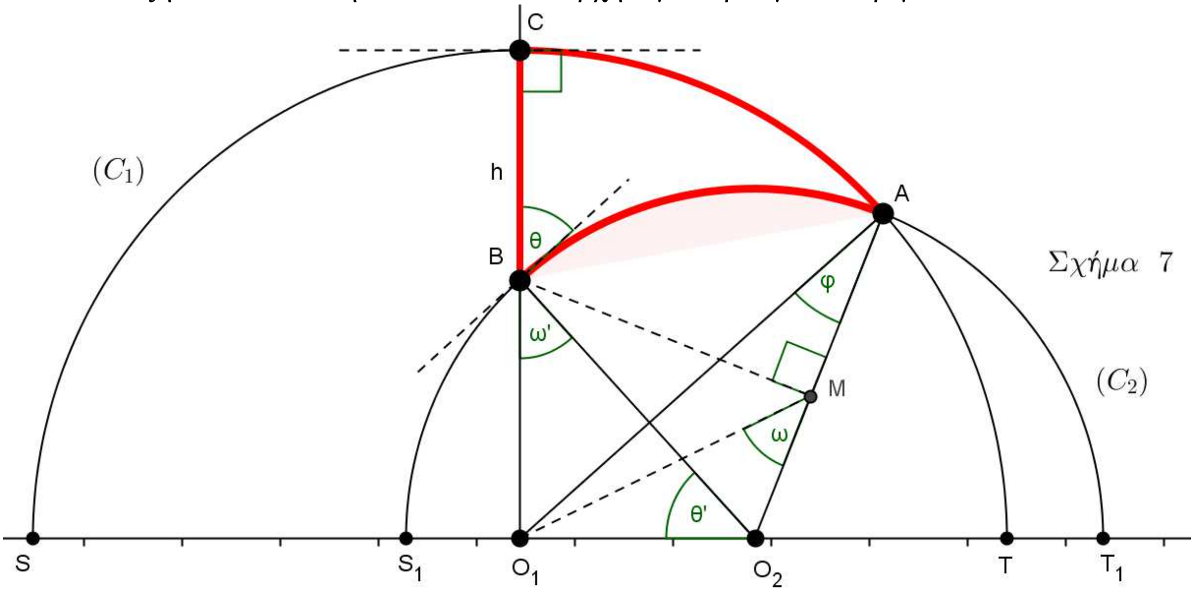
Γωνία δύο h-ευθειών

Είναι η γωνία των εφαπτόμενων των αντιστοίχων περιφερειών στο σημείο τομής των.

Θεώρημα 3: ***Σε κάθε h-τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο των δύο ορθών.***

Δηλαδή αν ABC τρίγωνο του h-επιπέδου θα είναι: $A+B+C<2\,\textit{ορθές}$.

Η απόδειξη είναι εύκολη. Γίνεται κατ' αρχήν για ορθογώνιο τρίγωνο. Έστω ABC



Σχήμα 7

τρίγωνο και $C=1\,\textit{ορθή}$. Θεωρούμε ότι h-BC είναι ευθεία κάθετος στον άξονα των x. Αν αυτό δεν ισχύει για το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο τότε με κατάλληλη αντιστροφή μετασχηματίζουμε το σχήμα.

Στο σχήμα 7 φαίνεται εύκολα ότι $A+B<1\,\textit{ορθή}$, διότι το σημείο A είναι εκτός του κύκλου διαμέτρου O_2B και επομένως:

$$\hat{A}=\hat{\phi}<\hat{\omega}' \quad \kappa\alpha\iota \quad \hat{B}=\hat{\theta}=\hat{\theta}'$$

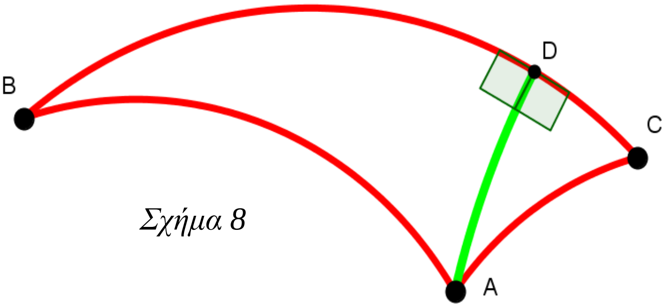
άρα:

$$\hat{A}+\hat{B}<\hat{\omega}'+\hat{\theta}'=1\,\textit{ορθή}$$

Δηλαδή στο ορθογώνιο h-τρίγωνο ABC έχουμε $A+B+C<2\,\textit{ορθές}$

Η απόδειξη για τυχαίο τρίγωνο ABC προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα 3. *(Σχήμα 8)*

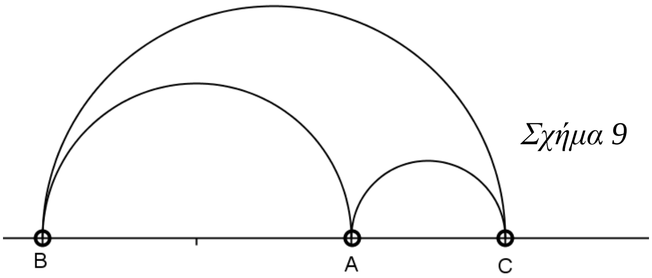
Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ύψος AD στο τρίγωνο ABC, τότε έχουμε δύο



Σχήμα 8

ορθογώνια τρίγωνα με άθροισμα $A+B+C<2\,\textit{ορθές}$.

Παρατήρηση: Στο παρακάτω σχήμα 9 ισχύει: $A+B+C=\varepsilon\to 0$.

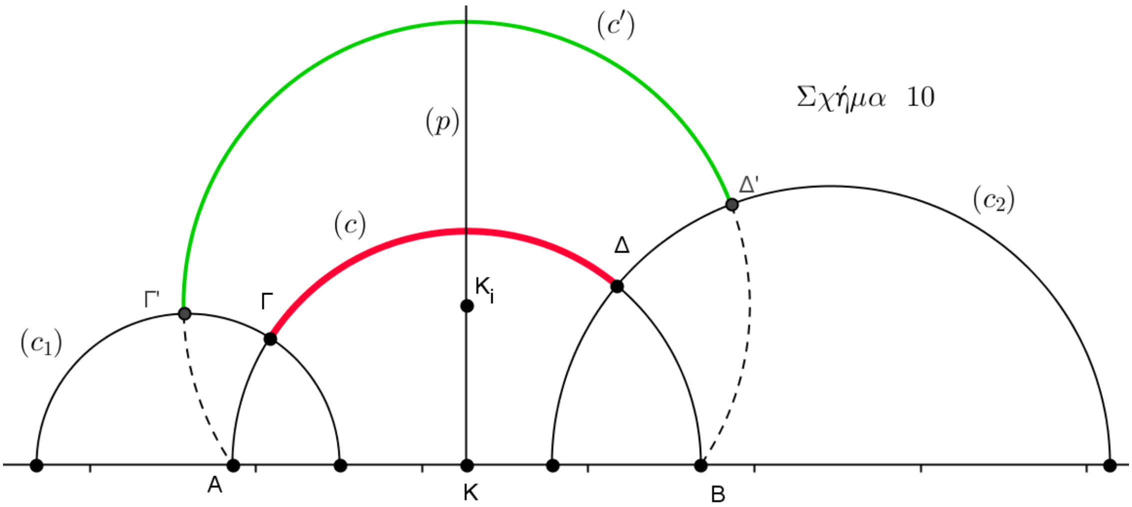


Σχήμα 9

Θεώρημα 4. Στο h-επίπεδο(στο μοντέλο Poincaré) δύο παράλληλες h-ευθείες έχουν μια ακριβώς κοινή κάθετο.

Πράγματι.

Αν (p) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων $(c_1),(c_2)$ τότε οι εφαπτόμενες από το σημείο K στους $(c_1),(c_2)$ είναι ίσες προς ρ. Ο κύκλος $(c)=(K,\rho)$ είναι ορθογώνιος προς τους $(c_1),(c_2)$. Κοινή απόσταση των $(c_1),(c_2)$ είναι το τμήμα h- ΓΔ. Ο κύκλος (c') που διέρχεται από τα σημεία βάσης A,B της δέσμης των $(c_1),(c_2)$

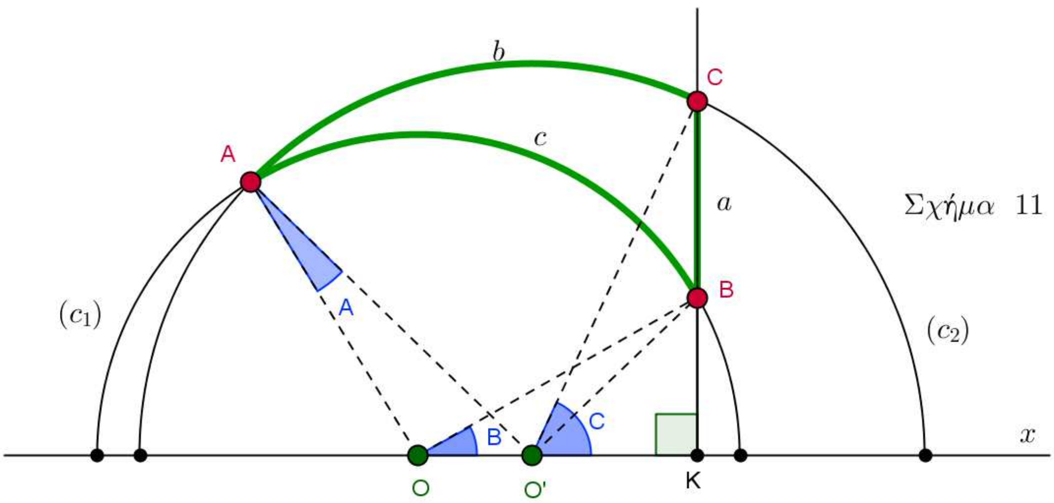


$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 10

είναι συγχρόνως κάθετος στους $(c_1),(c_2)$ αλλά δεν έχει το κέντρο στον άξονα των x.

Μετρικές σχέσεις στο μοντέλο του Poincaré

Έστω το $h-ABC$ τρίγωνο του h-επιπέδου. Θα αναζητήσουμε μετρικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του εν λόγω τριγώνου. Μπορούμε για απλότητα να θεωρήσουμε ότι μια πλευρά π.χ. η h-BC βρίσκεται σε ευθεία κάθετο στον άξονα των x. (Σχήμα 11)



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 11

I) Θέτουμε: h-BC=a, h-AC=b, h-AB=c και A,B,C τις αντίστοιχες γωνίες. Τότε θα είναι:

$$a = R\left|\ln\left(BCK\infty\right)\right| = R\ln\left(\frac{KC}{KB}\right)$$

Άρα:

$$\frac{a}{R} = \ln\left(\frac{KC}{KB}\right)$$

κι ακόμα:

$$\frac{a}{R} = \ln\frac{KC}{KB} \Leftrightarrow \frac{KC}{KB} = e^{\frac{a}{R}} \Leftrightarrow \frac{KB}{KC} = e^{-\frac{a}{R}}$$

αλλά:

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{e^{\frac{a}{R}} + e^{-\frac{a}{R}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{KC}{KB} + \frac{KB}{KC}\right) = \frac{KB^2 + KC^2}{2KB \cdot KC} \quad (1)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $OKB, O'KC$ προκύπτει:

$$KB^2 + KC^2 = \left(OA^2 + O'A^2\right) - \left(OK^2 + O'K^2\right) =$$

$$= (OO')^2 + 2OA \cdot O'A\cos\left(\widehat{\Theta AO'}\right) - (OK - O'K)^2 - 2OK \cdot O'K =$$

$$= 2OB \cdot O'C\cos\left(\widehat{\Theta AO'}\right) - 2OK \cdot O'K\,.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1) έχουμε:

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{OB \cdot O'C}{KB \cdot KC}\cos\widehat{\Theta AO'} - \frac{OK \cdot O'K}{KB \cdot KC} \quad (2)$$

αλλά:

$$\frac{OB}{KB} = \frac{1}{\sin\widehat{BOK}}\ , \quad \frac{O'C}{KB} = \frac{1}{\sin\widehat{CO'K}}$$

$$\widehat{BOK} = B, \quad \widehat{CO'K} = C, \quad \widehat{\Theta AO'} = A$$

ακόμα:

$$\frac{O'K}{KC} = -\cot C, \qquad \frac{OK}{KB} = \cot B$$

και μετά τις αντικαταστάσεις στη σχέση (2) τελικά προκύπτει:

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C} \quad (A)$$

Κυκλικά προκύπτουν ακόμα οι τύποι:

$$\cosh\frac{b}{R} = \frac{\cos B + \cos C\cos A}{\sin C\sin A}, \quad \cosh\frac{c}{R} = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A\sin B}$$

II) Επίσης για το $h-ABC$ ισχύει :

$$\frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\sinh\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\sinh\frac{c}{R}}{\sin C}=\frac{\sqrt{Q}}{\sin A\sin B\sin C}\qquad (B)$$

όπου:

$$Q=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C-1$$

III) Για ορθογώνια τρίγωνα, δηλαδή $C=\frac{\pi}{2}$, ισχύει:

$$\left.\begin{array}{ll}\sinh\frac{a}{R}=\sinh\frac{c}{R}\sin A, & \tanh\frac{a}{R}=\tanh\frac{c}{R}\cos B\\ \tanh\frac{a}{R}=\sinh\frac{b}{R}\tan A, & \cosh\frac{c}{R}=\cosh\frac{a}{R}\cosh\frac{b}{R}\\ \cosh\frac{c}{R}=\cot A\cot B, & \cosh\frac{a}{R}=\frac{\cos A}{\sin B}\end{array}\right\}\qquad (C)$$

IV) Κυκλικοί ανάλογοι τύποι είναι και οι εξής:

$$\cosh\frac{a}{R}=\cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R}-\sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos A\qquad (D)$$

Ο αντίστοιχος τύπος της Σφαιρικής Γεωμετρίας είναι*(σφαίρα ακτίνας R):*

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A,\qquad (E)$$

Σχόλια:

Παρατηρούμε ότι αν στον τύπο (E) τεθεί όπου R το iR, *με* $i^2=-1$ τότε ο τύπος αυτός της Σφαιρικής Γεωμετρίας γίνεται ο τύπος (D) της Υπερβολικής Γεωμετρίας.*(Εδώ ειδικά στο μοντέλο του Poincaré).*

Η εξήγηση είναι ότι η Σφαιρική Γεωμετρία αναφέρεται σε χώρο με σταθερή καμπυλότητα $\frac{1}{R^2}$ ενώ η Υπερβολική Γεωμετρία σε χώρο σταθερής αλλά αρνητικής καμπυλότητας $-\frac{1}{R^2}$. Αυτός είναι ένας λόγος. Επιπλέον αρκετοί από τους τύπους αυτούς ανήκουν και στις δύο αυτές μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες διότι ανήκουν στην Απόλυτη Γεωμετρία.

Ειδικά από τον τύπο (E), αν διατηρήσουμε σταθερές τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου $h-ABC$ και θεωρήσουμε ότι $R\to\infty$, κι ακόμα αν αναπτύξουμε τα ημίτονα και συνημίτονα σε σειρές, τότε παραλείποντας τους όρους ανωτέρας της $2^{ης}$ τάξης έχουμε:

$$1-\frac{a^2}{2R^2}=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)+\frac{b}{R}\cdot\frac{c}{R}\cos A$$

δηλαδή:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A$$

Το θεώρημα του Πτολεμαίου

Θεώρημα 5. Αν A_1, A_2, A_3, A_4 **κορυφές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου σε κύκλο, τότε είναι:**

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 \qquad (1)$$

Το παραπάνω θεώρημα, παλιότερα, διδάσκονταν στα σχολεία. Θυμόμαστε όλοι την απόδειξη με τα όμοια τρίγωνα και μια ακόμη απόδειξη, λίγο πιο προχωρημένη, με αντιστροφή. **[13],[17],[18].**

Οι αποδείξεις που προαναφέρθηκαν περιέχουν και την περίπτωση να μην είναι τα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 ομοκυκλικά οπότε στην περίπτωση αυτή είναι:

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 > A_1A_3 \cdot A_2A_4 \qquad (2)$$

Οι αποδείξεις των αντιστρόφων προτάσεων (1) και (2) μπορούν να γίνουν με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιείται για την απόδειξη των (1) και (2) ή ακόμα με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Ο συνδυασμός των (1) και (2) λέμε ότι είναι η ***ανισοϊσότητα του Πτολεμαίου.***

Αξιοσημείωτο είναι ότι η ανισοϊσότητα του Πτολεμαίου ισχύει στη Σφαιρική Γεωμετρία όπως και στην Υπερβολική Γεωμετρία***(μοντέλο του Poincaré).*** Πράγματι αν A_1, A_2, A_3, A_4 είναι σημεία μιας σφαίρας (O,R) του αυτού ημισφαιρίου, τότε στο τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ εφαρμόζουμε το θεώρημα του Πτολεμαίου. Στη συνέχεια κάθε ευθύγραμμο τμήμα, έστω το A_1A_2 είναι:

$$\frac{A_1A_2}{2} = R\sin\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2} = R\sin\frac{\widehat{A_1A_2}}{2R}$$

Όμοιοι τύποι προκύπτουν και για τα A_3A_4, A_2A_3, A_4A_1, A_1A_3, A_2A_4.

Έτσι το θεώρημα του Πτολεμαίου παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sin\frac{\widehat{A_1A_2}}{2R}\cdot\sin\frac{\widehat{A_3A_4}}{2R} + \sin\frac{\widehat{A_2A_3}}{2R}\cdot\sin\frac{\widehat{A_4A_1}}{2R} \geq \sin\frac{\widehat{A_1A_3}}{2R}\cdot\sin\frac{\widehat{A_2A_4}}{2R} \qquad (3)$$

Αν στη συνέχεια τεθεί αντί του R το iR τότε ο τύπος (3) γίνεται ο αντίστοιχος τύπος για την Υπερβολική Γεωμετρία. Δηλαδή:

$$\sinh\frac{\widehat{A_1A_2}}{2R}\cdot\sinh\frac{\widehat{A_3A_4}}{2R} + \sinh\frac{\widehat{A_2A_3}}{2R}\cdot\sinh\frac{\widehat{A_4A_1}}{2R} \geq \sinh\frac{\widehat{A_1A_3}}{2R}\cdot\sinh\frac{\widehat{A_2A_4}}{2R} \qquad (4)$$

<u>Είναι σημαντικό να δούμε ότι αν σε κάθε Γεωμετρία εργαστούμε με τα δικά της εργαλεία το θεώρημα του Πτολεμαίου έχει κοινή απόδειξη</u>*(δηλαδή με την ίδια μέθοδο).*Παραθέτουμε παρακάτω την απόδειξη αυτή για την Ευκλείδειο Γεωμετρία.

Θεώρημα 5.1 Αν $A_1A_2A_3A_4$ **είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο** (O,R) **τότε:**

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 \qquad (1)$$

Απόδειξη: Έστω*(Σχ.12):*

$$\widehat{A_1OA_2} = \phi_1, \quad \widehat{A_2OA_3} = \phi_2, \quad \widehat{A_3OA_4} = \phi_3, \quad \widehat{A_4OA_1} = \phi_4$$

τότε είναι:

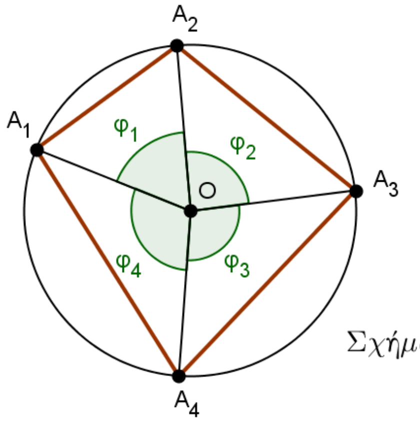
$$\alpha_1 = 2R\sin\frac{\phi_1}{2}, \quad \alpha_2 = 2R\sin\frac{\phi_2}{2}, \quad \alpha_3 = 2R\sin\frac{\phi_3}{2}, \quad \alpha_4 = 2R\sin\frac{\phi_4}{2}$$

καθώς και

$$A_1A_3 = 2R\sin\frac{\phi_1+\phi_2}{2}, \quad A_2A_4 = 2R\sin\frac{\phi_1+\phi_4}{2}$$

όπου:

$$a_1 = A_1A_2, \quad a_2 = A_2A_3, \quad a_3 = A_3A_4, \quad a_4 = A_4A_1$$



$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 12

Επομένως το πρώτο μέλος της (1) γίνεται:

$$A = a_1a_3 + a_2a_4 = 4R^2\left(\sin\frac{\phi_1}{2}\cdot\sin\frac{\phi_3}{2} + \sin\frac{\phi_2}{2}\cdot\sin\frac{\phi_4}{2}\right) \quad (2)$$

Όμοια το δεύτερο μέλος της (1) γίνεται:

$$B = A_1A_3\cdot A_2A_4 = 4R^2\sin\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\cdot\sin\frac{\phi_1+\phi_4}{2} \quad (3)$$

Όμως είναι:

$$2\left(\sin\frac{\phi_1}{2}\cdot\sin\frac{\phi_3}{2} + \sin\frac{\phi_2}{2}\cdot\sin\frac{\phi_4}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\phi_1-\phi_3}{2} - \cos\frac{\phi_1+\phi_3}{2}\right) + \left(\cos\frac{\phi_2-\phi_4}{2} - \cos\frac{\phi_2+\phi_4}{2}\right)$$

Επομένως το πρώτο μέλος γίνεται:

$$A = 2R^2\left(\cos\frac{\phi_3-\phi_1}{2} + \cos\frac{\phi_2-\phi_4}{2}\right) \quad (4)$$

Επίσης:

$$2\sin\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\cdot\sin\frac{\phi_1+\phi_4}{2}=$$

$$=\cos\frac{(\phi_1+\phi_2)-(\phi_1+\phi_4)}{2}-\cos\frac{(\phi_1+\phi_2)+(\phi_1+\phi_4)}{2}$$

$$=\cos\frac{\phi_2-\phi_4}{2}-\cos\frac{\phi_1+\left(360^o-\phi_3\right)}{2}=\cos\frac{\phi_2-\phi_4}{2}+\cos\frac{\phi_1-\phi_3}{2}$$

Άρα το δεύτερο μέλος γίνεται:

$$B=2R^2\left(\cos\frac{\phi_2-\phi_4}{2}+\cos\frac{\phi_1-\phi_3}{2}\right)\quad(5)$$

και συνεπώς από τις (4) και (5) προκύπτει η ισχύς της (1).

Ιδιαίτερα αξιόλογη είναι η παρακάτω απόδειξη του θεωρήματος – Ανισότητας του Πτολεμαίου.

Θεώρημα 5.2. Έστω A_1, A_2, A_3, A_4 τέσσερα σημεία του επιπέδου. Θα δείξουμε ότι:

$$A_1A_2\cdot A_3A_4+A_2A_3\cdot A_4A_1\geq A_2A_4\cdot A_1A_3\quad(1)$$

Απόδειξη:

Έστω a,b,c,d οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4. Τότε η αλγεβρική ισότητα:

$$(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=(a-c)(b-d)\quad(2)$$

είναι προφανής *(πράξεις)*.

Αν πάρουμε τα μέτρα είναι:

$$|a-b||c-d|+|a-d||b-c|\geq|(a-c)||(b-d)|\quad(3)$$

Η παραπάνω σχέση είναι το θεώρημα του Πτολεμαίου για το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$.

Για την απόδειξη της ισότητας στην (3) ενδιαφέρουσα είναι η ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 5.3. Όταν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων στο επίπεδο είναι πραγματικός αριθμός, τότε τα σημεία είναι ομοκυκλικά.

Απόδειξη:

Έστω τα σημεία a,b,c,m στο μιγαδικό επίπεδο. Θεωρούμε τον κύκλο abc και F ο μετασχηματισμός του Moebius ώστε:

$$F(a)=0,\quad F(b)=1,\quad F(c)=\infty$$

όπου $0,1,\infty$ επί ευθείας (h) καθέτου στον άξονα $x'x$.

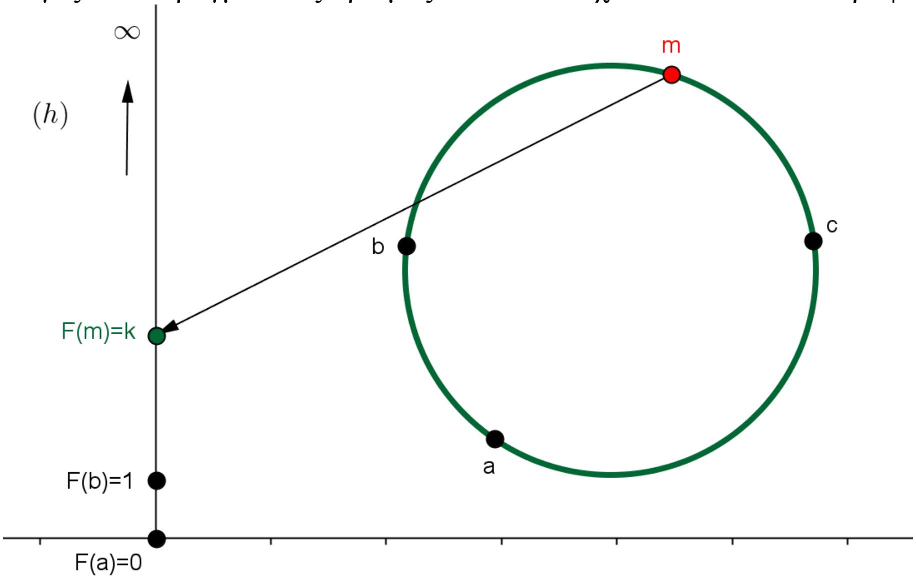
Τότε είναι φανερό ότι κάθε σημείο m του κύκλου abc θα αντιστοιχίζεται στην ευθεία (h) και θα είναι:

$$F(m)=k,\quad k\in R$$

δηλαδή πραγματικός αριθμός. Άρα:

$$(abcm)=\frac{(a-c)(b-m)}{(a-m)(b-c)}=\frac{(0-\infty)(1-k)}{(0-k)(1-\infty)}=-\frac{1-k}{k}$$

Αποδείχτηκε δηλαδή ότι όταν τα σημεία a,b,c,m είναι ομοκυκλικά τότε ο διπλός λόγος είναι πραγματικός αριθμός. Εύκολα δείχνεται και το αντίστροφο.



Σχήμα 13

Ακόμα βλέπουμε ότι η ισότητα στη σχέση (3) *(Θεώρημα 5.3)* ισχύει όταν ο διπλός λόγος $(A_1A_3A_2A_4)$ είναι πραγματικός αριθμός, πράγμα που ισοδυναμεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3, ότι τα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 είναι ομοκυκλικά.

Παρατηρήσεις

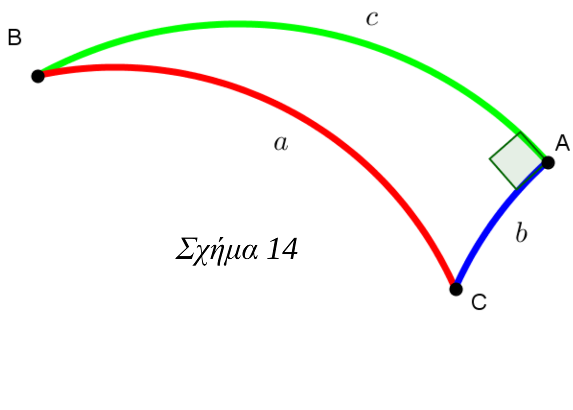
1η) Το θεώρημα του Πτολεμαίου είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Ο Karl Menger μελέτησε επισταμένα Γραμμικούς Νορμικούς Χώρους με την ιδιότητα να ισχύει η ανισότητα του Πτολεμαίου. Ο I. Schonberg απόδειξε ότι ένας seminormed χώρος εφοδιασμένος με την ανισότητα του Πτολεμαίου είναι inner-product space. Οι M. Klamkin και A. Meir απόδειξαν ότι αν ένας γραμμικός Νορμικός χώρος είναι Πτολεμαϊκός όταν είναι συμμετρικός. **[12], [14],[15]**

2η) Η μέθοδος με την οποία αποδείχθηκε το θεώρημα του Πτολεμαίου για τις τρεις Γεωμετρίες δεν αποδίδει για την ανισότητα.

3η) Χρησιμοποιώντας τους τύπους των ορθογωνίων τριγώνων στο μοντέλο του Poincaré που αναφέρονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.4. Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο $ABC(A=1\,\textit{ορθή})$ *(Σχήμα 14)* **ισχύει:**

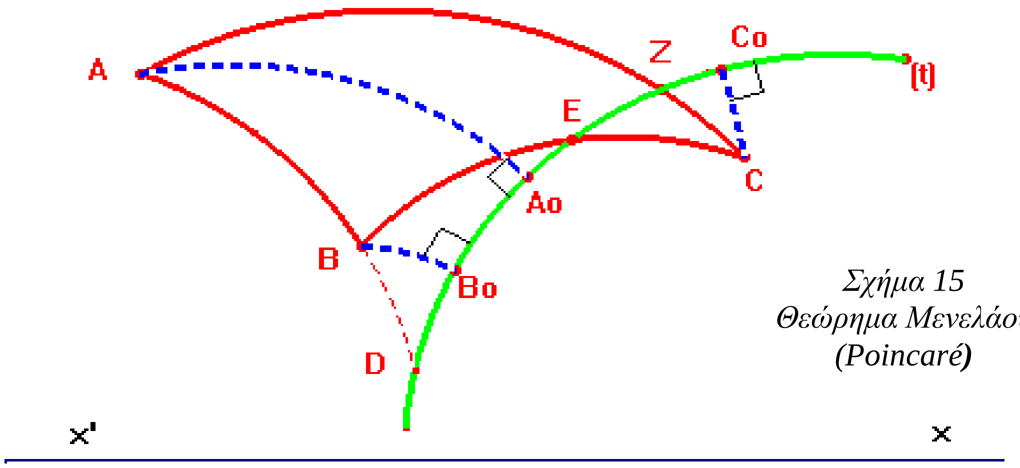
$$\sin c=\sin a\cdot\sin C$$



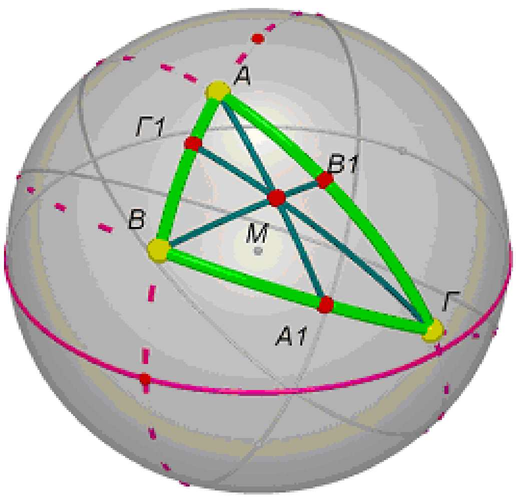
Σχήμα 14

μπορούμε εύκολα να δείξουμε το ***θεώρημα του Μενελάου*** *(Σχ.15)* και εφαρμόζοντας αυτό στη συνέχεια μπορεί κανείς να αποδείξει το ***θεώρημα του Ceva*** *(Σχ. 16)*

Τέλος από το θεώρημα του Πτολεμαίου μπορεί κανείς να βρει ***το σημείο Fermat*** ενός τριγώνου.



Σχήμα 15
Θεώρημα Μενελάου
(Poincaré)



Σχήμα 16
Θεώρημα Ceva
Σφαιρική Γεωμετρία

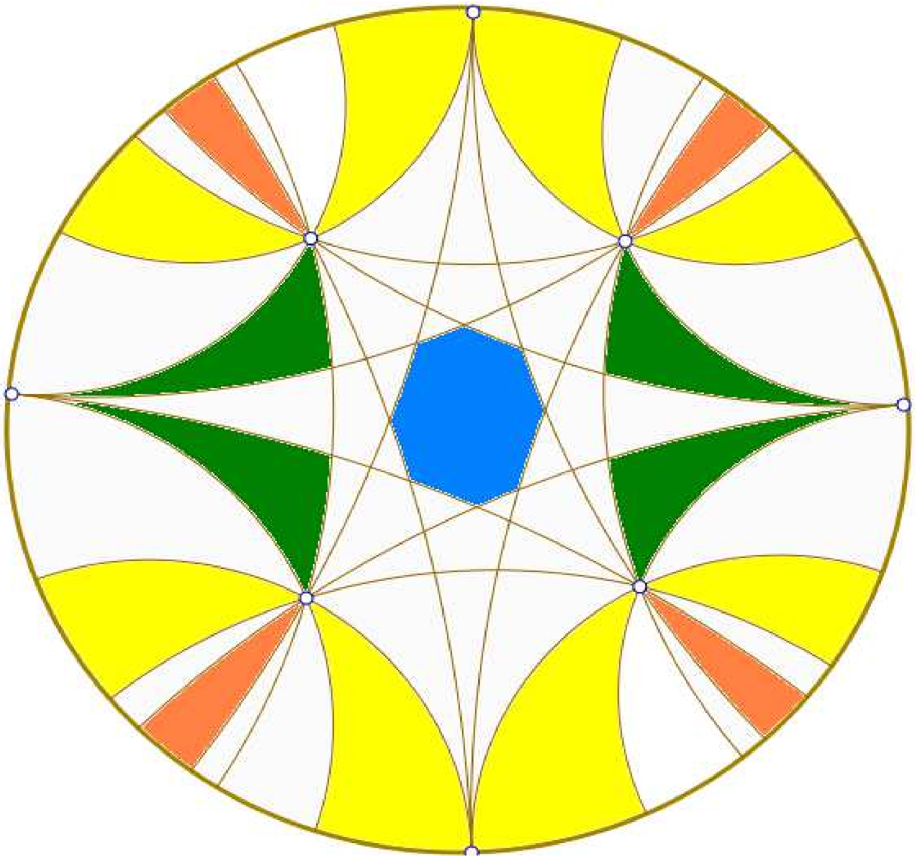
Μερικές ανισότητες σε σύγκριση από Ευκλείδειο, Ελλειπτική και Υπερβολική Γεωμετρία

$R \geq 2r$	$\tan R \geq 2\tan r$	$\tanh R \geq 2\tanh r$
$s^2 \geq 27r$	$\dfrac{\sin^2\left(\frac{s}{3}\right)}{\sin s} \geq \tan^2 r$	$\tan^2\mathrm{h}\dfrac{F}{4} \leq \left(\tanh\dfrac{s}{2}\right)\left(\tan^3\mathrm{h}\dfrac{s}{6}\right)$
$2s^2 \geq 27Rr$	$\dfrac{2\sin^2\left(\frac{s}{3}\right)}{\sin s} \geq \tan R\tan r$	$\Pi\tan^2 h\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{\sin^3 h\frac{s}{3}}{\sin^2 hs}$
$s^2 \geq 3F\sqrt{3}$	$\left(\tan\dfrac{s}{2}\right)\left(\tan^3\dfrac{s}{6}\right) \geq \tan^2\dfrac{F}{4}$	$\Sigma\coth r_i \geq \dfrac{3\coth r\sinh\frac{s}{3}}{\sinh s}$

όπου R, r οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου, S η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC και Σ, Π τα σύμβολα της άθροισης και του γινομένου.

Η υπερβολική Γεωμετρία στη διακόσμηση

Το μοντέλο Poincaré στον κύκλο χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία για διακοσμητικούς ρόλους. Ο δίσκος καλύφθηκε με h-τρίγωνα ή h-πολύγωνα(κι αυτό δεν είναι απλή δουλειά) και διάφοροι καλλιτέχνες διακόσμησαν με διάφορες παραστάσεις αυτά τα σχήματα.



Ένα πρόχειρο σχεδίασμα με τη βοήθεια του λογισμικού Carmetal

Με εξαιρετική επιτυχία ο M.C.Escher αξιοποίησε τις δυνατότητες του μοντέλου αυτού κατασκευάζοντας υπέροχα σχήματα. Επίσης στο διαδίκτυο αν αναζητήσουμε εικόνες στο ***pictures from hyberbolic Geometry*** θα δούμε ότι υπάρχει πληθώρα τέτοιων σχημάτων.

Σήμερα, στην εποχή της σύγχρονης τεχνολογίας και της ψηφιακής απεικόνισης είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν διάφορα λογισμικά προς την κατεύθυνση δημιουργίας δυναμικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο μπορεί κανείς να κατασκευάσει με επιτυχία τα δομικά στοιχεία της Γεωμετρίας αυτής. Παραθέτουμε για παράδειγμα μια εικόνα φτιαγμένη με αντίστοιχο λογισμικό.

Βιβλιογραφία

[1] *D.M.Y. Sommerville, The elements of non-Euclidean Geometry, Dover 1958.*

[2] *H.S.M. Coxeter, Non- Euclidean Geometry, Mathematical Association of America, 6n ed.*

[3] *C. Caratheodory, Theory of Functions, vol I Chelsea Pub. Combany.*
[4] *Arlan Ramsey, Robert D. Richtmyer, Introduction to Hyberbolic Geometry, Springer-Verlag.*
[5] *Henry Parker Manning, Introductory non- Euclidean Geometry, Dover*
[6] *H. Meschkowski, Noneuclidean Geometry, Academic Press.*
[7] *A.S. Smogovzhersky, Lobachevskian Geometry, Mir.*
[8] *N.V. Etimov, Higher Geometry, Mir.*
[9] *Elmer G. Rees, Notes on Geometry, Springed-Verlag.*
[10] *Marvin Jay Greenberg, Euclidean and non-Euclidean Geometries, W.H. Freeman and Company*
[11] *M. S. Klamkin – G. Tsintsifas, Triangles Inegalities in Euclidean, Elliptic and Hyberbolic Geometries, Scientia, vol 2(1988), pp 83-86.*
[12] *M.S. Klamkin and A. Meir, Ptolemy's inequality, Cordal metric, multiplicative metric, Pacific journal of mathematics, vol 101, No 2, 1982.*
[13] *Γ. Τσίντσιφας, Γεωμετρία 1, Γεωμετρία 3 (Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί).*
[14] *T. M. Apostol, Ptolemy's inequality and Chordal Metric, Math. Magazine, vol.40, 1967 No 5, pp 233-235.*
[15] *. I. J. Schoemberg, A remark on M. M. Day's characterisation of inner-product spaces and a conjective of L. M. Blumenthal, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), pp 961-964.*
[16] *D. A. Murvey, Spherical Trigonometry, Logmans.*
[17] *N. A. Court, College Geometry, Barnes and Noble*
[18] *R. A. Jonson, Advanced Eucldean Geometry, Dover.*

Λογισμικά

1^o) *Geogebra*
2o) *Cabri- geometry II*
3o) *Cabri 3D*
4o) *Carmetal*