ΜΕΡΟΣ Α'

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

"Αν θελήσουμε νά άξιολογήσουμε τίς μεγάλες στιγμές της Γεωμετρίας, θά σταθούμε άρχικά στόν Εύκλείδη, πού συγκέντρωσε τίς διάσπαρτες καί ά-σύνδετες γνώσεις, τίς ταξινόμησε καί τίς έδωσε σ' ένα όργανικά δεμένο σύνολο βάζοντας τίς βά-σεις ένός λογικού συστήματος. Μετά τόν Εύκλείδη ό D. Hilbert όλοκλήρωσε τήν άξιωματική της Γε-ωμετρίας άπαλλάσσοντάς την άπό ύποκειμενικά καί διαισθητικά στοιχεία." Έτσι έδωσε στήν έπιστήμη ένα λογικά ίσχυρό καί άρτια θεμελιωμένο σύστημα.

Τό 1872 ό περίφημος Γερμανός γεωμέτρης Felix Klein στό έναρκτήριο μάθημά του στό Erlanger δι-ατύπωσε τήν παρακάτω βασική άρχή γνωστή σάν πρό-γραμμα τού Erlanger:

" "Αν δίνεται μιά όποιαδήποτε όμάδα μετασχηματι-σμών στό χώρο, πού περιλαμβάνει τήν όμάδα τών στερεών κινήσεων σάν ύποομάδα, τότε ή άνεύρεση τών άναλλοίωτων της προηγούμενης όμάδας μάς δίνει ένα όρισμένο είδος γεωμετρίας καί κάθε άλλη γεωμετρία μπορεί νά παραχθή μέ τόν ίδιο τρόπο."

Ούσιαστικά μετά τό πρόγραμμα τού Erlanger ή Γεωμετρία άπελευθερωμένη άπό τήν συνθετική καί ρητορική της μορφή πήρε τή θέση πού έχει σή-μερα. Είναι τό κλειδί στήν έρμηνεία τών περισσό-τερων συγχρόνων κατευθύνσεων τών Μαθηματικών.

Ποιά όμως είναι ή προσφορά τών Γεωμετρικών μετασχηματισμών στήν στοιχειώδη Γεωμετρία; Πέρα ἀπ' τὸ ὅτι πρόκειται γιὰ μιὰ νέα θεώρηση τῆς Γεωμετρίας καὶ μιὰ ἐπέκτασή της ἡ προσφορὰ γιὰ τὴν εὐκολώτερη λύση πολλῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἀξιόλογη.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ λύση ἑνὸς προβλήματος μὲ τὶς κλασσικὲς μεθόδους συναντᾶ δυσκολίες π.χ. τὸ θεώρημα τοῦ Feuerbach ἤ τὰ προβλήματα τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἡ χρησιμοποίηση ἑνὸς καταλλήλου μετασχηματισμοῦ φέρνει τὸ σχῆμα σὲ μιὰ μορφή, ὅπου οἱ παλιὲς μέθοδοι τῆς γεωμετρίας εὐκολότερα ἀποδεικνύουν ὁρισμένες ἰδιότητες. Ἐπειδὴ οἱ προηγούμενες ἰδιότητες διατηροῦνται στὰ δύο σχήματα, ἡ ἀπόδειξη στὸ νέο σχῆμα λύνει τὸ πρόβλημα. Φυσικὰ δὲν πρέπει νὰ παραβλέψουμε ἀκόμα καὶ τὸ ὅτι οἱ Γεωμετρικοὶ μετασχηματισμοὶ καθιερώνουν καινούριες γενικὲς μεθόδους γιὰ τὴν ἀπόδειξη προβλημάτων, ὅπως τὰ προβλήματα 6,7 στὸ κεφάλαιο 4.

Ὅλα αὐτὰ μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι μπαίνουμε ἀρκετὰ βαθειὰ στὴν θεωρία τῶν μετασχηματισμῶν. Ἄλλωστε γι' αὐτὸ τὸ λόγο αὐτὸ τὸ βιβλίο γράφτηκε μὲ πολλὴ φροντίδα γιὰ τὴ θεωρία του.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΓΕΩΜ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑ-ΤΙΣΜΩΝ. ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

0.1. Ἄς θεωρήσουμε δύο σύνολα A καί B στοιχείων μέ ὁποιαδήποτε φύση διαφορετικά μεταξύ τους ἤ ὄχι. Ἄν ὑπάρχη ἕνας νόμος T τέτοιος πού ὅταν ὁρίζουμε ἕνα στοιχεῖο M τοῦ A νά ὁρίζεται ἕνα ἤ καί περισσότερα στοιχεῖα τοῦ B, θά λέμε ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀπεικόνιση ἤ ἀντιστοιχία T μεταξύ τῶν A καί B. Ἄν ὁρίζεται ἕνα καί μόνο στοιχεῖο M′ τοῦ B, λέμε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση T τοῦ A ἐπί τοῦ B εἶναι μονοσήμαντη. Στήν τελευταία περίπτωση γράφουμε:

$$M \xrightarrow{T} M' \quad ἤ \quad M' = T(M) \quad ἤ \quad M' = T[M] \quad ἤ \quad M' = TM$$

καί διαβάζουμε: στό M ἀντιστοιχεῖ τό M′.

Τό σύνολο A καλεῖται **σύνολον ἀντικειμένων**. Τό B **σύνολον εἰκόνων**. Τό στοιχεῖο M **ἀρχέτυπο**, τό M′ **εἰκόνα** τοῦ M ἤ **ὁμόλογο** ἤ **ἀντίστοιχο** τοῦ M.

Ἄν τά σύνολα A καί B περιέχουν ἄπειρα γεωμετρικά στοιχεῖα, κάθε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση μεταξύ τους ὀνομάζεται **γεωμετρικός μετασχηματισμός** ἤ ἁπλᾶ **μετασχηματισμός**. Ἄν συμβῆ τά στοιχεῖα τῶν συνόλων A καί B νά εἶναι σημεῖα (μιᾶς γραμμῆς ἤ ἐπιφάνειας) **σημειακός μετασχηματισμός**.

Ἄν κάθε στοιχεῖο M′ τοῦ B εἶναι εἰκόνα ἑνός καί μόνον στοιχείου M τοῦ A, τότε ἡ ἀπεικόνιση λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντη** καί ὁ μετασχηματισμός **κανονικός**.

0.2. Παράδειγμα ἑνός μετασχηματισμοῦ.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δίνεται σ' ἕνα ἐπίπεδο ἕνα σχῆμα A κι ἕνα διάνυσμα $\vec{v}$. Σέ τυχαῖο σημεῖο M τοῦ A ἀντιστοιχοῦμε τό σημεῖο M′ ὅπου:

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{v}.$$

Ἔτσι ἀπ' τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ σχήματος A παίρνουμε τό σχῆμα B. Ἄν T ὁ μετασχηματισμός τοῦ A ἐπί τοῦ B, θά ἔχουμε:

$$M'=TM.$$

Ἀκόμα γράφουμε:

$$B=T(A) \quad \text{ἤ} \quad B=T[A] \quad \text{ἤ} \quad B=TA$$

καί διαβάζουμε B **ὁμόλογο** ἤ **ἀντίστοιχο** τοῦ A.

0.3. Ἴσοι μετασχηματισμοί.

Δύο μετασχηματισμοί T, F καλοῦνται ἴσοι $T=F$ πάνω σ' ἕνα σύνολο A ἄν γιά κάθε στοιχεῖο $M\in A$ ἔχουμε $T(M)=F(M)$.

Ἄρα λοιπόν:

$$(\forall M\in A)\wedge(T(M)=F(M))\Leftrightarrow T=F.$$

0.4. Ἀντίστροφος μετασχηματισμός.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό σχῆμα A μέ τόν κανονικό μετασχηματισμό T μετασχηματίζεται στό σχῆμα B. Ἄν M ἕνα σημεῖο τοῦ A καί M′ τό ἀντίστοιχό του, θά ἔχουμε

$$M'=TM.$$

Σέ κάθε στοιχεῖο ὅμως $M'\in B$ ἀντιστοιχεῖ τό μοναδικό στοιχεῖο $M\in A$. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι γεωμετρικός μετασχηματισμός καί λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ T. Τόν συμβολίζουμε T^{-1}. Γράφουμε λοιπόν

$$M'=TM\Leftrightarrow M=T^{-1}M' \qquad \text{ἤ}$$

$$M'=T(M)\Leftrightarrow M=T^{-1}(M') \quad \text{ἤ} \quad M'=T[M]\Leftrightarrow M=T^{-1}[M'] \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Ἀκόμα

$$B=TA \Leftrightarrow A=T^{-1}B$$ ἤ

$B=T(A) \Leftrightarrow A=T^{-1}(B)$ ἤ $B=T[A] \Leftrightarrow A=T^{-1}[B]$ κ.τ.λ.

0.5. Ταυτοτικός ἤ μοναδιαῖος μετασχηματισμός.

Λέγεται κάθε μετασχηματισμός T πού μετασχηματίζει κάθε σημεῖο $M \in A$ στόν ἑαυτό του, δηλαδή

$$(\forall M \in A) \wedge (M=TM).$$

Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός παριστάνεται συνήθως μέ τό σύμβολο I.

0.6. Διπλᾶ σημεῖα μετασχηματισμοῦ T.

Ἀπ' τά σημεῖα M τοῦ σχήματος A ὀνομάζονται ἐκεῖνα πού μένουν ἀμετάβλητα μέ τόν μετασχηματισμό T.

Ἀποτελοῦν δηλαδή τίς λύσεις τῆς ἐξίσωσης

$$M=TM.$$

Τό σύνολο τῶν διπλῶν σημείων μετασχηματισμοῦ μπορεῖ νά εἶναι κενό, νά ἔχη πεπερασμένου πλήθους σημεῖα ἤ καί ἄπειρα. Ἄν γιά τόν μετασχηματισμό T κάθε σημεῖο τοῦ σχήματος A εἶναι διπλό σημεῖο τότε στό A $T=I$.

0.7. Γινόμενα μετασχηματισμῶν.

Γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι στό σχῆμα A ἐφαρμόζουμε τόν μετασχηματισμό T. Ἄν $M \in A$ καί m τό ὁμόλογό του θά ἔχουμε:

$$m=TM \text{ καί } B=TA,$$

ἄν B τό ὁμόλογο τοῦ A.

Ἄν τώρα στό σημεῖο m τοῦ B ἐφαρμόσουμε τόν μετασχηματισμό F, θά ἔχουμε

$$M'=Fm,$$

ὅπου M' τό ὁμόλογο τοῦ m στόν μετασχηματισμό F. Ἄν Γ τό ὁμόλογο τοῦ B στόν ἴδιο μετασχηματισμό:

$$\Gamma = FB.$$

Ἀκόμα:

$$M' = F[TM] \quad \text{ἤ} \quad \Gamma = F[TB].$$

Ἐπίσης γιά μεγαλύτερη ἁπλότητα συμφωνοῦμε νά γράφουμε:

$$M' = FTM \quad \text{ἤ} \quad \Gamma = FTB \quad \text{ἤ} \quad M' = FT[M] \quad \text{ἤ} \quad M' = FT(M) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Ἄν τώρα ὀνομάσουμε Θ τόν μετασχηματισμό πού ἀπ' τό σημεῖο M πηγαίνουμε στό σημεῖο M', θά ἔχουμε:

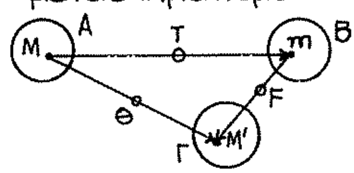
$$M' = \Theta M, \quad \text{ἄρα}$$

$$\Theta M = FTM.$$

Ὁ μετασχηματισμός Θ λέγεται **γινόμενο** τῶν T, F καί παριστάνεται

$$\Theta = FT.$$

Μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό παρακάτω σχῆμα γιά τήν πιό ἐποπτική παράσταση τοῦ γινόμενου τῶν δύο μετασχηματισμῶν:



Ἐάν I ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός, θά ἔχουμε

$$T \cdot I = I \cdot T = T.$$

Ἄν ὁ μετασχηματισμός T εἶναι κανονικός καί T^{-1} ὁ ἀντίστροφός του, θά εἶναι:

$$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I.$$

0.8. Γινόμενο τριῶν μετασχηματισμῶν.

Ἄς εἶναι T_1 μετασχηματισμός τοῦ σχήματος A_1

ἐπὶ τοῦ A_2, T_2 μετασχηματισμὸς τοῦ σχήματος A_2 ἐπὶ τοῦ A_3 καὶ T_3 μετασχηματισμὸς τοῦ A_3 ἐπὶ τοῦ A_4. Ἂν $M_1 \in A_1$ θὰ εἶναι:

$$M_2 = T_1 M_1,\ M_3 = T_2 M_2,\ M_4 = T_3 M_3.$$

Ὁ μετασχηματισμὸς T ποὺ στὸ σημεῖο M_1 ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖο M_4 λέγεται γινόμενο τῶν τριῶν μετασχηματισμῶν T_1, T_2, T_3.

Εἶναι λοιπόν:

$$M_4 = T M_1.$$

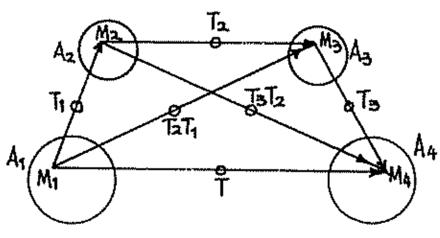
Συμβολίζεται:

$$T = T_3 T_2 T_1.$$

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι γιὰ τὸ γινόμενο τριῶν μετασχηματισμῶν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα, δηλαδή:

$$T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1.$$

Παρακάτω φαίνεται σχηματικὰ τὸ γινόμενο τριῶν μετασχηματισμῶν



Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται τὸ γινόμενο περισσοτέρων μετασχηματισμῶν. Ὁ προσεταιριστικὸς νόμος εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ.

Ἂν

$$A_1 \xrightarrow{T_1} A_2 \xrightarrow{T_2} A_3 \longrightarrow \dots A_\nu \xrightarrow{T_\nu} A_{\nu+1}$$

γράφουμε:

$$T = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_3 T_2 T_1.$$

Ὁ μετασχηματισμὸς T λέγεται γινόμενο τῶν $T_1, T_2, \dots T_\nu$.

Ἄν $T_1=T_2=\dots=T_\nu=\Theta$, τότε $T=\Theta^\nu$ (ν φυσικός).
Ἄρα καί $\Theta^\nu\cdot\Theta^\mu=\Theta^{\nu+\mu}$.

0.9. Διάφορες σχέσεις στούς μετασχηματισμούς.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι T, F ἰσοδύναμοι μετασχηματισμοί στό A, δηλαδή $T=F$, καί Θ ἕνας τυχαῖος μετασχηματισμός. Οἱ μετασχηματισμοί ΘT, ΘF εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμοι, ἄρα $\Theta T=\Theta F$. Εὔκολα ἀκόμα βλέπουμε ὅτι $T\Theta=F\Theta$.

Ἄρα σέ μιά ἰσότητα μετασχηματισμῶν ἐπιτρέπεται ὁ πολλαπλασιασμός ἀπό ἀριστερά ἤ δεξιά καί τῶν δύο μελῶν ἐπί ἕναν μετασχηματισμόν.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τόν κανονικό μετασχηματισμό h καί h^{-1} ὁ ἀντίστροφός του καί ἄς εἶναι

$$hT=hF.$$

Πολλαπλασιάζουμε ἀπό ἀριστερά καί τά δύο μέλη ἐπί h^{-1} καί ἔχουμε

$$h^{-1}(hT)=h^{-1}(hF) \quad \text{ἤ}$$
$$(h^{-1}h)T=(h^{-1}h)F \quad \text{ἤ}$$
$$T=F$$

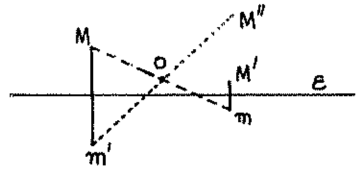
Ἄρα ἄν h κανονικός μετασχηματισμός ἐπιτρέπεται ἡ ἁπλοποίηση.

Ἄν δίνεται ἡ σχέση $F=hT$ καί h κανονικός μετασχηματισμός μποροῦμε νά λύσουμε πρός T. Φτάνει νά πολλαπλασιάσουμε ἀριστερά μέ h^{-1}, ὁπότε $h^{-1}\cdot F=(h^{-1}h)T=T$.

Στό γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν γενικά δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα, δηλαδή:

$$T\cdot F\neq F\cdot T.$$

Ἀρκεῖ νά δοθῆ ἕνα παράδειγμα: Ἄς πάρουμε σάν T τήν συμμετρία πρός εὐθεία (ε). Θά ἔχουμε



$m=TM$, $M'=FTM$
$m'=FM$, $M''=TFM$.
Ἀλλά $M'\neq M''$.

Ἂν συμβῆ νά ἔχουμε $TF=FT$, τότε οἱ μετασχηματισμοί T,F λέγονται **ἀντιμεταθετοί**.

Ἕνας κανονικός μετασχηματισμός T θά λέγεται **ἐνελεικτικός** ἤ **ἀμοιβαῖος** ἄν εἶναι ἴσος μέ τόν ἀντίστροφό του, δηλαδή :

$$T=T^{-1}.$$

Τότε θά ἔχουμε :

$$T\cdot T=T^2=T\cdot T^{-1}=I.$$

Παίρνουμε δύο κανονικούς μετασχηματισμούς T καί F στά σχήματα A,B καί B,Γ ἀντίστοιχα.

Ἂν $M\in A$ θά ἔχουμε

$$m=TM \Longleftrightarrow M=T^{-1}m$$
$$M'=FM \Longleftrightarrow m=F^{-1}M' \quad \text{ἤ}$$
$$M'=FTm \Longleftrightarrow M=T^{-1}F^{-1}M'.$$

Ἄρα ὁ μετασχηματισμός FT εἶναι κανονικός καί

$$(FT)^{-1}=T^{-1}F^{-1}.$$

Ἀκόμα ἄν $T_1,T_2,\dots T_\nu$ κανονικοί μετασχηματισμοί καί ὁ $T=T_\nu T_{\nu-1}\cdots T_2T_1$ εἶναι ἐπίσης κανονικός καί

$$(T_\nu T_{\nu-1}T_{\nu-2}\cdots T_1)^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}\cdots T_\nu^{-1}.$$

0.10. Ἡ ἔννοια τῆς ὁμάδας.

Εἶναι γνωστό ἀπ' τήν Ἄλγεβρα, ὅτι : Τό ζεῦγος $(G,\circ)$ ὅπου G ἕνα σύνολο καί "$\circ$" ἕνας νόμος ἐσωτερικῆς σύνθεσης, λέγεται ὁμάδα, ὅταν:

1. Ἰσχύει ὁ προσεταιριστικός νόμος*
2. Ὑπάρχει μοναδιαῖο (ἤ ουδέτερο) στοιχεῖο $e\in G$
3. Γιά κάθε στοιχεῖο $x\in G$ ὑπάρχει ἀντίστροφο $y\in G$ $(x\circ y=y\circ x=e)$. Το στοιχεῖο y σημειώνεται x^{-1} καί λέγε-

* Σύμφωνα με τόν ορισμό τῶν Γ. μετασχηματισμῶν ἰσχύει πάντοτε ο προσεταιριστικός Νόμος, κατά συνέπεια ἀπ ἐδῶ καί ὕστερα θά παραλείπεται η ἀπόδειξη του.

ται **ἀντίστροφο** τοῦ x.

Μιά ὁμάδα G λέγεται **Ἀβελιανή*** ἤ **ἀντιμεταθετική** ἄν γιά κάθε ζευγάρι $(x,y)\in G$ εἶναι

$$x\circ y = y\circ x.$$

Παραδείγματα:

1. Τό ζευγάρι $(Z,+)$ ἀποτελεῖ ὁμάδα (Z τό σύνολο τῶν ἀκεραίων, $+$ πρόσθεση).

2. Τό ζευγάρι $(N,+)$ δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα (N τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν), γιατί δέν ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο.

3. Τό ζευγάρι $(N,\cdot)$ δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα, γιατί τά στοιχεῖα του δέν ἔχουν ἀντίστροφο ("·" πολ/σμός).

4. Τό ζευγάρι $(R,\cdot)$ δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα, γιατί τό 0 δέν ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο.

Τά δύο παρακάτω θεωρήματα εἶναι βασικά γιά τήν θεωρία τῶν ὁμάδων:

Θ.1. Ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα οὐδέτερο στοιχεῖο.

Θ.2. Γιά κάθε στοιχεῖο ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα ἀντίστροφό του.

0.11. Ἀσκήσεις.

1. Δεῖξτε ὅτι ἄν T, F εἶναι ἀμοιβαῖοι μετασχηματισμοί θά ἔχουμε:

$$(F\cdot T)^{-1} = T\cdot F$$

Ἀπόδειξη:

Ἀφοῦ T, F εἶναι ἀμοιβαῖοι θά εἶναι ἀναγκαστικά καί κανονικοί μετασχηματισμοί καί σύμφωνα μέ τό 0.9 θά ἔχουμε:

$$(F\cdot T)^{-1} = T^{-1}\cdot F^{-1}$$

---

* N.H. Abel (1802-1829) μεγάλος Νορβηγός μαθηματικός

Ἀλλά $T^{-1}=T$, $F^{-1}=F$, ἄρα:

$$T^{-1}\cdot F^{-1}=T\cdot F.$$

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό γινόμενο δύο κανονικῶν μετασχηματισμῶν εἶναι πάλι κανονικός μετασχηματισμός. Γενίκευση.

Ἀπόδειξη:

Ἄν T_1, T_2 κανονικοί μετασχηματισμοί θ' ἀποδείξουμε ὅτι καί ὁ $\Theta = T_2 \cdot T_1$ εἶναι κανονικός μετασχηματισμός.

Ἄς ὑποθέσουμε τό ἀντίθετο. Θά ἔχουμε $m = T_1 M$, $M' = T_2 T_1 M = \Theta M$. Ἀλλά ἄν Θ δέν εἶναι κανονικός μετασχηματισμός θά ὑπάρχη στοιχεῖο M_1 ὥστε

$$M' = \Theta M_1 \quad \text{ἤ}$$
$$M' = T_2 T_1 M_1.$$

Ἀλλά τότε:

$$m_1 = T_1 M_1 \quad \text{καί} \quad M' \neq M_1' = T_2 T_1 M_1$$

πού εἶναι ἄτοπο.

Εὔκολα μέ μαθηματική ἐπαγωγή γενικεύεται ἡ πρόταση γιά τούς $T_1, T_2, \dots T_\nu$ κανονικούς μετασχηματισμούς.

3. Ἄν $T_1, T_2, \dots T_\nu$ κανονικοί μετασχηματισμοί ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$(T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} \cdot T_2^{-1} \cdots T_\nu^{-1} \qquad (1)$$

μέ διαφορετική μέθοδο ἀπό τήν 0.9.

Ἀπόδειξη:

Θά ἀποδείξουμε τήν πρόταση γιά τούς μετασχηματισμούς T_1, T_2:

$$(T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} \cdot T_2^{-1}.$$

Πραγματικά:

$$T_2 (T_1 T_1^{-1}) T_2^{-1} = I \quad \text{ἤ} \qquad (2)$$

$$(T_2 T_1)(T_1^{-1} \cdot T_2^{-1}) = I \qquad (3)$$

Ἀλλά $T_2 T_1$ κανονικός μετασχηματισμός. Πολλαπλασιάζουμε ἀριστερά τήν (3) ἐπί $(T_2T_1)^{-1}$:

$$(T_2T_1)^{-1}(T_2T_1)(T_1^{-1}T_2^{-1}) = (T_2T_1)^{-1} \quad \text{ἤ}$$

$$T_1^{-1}T_2^{-1} = (T_2T_1)^{-1}$$

4. Νά ἐξετασθῆ ἄν τό γινόμενο δύο ἐνελεικτικῶν (ἀμοιβαίων) μετασχηματισμῶν εἶναι ἐπίσης ἐνελεικτικός μετασχηματισμός.

Λύση :

Ἄς εἶναι $T=T^{-1}$ καί $F=F^{-1}$, $\Theta=TF$.

Ἀλλά $\Theta^{-1}=(TF)^{-1}=F^{-1}T^{-1}=FT$.

Γιά νά ἔχουμε $\Theta=\Theta^{-1}$, θά ἔπρεπε $TF=FT$. Ἀλλά αὐτό γενικά δέν συμβαίνει ἐκτός ἄν οἱ μετασχηματισμοί F, T εἶναι ἀντιμεταθετοί.

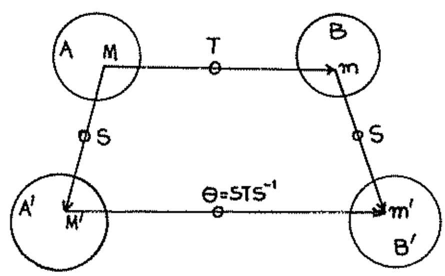
5. Τό σχῆμα A μέ τόν μετασχηματισμό T μετασχηματίζεται στό B. Ἄν S κανονικός μετασχηματισμός καί $A'=SA$, $B'=SB$ νά βρεθῆ ὁ μετασχηματισμός Θ πού

$$B'=\Theta A'.$$

Λύση:

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι :

$$m'=Sm, \qquad m \doteq TM \quad \text{ὁπότε} \quad m'=STm.$$



Ἀλλά $M=S^{-1}M'$ ἤ $m'=ST[S^{-1}M']=STS^{-1}M'$. Ἄρα $\Theta=STS^{-1}$.
Ὁ μετασχηματισμός Θ καλεῖται **transmuée** τοῦ T διά τοῦ S.

6. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό γινόμενο τῶν transmuées δύο μετασχηματισμῶν T_1, T_2 διά τοῦ κανονικοῦ μετασχηματισμοῦ S εἶναι ἴσο μὲ τὴν transmuée τοῦ T_1T_2 διὰ τοῦ S.

Ἀπόδειξη:

Ἔχουμε $(ST_1S^{-1})(ST_2S^{-1}) = ST_1(S^{-1}S)T_2S^{-1} = S(T_1T_2)S^{-1}$

0.12. Ἰσομετρία (ἢ ὀρθογώνιος μετασχηματισμός)

Λέγεται κάθε κανονικὸς μετασχηματισμὸς ποὺ διατηρεῖ τὸ μέτρο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Εὔκολα ἀποδεικνύονται τὰ παρακάτω θεωρήματα:

(1) Ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς εἶναι ἰσομετρία.

(2) Τὸ γινόμενο δύο ἢ περισσοτέρων ἰσομετριῶν εἶναι ἰσομετρία.

(3) Τὸ ἀντίστροφο μιᾶς ἰσομετρίας εἶναι ἰσομετρία.

(4) Τὸ ζευγάρι $(G, \cdot)$, ὅπου G τὸ σύνολο τῶν ἰσομετριῶν καὶ "•" τὸ γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν, ἀποτελεῖ ὁμάδα.

(5) Μιὰ ἰσομετρία εἶναι ὁρισμένη στὸν χῶρο, ἂν γνωρίζουμε τέσσερα ζευγάρια ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα. Στὸ ἐπίπεδο ἂν γνωρίζουμε τρία ζευγάρια ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα. Ἡ ἰσομετρία ποὺ μετασχηματίζει τὸ ἐπίπεδο Π στὸ ἐπίπεδο Π′ εἶναι ὁρισμένη ἂν γνωρίζουμε τρία ζευγάρια ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα.

(6) Κάθε ἰσομετρία μετασχηματίζει ἐπίπεδο Π σὲ ἐπίπεδο Π′.

Ἂς εἶναι Π ἕνα ἐπίπεδο καὶ Θ μία ἰσομετρία. Ἂν $\widehat{ΑΒΓ} \in Π$ θὰ εἶναι:

$$\widehat{Α'Β'Γ'} = Θ[\widehat{ΑΒΓ}].$$

Ἂν $Μ \in Π$ θὰ ἔχουμε $\widehat{Α'Μ'Β'} = \widehat{ΑΜΒ}$ καὶ $\widehat{Α'Μ'Γ'} = \widehat{ΑΜΓ}$. Εὔκολα βλέπουμε λοιπὸν ὅτι $Μ' \in Π'$.

(7) Κάθε ἰσομετρία μετασχηματίζει εὐθεῖα σὲ εὐθεῖα.

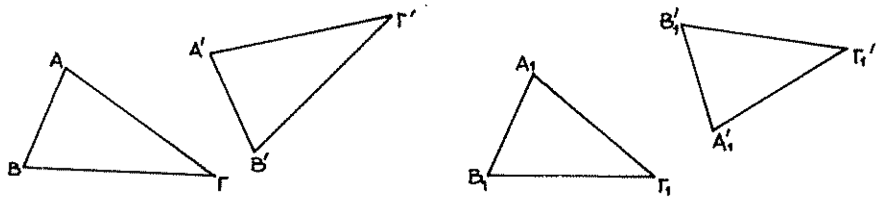
(8) Κάθε ἰσομετρία μετασχηματίζει ἕνα ζευγάρι ἀπὸ παράλληλες εὐθεῖες σὲ ζευγάρι ἀπὸ παράλληλες εὐθεῖες, ἕνα ζευγάρι ἀπὸ παράλληλα ἐπίπεδα σὲ ζευγάρι ἀπὸ παράλληλα ἐπίπεδα.

Αὐτὸ εἶναι φανερὸ γιατί ἀφοῦ ἕνα τρίγωνο μετασχηματίζεται σὲ ἴσο τρίγωνο, ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο θὰ μετασχηματίζεται σὲ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(9) Κάθε ἰσομετρία διατηρεῖ τήν διάταξη τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας.

(10) Κάθε ἰσομετρία διατηρεῖ τήν γωνία δύο εὐθειῶν ἤ δύο ἐπιπέδων.

(11) Μιά ἰσομετρία $\Theta \in G$ (τό σύνολο τῶν ἰσομετριῶν) μπορεῖ νά διατηρῆ τόν προσανατολισμό* τριγώνου ΑΒΓ ἤ καί ὄχι :



$\widehat{A'B'\Gamma'} = \Theta[\widehat{AB\Gamma}]$ $\qquad$ $\widehat{A_1'B_1'\Gamma_1'} = \Theta_1[\widehat{A_1B_1\Gamma_1}]$

Ἄρα λοιπόν τό σύνολο τῶν ἰσομετριῶν G διαιρεῖται σέ δύο ὑποσύνολα G_μ, G_α

$$G = G_\mu \cup G_\alpha$$

ὅπου G_μ τό σύνολο τῶν ἰσομετριῶν πού διατηροῦν τόν προσανατολισμό, G_α τό σύνολο τῶν ἰσομετριῶν πού ἀλλάζουν τόν προσανατολισμό.

Κάθε μετασχηματισμός ἀπ' τό G_μ θά ὀνομάζεται **μετατόπιση** (ἤ θετική ἰσομετρία ἤ ὁμόρροπη ἰσότητα). Κάθε μετασχηματισμός ἀπ' τό G_α **ἀντιμετατόπιση** (ἤ ἀρνητική ἰσομετρία ἤ ἀντίρροπη ἰσότητα).

Δυό σχήματα Α καί Α' θά λέγωνται **ὁμόρροπα ἴσα** ἄν τό ἕνα προκύπτει ἀπ' τό ἄλλο ἀπό μιά μετατόπιση καί **ἀντίρροπα ἴσα** ἄν τό ἕνα προκύπτει ἀπ' τό ἄλλο ἀπό μιά ἀντιμετατόπιση.

Παρακάτω ἐξετάζονται σύντομα οἱ ἰδιότητες τῶν μετατοπίσεων καί ἀντιμετατοπίσεων.

Μετατόπιση εἶναι κάθε ἰσομετρία πού διατηρεῖ τόν προσανατολισμό.

(1) Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός εἶναι μετατόπιση.

---

* Δές Γεωμετρία τεῦχος 1, σελίδα 231.

(2) Τό γινόμενο δύο ἤ περισσότερων μετατοπίσεων εἶναι μετατόπιση.

(3) Τό ἀντίστροφο μετατόπισης εἶναι μετατόπιση.

(4) Τό ζευγάρι $(G_\mu, \cdot)$, ὅπου G_μ τό σύνολο τῶν μετατοπίσεων καί "•" τό γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν, εἶναι ὁμάδα.

(5) Μιά μετατόπιση σ' ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ὁρισμένη ἄν ξέρουμε δυό ζευγάρια ἀπό ὁμόλογα σημεῖα.

'Αντιμετατόπιση εἶναι κάθε ἰσομετρία πού ἀλλάζει τόν προσανατολισμό.

(1) Τό γινόμενο δυό ἀντιμετατοπίσεων εἶναι μετατόπιση.

(2) Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός ἀντιμετατόπισης εἶναι ἀντιμετατόπιση.

(3) Τό γινόμενο μετατόπισης ἐπί ἀντιμετατόπιση εἶναι ἀντιμετατόπιση.

(4) Μιά ἀντιμετατόπιση εἶναι ὡρισμένη σ' ἕνα ἐπίπεδο ἄν ξέρουμε δυό ζευγάρια ἀπό ὁμόλογα σημεῖα.

Στά ἑπόμενα κεφάλαια θά ἐξετάσουμε τούς βασικούς μετασχηματισμούς τοῦ ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΜΕΤΑΦΟΡΑ

1.1. Ἄς θεωρήσουμε τό διάνυσμα $\vec{u}$. Σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμε τό σημεῖο Μ' ἀπό τήν σχέση

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}.$$

Συμβολισμός: $M'=\tau_{\vec{u}}[M]$. Ὁ μετασχηματισμός $\tau_{\vec{u}}$ λέγεται μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{u}$.

1.2. Θεωρήματα.

(1) Ἡ μεταφορά εἶναι κανονικός μετασχηματισμός.
(2) Ἡ μεταφορά εἶναι μετατόπιση.
(3) Ἄν $\vec{u}=\vec{0}$, τότε ἡ μεταφορά $\tau_{\vec{0}}$ εἶναι ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός, δηλαδή $\tau_{\vec{0}}=I$.
(4) Ἄν $\vec{u}\neq\vec{0}$ ἡ μεταφορά $\tau_{\vec{u}}$ δέν ἔχει διπλᾶ σημεῖα. Γιατί $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\neq\vec{0}$.

1.3. Ἡ μεταφορά τῶν ἁπλῶν σχημάτων (εὐθείας, εὐθ. τμήματος, περιφέρειας, τόξου).

(1) Τό ὁμόλογο εὐθείας ε κατά τήν μεταφορά $\tau_{\vec{u}}$ εἶναι εὐθεία ε' ὅμοια προσανατολισμένη μέ τήν ε.
Γράφουμε $\varepsilon'=\tau_{\vec{u}}[\varepsilon]$.
Τό ὁμόλογο εὐθ. τμήματος ΑΒ κατά τήν μεταφορά $\tau_{\vec{u}}$ εἶναι εὐθ. τμῆμα Α'Β', ὅπου $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} A'=\tau_{\vec{u}}[A] \\ B'=\tau_{\vec{u}}[B] \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'}=\tau_{\vec{u}}[AB].$$

(2) Τὸ ὁμόλογο περιφέρειας (O,R) κατὰ τὴν μεταφορὰ $\tau_{\vec{v}}$ εἶναι περιφέρεια (O',R'), ὅπου:

$$(\vec{OO'}=\vec{v}) \wedge (R'=R).$$

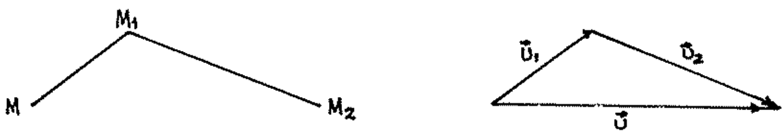
Γράφουμε $(O',R')=\tau_{\vec{v}}[(O,R)]$.
Τὸ ὁμόλογο τόξου εἶναι πάλι τόξο ὅμοια προσανατολισμένο.

1.4. Ἡ ὁμάδα $(\{\tau\},\cdot)$.
Ἄς εἶναι $\{\tau\}$ τὸ σύνολο τῶν μεταφορῶν καὶ "$\cdot$" τὸ γινόμενο δύο μεταφορῶν.

(1) Ἄν $\tau_{\vec{v}_1}, \tau_{\vec{v}_2} \in \{\tau\}$ καὶ M ἕνα σημεῖο θὰ ἔχουμε:

$$M \xrightarrow{\tau_{\vec{v}_1}} M_1 \xrightarrow{\tau_{\vec{v}_2}} M_2.$$

Δηλαδή:
$$M_2=\tau_{\vec{v}_2}\cdot\tau_{\vec{v}_1}[M] \qquad (1)$$



Ἀλλὰ $\vec{MM_2}=\vec{MM_1}+\vec{M_1M_2} \Longrightarrow \vec{MM_2}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$.
Ἄν εἶναι $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ βλέπουμε ὅτι τὸ M_2 προκύπτει ἀπὸ τὸ M μὲ τὴν μεταφορὰ $\tau_{\vec{v}}$

$$M_2=\tau_{\vec{v}}[M]. \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1),(2) $\Longrightarrow$

$$\tau_{\vec{v}_1+\vec{v}_2}=\tau_{\vec{v}_2}\cdot\tau_{\vec{v}_1}. \qquad (3)$$

Τὸ γινόμενο λοιπὸν δύο μεταφορῶν μὲ διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ εἶναι ἴσο μὲ τὴν μεταφορὰ διανύσματος $\vec{v}_1+\vec{v}_2$.
Ἀπὸ τὴν σχέση (3) συμπεραίνουμε ἀκόμα ὅτι:

$$\tau_{\vec{v}_1+\vec{v}_2}=\tau_{\vec{v}_2}\cdot\tau_{\vec{v}_1}=\tau_{\vec{v}_1}\cdot\tau_{\vec{v}_2}. \qquad (4)$$

(2) $\tau_{\vec{0}}=I$.

(3) $\tau_{-\vec{v}}=\tau_{\vec{v}}^{-1}$.

Γιατί $I=\tau_{\vec{0}}=\tau_{-\vec{v}+\vec{v}}=\tau_{-\vec{v}}\cdot\tau_{\vec{v}}$.

Ἄρα τὸ ζευγάρι $(\{\tau\},\cdot)$ εἶναι ὁμάδα καὶ μάλιστα ἀπὸ τὴν (4) ἀβελιανή.
Ἀκόμα βλέπουμε ὅτι:

$$\tau_{\vec{u}_1+\vec{u}_2+\dots+\vec{u}_\nu}=\tau_{\vec{u}_1}\cdot\tau_{\vec{u}_2}\cdots\tau_{\vec{u}_\nu}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΤΡΟΦΗ

2.1. Ἄς πάρουμε τὸ σημεῖο O καὶ μία γωνία φ. Σὲ κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμε τὸ σημεῖο M′ ἀπὸ τὴν σχέση:

$$OM=OM'$$
$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=\varphi.$$

Συμβολίζουμε: $M'=R_{(O,\varphi)}[M]$.
Ὁ μετασχηματισμὸς $R_{(O,\varphi)}$ λέγεται στροφὴ κέντρου O καὶ γωνίας φ.

2.2. Θεωρήματα.

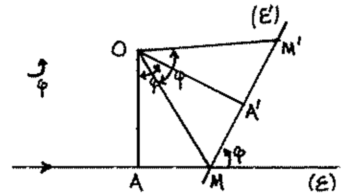
(1) Ἡ στροφὴ εἶναι κανονικὸς μετασχηματισμός.
(2) Ἡ στροφὴ εἶναι μετατόπιση.
(3) Ἄν $\varphi=2\kappa\pi$, ὅπου $\kappa\in Z$, τότε ἡ στροφὴ $R_{(O,2\kappa\pi)}$ εἶναι ταυτοτικὸς μετασχηματισμός, δηλαδὴ $R_{(O,0)}=I$.
(4) Ἄν $\varphi\neq 2\kappa\pi$ ἡ στροφὴ $R_{(O,\varphi)}$ ἔχει ἕνα μοναδικὸ διπλὸ σημεῖο, τὸ κέντρο O.
(5) Ἄν $\varphi=\pi$, τὰ ὁμόλογα σημεῖα M, M' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρο στροφῆς. Εἰδικὰ γιὰ τὴν περίπτωση αὐτή, τὴν στροφὴ $R_{(O,\pi)}$ ὀνομάζουμε συμμετρία πρὸς κέντρο O καὶ συμβολίζουμε:

$$R_{(O,\pi)} = S_{(O)}.$$

2.3. Ἡ στροφή τῶν ἁπλῶν σχημάτων.

1. Τό ὁμόλογο εὐθείας ε κατά τήν στροφή $R_{(O,\varphi)}$ εἶναι εὐθεῖα ε'. Γράφουμε:

$$\varepsilon' = R_{(O,\varphi)}[\varepsilon].$$



Ἀπόδειξη:
$\varepsilon \ni M \xrightarrow{R(O,\varphi)} M'$. Ἄς εἶναι $OA \perp \varepsilon$ καί $A \xrightarrow{R(O,\varphi)} A'$. Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι $\widehat{OA'M'} = \widehat{OAM}$ (ὁμόρροπα). Δηλαδή τό M' βρίσκεται στήν ἀπό τό A' κάθετο ἐπί τήν OA'.

Ἀντίστροφα, ἡ στροφή $R_{(O,-\varphi)}$ μετασχηματίζει τήν ε' στήν ε.

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ἄν θεωρήσουμε ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) ἀνήκει στό προσανατολισμένο ἐπίπεδο θά εἶναι:

$$(\varepsilon, \varepsilon') = \varphi \quad \mathrm{mod}\,2\kappa\pi.$$ 2κπ

2. Τό ὁμόλογο μιᾶς ἡμιευθείας Ax κατά τήν στροφή $R_{(O,\varphi)}$ εἶναι ἡμιευθεῖα $A'x'$ ὅπου:

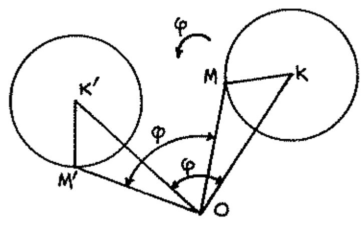
$$A \xrightarrow{R(O,\varphi)} A' \quad \text{καί} \quad (Ax, A'x') = \varphi \quad \mathrm{mod}\,2\kappa\pi$$ 2κπ

3. Τό ὁμόλογο διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατά τήν στροφή $R_{(O,\varphi)}$ εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$, ὅπου:

$$AB = A'B' \quad \text{καί} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi \quad \mathrm{mod}\,2\kappa\pi.$$ 2κπ

4. Τό ὁμόλογο περιφέρειας (K,ρ) κατά τήν στροφή $R_{(O,\varphi)}$ εἶναι περιφέρεια (K',ρ') ὅπου:

$$K' = R_{(O,\varphi)}[K] \quad \text{καί} \quad \rho' = \rho.$$



Ἀπόδειξη:
$(K,\rho) \ni M \xrightarrow{R(O,\varphi)} M'$
$K \xrightarrow{R(O,\varphi)} K'$
$\widehat{OKM} = \widehat{OK'M'}$ (ὁμόρροπα)

Ἄρα $K'M' = KM = \rho$, δηλαδή $M' \in (K', \rho' = \rho)$.

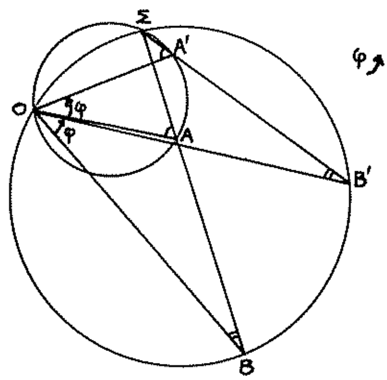
Ἀντίστροφα, ἡ στροφή $R_{(O,-\varphi)}$ μετασχηματίζει τήν (K',ρ') στήν (K,ρ).

Ἀκόμα εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ στροφή τόξου δίνει ἕνα νέο τόξο.

5. Δύο ἴσα εὐθ. τμήματα AB καί $A'B'$ ὄχι παράλληλα εἶναι πάντα ὁμόλογα σέ μιά στροφή $R_{(O,\varphi)}$ ὅπου:

$$A \xrightarrow{R(O,\varphi)} A'$$
$$B \longrightarrow B'.$$

Ἡ γωνία στροφῆς $\varphi=(\vec{AB},\vec{A'B'})$ καί κέντρο στροφῆς τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν περιφερειῶν $A\Sigma A'$, $B\Sigma B'$, ὅπου $\Sigma=AB\cap A'B'$. (Ἄν τά σημεῖα τομῆς συμπίπτουν, δηλαδή ἄν οἱ περιφέρειες ἐφάπτονται, τό κέντρο στροφῆς θά εἶναι τό Σ).



Ἀπόδειξη:

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ (\vec{A\Sigma},\vec{AO})=(\vec{A'\Sigma},\vec{A'O}) \\ (\vec{BA},\vec{BO})=(\vec{B'A'},\vec{B'O}) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \widehat{OAB}=\widehat{OA'B'}$ (ὁμόρροπα).

Ἄρα $OA=OA'$, $OB=OB'$ καί $(\vec{OA},\vec{OA'})=(\vec{OB},\vec{OB'})=$
$=(\vec{AB},\vec{A'B'})=\varphi$, δηλαδή

$$\vec{A'B'}=R_{(O,\varphi)}[\vec{AB}].$$

2.4. Ἡ ὁμάδα $(\{R_O\},\cdot)$.

Τό σύνολο τῶν στροφῶν περί κέντρο O συμβολίζουμε $\{R_O\}$ καί "·" τό γινόμενο δύο στροφῶν τοῦ συνόλου.

(1) Ἄν $(R_{(O,\varphi_1)}, R_{(O,\varphi_2)})\in\{R_O\}$, εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι

$$R_{(O,\varphi_1)}\cdot R_{(O,\varphi_2)}=R_{(O,\varphi_2)}\cdot R_{(O,\varphi_1)}=R_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}.$$

(2) $R_{(O,-\varphi)}=R^{-1}_{(O,\varphi)}$.

(3) $R_{(O,0)}=I$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τό ζευγάρι $(\{R_O\},\cdot)$ ἀποτελεῖ ὁμάδα καί μάλιστα ἀβελιανή.

Ἀκόμα εἶναι ἁπλό νά παρατηρήσουμε ὅτι

$$R_{(O,\varphi_1)}\cdot R_{(O,\varphi_2)}\cdots R_{(O,\varphi_\nu)} = R_{(O,\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

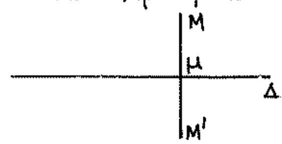
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΟΝ

3.1. Συμμετρία πρός εὐθεῖα.

Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεῖα Δ καί M ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Φέρνουμε τήν κάθετο $M\mu$ στήν Δ καί παίρνουμε σ' αὐτήν σημεῖο M' ἔτσι πού $\overrightarrow{M\mu}=\overrightarrow{\mu M'}$.

Συμβολισμός: $M'=S_{(\Delta)}[M]$.

Ὁ μετασχηματισμός $S_{(\Delta)}$ λέγεται συμμετρία πρός εὐθεῖα Δ.



3.2. Θεωρήματα.

(1) Ἡ συμμετρία εἶναι κανονικός μετασχηματισμός.

(2) Ἡ συμμετρία εἶναι ἀντιμετατόπιση.

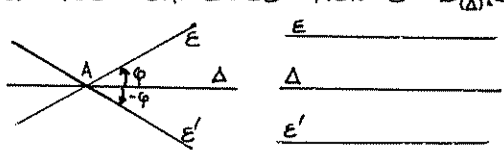
(3) Τά σημεῖα τῆς Δ εἶναι τά διπλᾶ σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ.

3.3. Ὁ μετασχηματισμός τῶν ἁπλῶν σχημάτων.

1. Ἄν ε τυχαία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί $\varepsilon'=S_{(\Delta)}[\varepsilon]$ θά εἶναι $(\Delta,\varepsilon)=-(\Delta,\varepsilon')$.

Ἀκόμα ἄν $\varphi\neq\kappa\pi$, θά εἶναι $\varepsilon\cap\varepsilon'\cap\Delta=A\neq\emptyset$.

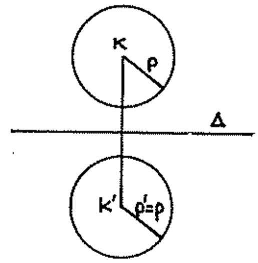
Τό ὁμόλογο εὐθ.



τμήματος AB εἶναι εὐθ. τμῆμα $A'B'$ ἔτσι πού $AB = A'B'$ καί $(\Delta, \overrightarrow{AB}) = -(\Delta, \overrightarrow{A'B'})$.

2. Ἄν (K, ρ) τυχαία περιφέρεια, τό ὁμόλογό της κατά τήν συμμετρία $S_{(\Delta)}$ εἶναι περιφέρεια (K', ρ') ἔτσι πού

$$K' = S_{(\Delta)}[K] \text{ καί } \rho' = \rho.$$



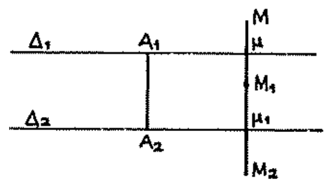
Τό ὁμόλογο τόξου εἶναι ἐπίσης τόξο.

3.4. Γινόμενα συμμετριῶν.

1. Ἄς θεωρήσουμε τίς συμμετρίες $S_{(\Delta_1)}, S_{(\Delta_2)}$ ὅπου $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$. Θεωροῦμε ἀκόμα A_1A_2 τήν ἀπόσταση τῶν Δ_1, Δ_2 $(A_1 \in \Delta_1,\ A_2 \in \Delta_2)$.

Ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = S_{(\Delta_1)}[M] \Longrightarrow \overline{M\mu} = \overline{\mu M_1} \\ M_2 = S_{(\Delta_2)}[M_1] \Longrightarrow \overline{\mu_1 M_2} = \overline{M_1\mu_1} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



$$\Longrightarrow \overline{MM_2} = 2\overline{\mu\mu_1} = 2\overline{A_1A_2}.$$

Ἄρα $M_2 = \tau_{2\overrightarrow{A_1A_2}}[M]$.

Δηλαδή: Τό γινόμενο δύο συμμετριῶν $S_{(\Delta_1)}, S_{(\Delta_2)}$ πρός εὐθεῖες Δ_1, Δ_2 παράλληλες εἶναι ἴσο μέ τήν μεταφορά κατά διάνυσμα ἴσο μέ τό διπλάσιο τῆς ἀπόστασης τῶν Δ_1, Δ_2 καί μέ διεύθυνση ἀπό τήν πρώτη πρός τήν δεύτερη εὐθεία.

$$\mathbf{S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = \tau_{(2\overrightarrow{A_1A_2})}}.$$

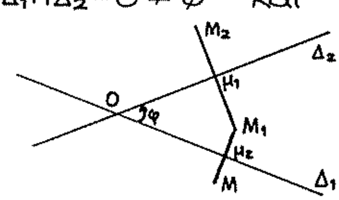
Παρατήρηση: $S_{(\Delta_1)} \cdot S_{(\Delta_2)} = \tau_{(-2\overrightarrow{A_1A_2})}$.

2. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι $\Delta_1 \cap \Delta_2 = O \neq \emptyset$ καί $(\Delta_1, \Delta_2) = \varphi$.

$M_1 = S_{(\Delta_1)}[M]$, $M_2 = S_{(\Delta_2)}[M_1]$.

Ἄρα $OM_2 = OM_1 = OM$.

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = 2\varphi$.



Δηλαδή: Τό γινόμενο δύο συμμετριῶν πρός ἄξονες

Δ_1, Δ_2 πού τέμνονται στό O εἶναι στροφή περί τό O κατά γωνία $2(\Delta_1, \Delta_2)$.

$$S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = R_{(\Delta_1 \cap \Delta_2 = O,\, 2(\Delta_1, \Delta_2) = 2\varphi)}$$

Ἄν $\Delta_1 \perp \Delta_2$ τό γινόμενο τῶν συμμετριῶν $S_{(\Delta_1)}$ καί $S_{(\Delta_2)}$ εἶναι συμμετρία πρός τό σημεῖο τομῆς τους (ἤ συμμετρία πρός κέντρο, § 3.5).

3. Ἡ συμμετρία εἶναι ἀμοιβαῖος (ἐνελεικτικός) μετασχηματισμός.

Πραγματικά $S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} = I$.

Ἄρα $S^{-1}_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}$.

4. Ἄν $S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = R_{(O,\varphi)} \Longrightarrow S_{(\Delta_1)} \cdot S_{(\Delta_2)} = R_{(O,-\varphi)}$.

3.5. Συμμετρία πρός σημεῖο.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου. Γιά κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμε τό σημεῖο M′ ἀπό τήν σχέση

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

M ——— O ——— M′

Συμβολισμός: $M' = S_{(O)}[M]$ ἤ $M' = S_{(O)}M$.

Ὁ μετασχηματισμός $S_{(O)}$ ὀνομάζεται συμμετρία πρός τό σημεῖον O ἤ συμμετρία πρός κέντρον O ἤ κεντρική συμμετρία.

Θεωρήματα.

(1) Ἡ συμμετρία πρός σημεῖον εἶναι κανονικός μετασχηματισμός.

(2) Ἡ συμμετρία πρός σημεῖον εἶναι μετατόπιση.

(3) Ἡ συμμετρία πρός σημεῖον εἶναι ἐνελεικτικός μετασχηματισμός, δηλαδή $S^2_{(O)} = I$.

(4) Τό κέντρο τῆς συμμετρίας εἶναι τό μοναδικό διπλό σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ.

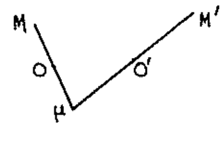
Ἡ συμμετρία πρός σημεῖον εἶναι εἰδική περίπτωση τῆς ὁμοιοθεσίας $(S_{(O)} = H_{(O,-1)})$ καί ἡ λεπτομερειακή ἐξέταση τῶν θεωρημάτων ὅπως καὶ ὁ μετασχηματισμὸς τῶν ἁπλῶν σχημάτων θὰ ἐξεταστοῦν στὸ κεφάλαιο 5.

Γινόμενο συμμετριῶν πρὸς σημεῖο.

(1) $S_{(O')} \cdot S_{(O)} = \tau_{2\vec{OO'}}$.

Δηλαδὴ τὸ γινόμενο δύο συμμετριῶν πρὸς τὰ σημεῖα O,O' εἶναι ἴσο μὲ μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $2\vec{OO'}$.

Ἀπόδειξη.



Ἄς εἶναι $\mu = S_{(O)}[M]$ καὶ $M' = S_{(O')}[\mu]$, δηλαδὴ $M' = S_{(O')} \cdot S_{(O)}[M]$. Ἀπὸ τὸ $\widehat{M\mu M'}$ εἶναι φανερὸ ὅτι $\vec{MM'} = 2\vec{OO'}$, δηλαδὴ

$$M' = \tau_{2\vec{OO'}}[M].$$

Ἄρα $S_{(O')} \cdot S_{(O)} = \tau_{2\vec{OO'}}$

(2) ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow S_{(A)} \cdot S_{(B)} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Gamma)}$.

Πραγματικά, ἂν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο θὰ εἶναι: $\vec{BA} = \vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow \tau_{2\vec{BA}} = \tau_{2\vec{\Gamma\Delta}} \Rightarrow S_{(A)} \cdot S_{(B)} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Gamma)}$. Ἀντίστροφα $S_{(A)} S_{(B)} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Gamma)} \Rightarrow \tau_{2\vec{BA}} = \tau_{2\vec{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \vec{BA} = \vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

(3) Τὸ γινόμενο τριῶν συμμετριῶν πρὸς σημεῖον εἶναι συμμετρία πρὸς σημεῖο.

Θεωροῦμε τὶς $S_{(O_1)}, S_{(O_2)}, S_{(O_3)}$ καὶ τὴν τέταρτη κορυφὴ O τοῦ παραλληλόγραμμου $O_1O_2O_3O$. Ἀπ' τὸ προηγούμενο ἔχουμε ὅτι:

$$S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = S_{(O_3)} \cdot S_{(O)} \quad ἤ$$

$$S_{(O_3)} \cdot S_{(O_2)} \, S_{(O_1)} = S_{(O)}.$$

(4) Κάθε συμμετρία πρὸς κέντρο μπορεῖ νὰ ἀναλυθῆ σὲ γινόμενο δύο συμμετριῶν πρὸς ἄξονες κάθετους ποὺ περνᾶν ἀπ' τὸ κέντρο τῆς συμμετρίας.

περνοῦν

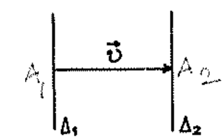
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΒΑΘΥΤΕΡΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Στό προηγούμενο κεφάλαιο ἀναπτύχθηκαν τά βασικά θεωρήματα τῶν μετασχηματισμῶν μεταφορᾶς, στροφῆς, συμμετρίας. Τώρα θά μελετήσουμε θεωρήματα τοῦ γινομένου τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν καί τήν ἐσωτερική τους σχέση.

4.1. Ἀποσύνθεση μεταφορᾶς σέ δύο συμμετρίες.

Κάθε μεταφορά $\tau_{2\vec{v}}$ μπορεῖ νά γραφτῆ σάν γινόμενο δύο συμμετριῶν $S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)}$ πρός εὐθεῖες Δ_1, Δ_2 παράλληλες μεταξύ τους καί κάθετες πρός τό διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς. Ἡ κοινή κάθετή τους A_1A_2 ($A_1 \in \Delta_1$, $A_2 \in \Delta_2$) ἔχει μῆκος $|\vec{v}|$ καί ἡ μιά ἀπ' τίς Δ_1, Δ_2 μπορεῖ νά ἐκλεγῆ αὐθαίρετα.



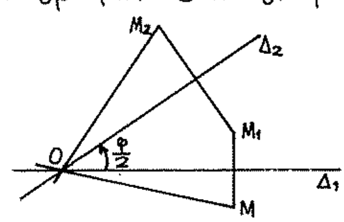
Πραγματικά, τό θεώρημα 3.4.1 μᾶς λέει ὅτι

$$\tau_{2\vec{v}} = S_{(\Delta_2)} S_{(\Delta_1)}.$$

Παρατήρηση : $S_{(\Delta_1)} S_{(\Delta_2)} = \tau_{(-2\vec{v})}$.

4.2. Ἀποσύνθεση στροφῆς σέ δύο συμμετρίες.

Κάθε στροφή $R_{(O,\varphi)}$ μπορεῖ νά γραφτῆ σάν γινόμενο δύο συμμετριῶν $S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)}$ πρός δύο εὐθεῖες Δ_1, Δ_2 πού τέμνονται μεταξύ τους στό O καί σχηματίζουν γωνία $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\varphi}{2}$. Ἡ μία ἀπ' τίς Δ_1, Δ_2 μπορεῖ νά ἐκλεγῆ αὐθαίρετα.



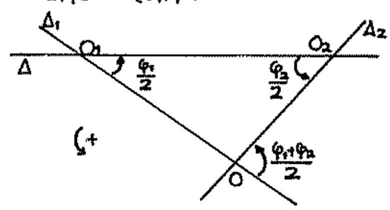
Πραγματικά, τό θεώρημα 3.4.2 μᾶς λέει ὅτι

$$R_{(O,\varphi)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)}.$$

4.3. Γινόμενο δύο στροφῶν πρός διαφορετικά κέντρα.

Ἄς πάρουμε τίς στροφές $R_{(O_1,\varphi_1)}$, $R_{(O_2,\varphi_2)}$. Θά προσδιορίσουμε τόν μετασχηματισμό $R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)}$.

Ἄς εἶναι α) $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$.



Ὀνομάζουμε Δ τήν εὐθεία O_1O_2. Φέρνουμε τίς εὐθεῖες Δ_1 καί Δ_2 ἀπό τά O_1, O_2 ἀντίστοιχα μέ τέτοιο τρόπο πού $(\Delta_1, \Delta) = \frac{\varphi_1}{2}$, $(\Delta, \Delta_2) = \frac{\varphi_2}{2}$. Ἄν $O = \Delta_1 \cap \Delta_2$ θά ἔχουμε σύμφωνα μέ τά προηγούμενα:

$$\left.\begin{array}{l} R_{(O_1,\varphi_1)} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta_1)} \\ R_{(O_2,\varphi_2)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta)} \end{array}\right\} \Longrightarrow R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta_1)}.$$

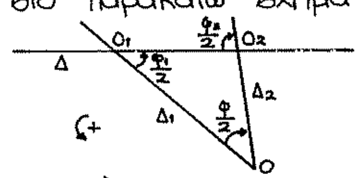
Ἀλλά εἶναι γνωστόν ὅτι $S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} = S^2_{(\Delta)} = I$.

Δηλαδή $R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = R_{(O,\varphi)}$ ὅπου $\varphi = 2(\Delta_1, \Delta_2)$.

Εἶναι γνωστόν ὅμως ὅτι $(\Delta_1, \Delta_2) = (\Delta_1, \Delta) + (\Delta, \Delta_2)$ ἄρα $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Δηλαδή $R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} = R_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}$.

Ἄν $\varphi_1 < 0$, $\varphi_2 < 0$ μέ μιά ἀλλαγή τοῦ προσανατολισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἐρχόμαστε στήν προηγούμενη περίπτωση.

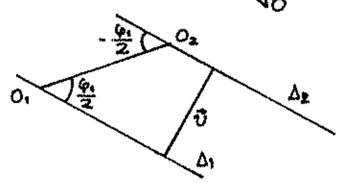
β) Ἄν $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 < 0$, ἡ σύνθεση στό παρακάτω σχῆμα



$$R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta_1)} =$$

$$= S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = R_{(O,\varphi=\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Ἄν $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$.

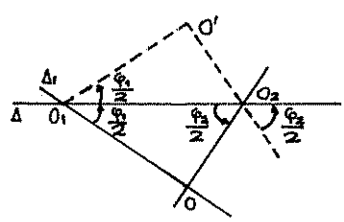


$$R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)}$$

δηλαδή μεταφορά $\tau_{2\vec{v}}$.

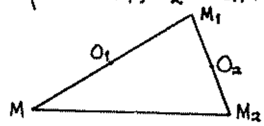
διακεκομμένες

Στό διπλανό σχῆμα μέ διακοφτές γραμμές φαίνεται ἡ κατασκευή τοῦ κέντρου O' τῆς στροφῆς $R_{(O_1,\varphi_1)} \cdot R_{(O_2,\varphi_2)}$. Τά σημεῖα O, O' εἶναι συμμετρικά πρός Δ. Εἶναι φανερόν ὅτι



$$R_{(O_2,\varphi_2)} \cdot R_{(O_1,\varphi_1)} \neq R_{(O_1,\varphi_1)} \cdot R_{(O_2,\varphi_2)}$$

Τό γινόμενο δύο συμμετριῶν πρός κέντρα O_1, O_2 ἀντίστοιχα εἶναι ἴσο μέ μεταφορά κατά $2\vec{O_1O_2}$

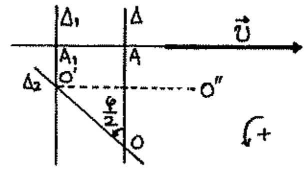


$$M_2 = R_{(O_2,\pi)} \cdot R_{(O_1,\pi)}(M) = \tau_{2\vec{O_1O_2}}(M).$$

Ἀπ' τά παραπάνω κι ἀπ' τήν 2.4 εὔκολα βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι τό ζευγάρι $(\{R\}, \cdot)$, ὅπου $\{R\}$ τό σύνολο τῶν στροφῶν τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ὁμάδα.

4.4. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $R_{(O,\varphi)} \cdot \tau_{\vec{v}}$, ὅπου $\varphi > 0$.

Φέρνουμε ἀπ' τό O τήν κάθετη Δ ἐπί τό διάνυσμα $\vec{v}$. Σέ ἀπόσταση $\vec{AA_1} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ ἀπό τήν Δ φέρνουμε τήν $\Delta_1 \parallel \Delta$ καί σχηματίζουμε $(\Delta, \Delta_2) = \frac{\varphi}{2}$. Ἔχουμε:



$$\left.\begin{aligned} \tau_{\vec{v}} &= S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta_1)} \\ R_{(O,\varphi)} &= S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow R_{(O,\varphi)} \cdot \tau_{\vec{v}} = S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta_1)} =$$

$$= S_{(\Delta_2)} \cdot S_{(\Delta_1)} = R_{(O',\varphi')}$$

ὅπου $O' = \Delta_1 \cap \Delta_2$ καί $\frac{1}{2}\varphi' = (\Delta_1, \Delta_2) = (\Delta, \Delta_2) = \frac{1}{2}\varphi$.

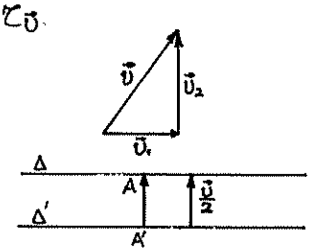
Παρατηρήσεις:

(α) Εὔκολα βρίσκουμε $\tau_{\vec{v}} \cdot R_{(O,\varphi)} = R_{(O'',\varphi'')}$ ὅπου O'' τό συμμετρικό τοῦ O' πρός Δ καί $\varphi'' = \varphi$.

(β) Ἄν $\varphi < 0$ τό κέντρο τοῦ $R_{(O,\varphi)} \cdot \tau_{\vec{v}}$ εἶναι πάλι τό O'' συμμετρικό τοῦ O πρός Δ.

4.5. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $S_{(\Delta)} \cdot \tau_{\vec{v}}$.

Ἄς εἶναι $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ὅπου $\vec{v}_1 \parallel \Delta$ καί $\vec{v}_2 \perp \Delta$. Θά εἶναι



$$\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}_2} \cdot \tau_{\vec{v}_1} \qquad (1)$$

Φέρνουμε τήν εὐθεία Δ' ἔτσι πού ἡ ἀπόσταση AA' τῶν Δ, Δ' νά εἶναι $\vec{A'A} = \frac{1}{2}\vec{v}_2$. Ἄρα

$$\tau_{\vec{v}_2} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta')} \qquad (2)$$

$(1), (2) \Longrightarrow S_{(\Delta)} \cdot \tau_{\vec{v}} = S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta)} \cdot S_{(\Delta')} \cdot \tau_{\vec{v}_1}$ ἤ

$$S_{(\Delta)} \cdot \tau_{\vec{v}} = S_{(\Delta')} \cdot \tau_{\vec{v}_1}$$

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι:

$$S_{(\Delta)} \cdot \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \cdot S_{(\Delta)}.$$

4.6. Τό γινόμενο τριῶν συμμετριῶν.

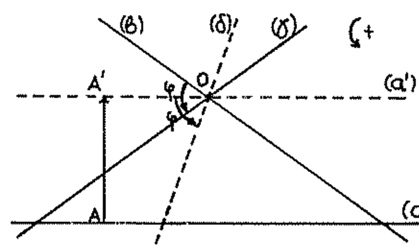
(α) Ἄν οἱ ἄξονες τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο εἶναι ἴσο μέ στροφή περί τό σημεῖο αὐτό.

(β) Ἄν δύο ἀπό τούς ἄξονες εἶναι εὐθεῖες παράλληλες εἶναι εὔκολη ἡ μελέτη γιατί ἀναγόμαστε στό 4.5.

(γ) Ἄν οἱ τρεῖς ἄξονες τέμνονται σέ τρία διαφορετικά σημεῖα.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τό γινόμενο τριῶν συμμετριῶν εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο μεταφορᾶς ἐπί συμμετρίαν ὅπου τό διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς εἶναι παράλληλο πρός τόν ἄξονα συμμετρίας.

Ἀπόδειξη:



Ἄς εἶναι α, β, γ τρεῖς εὐθεῖες, πού τέμνονται χωρίς νά περνάν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο καί $\beta \cap \gamma = O$, $(\beta, \gamma) = \varphi$.

Ἄρα $S_{(\gamma)} \cdot S_{(\beta)} = R_{(O, 2\varphi)}$.

Φέρνουμε ἀπό τό O τήν $(\alpha') \parallel (\alpha)$ καί τήν (δ) ἔτσι πού $(\alpha', \delta) = \varphi$. Ἔχουμε τότε $R_{(O,2\varphi)} = S_{(\delta)} \cdot S_{(\alpha')} \Rightarrow S_{(\gamma)} \cdot S_{(\beta)} \cdot S_{(\alpha)} = S_{(\delta)} \cdot S_{(\alpha')} \cdot S_{(\alpha)}$. Ἄν $AA' \perp \alpha, \alpha'$ καί $\vec{AA'} = \vec{v}$ τότε $S_{(\alpha')} \cdot S_{(\alpha)} = \tau_{2\vec{v}}$, ἄρα

$$S_{(\gamma)} \cdot S_{(\beta)} \cdot S_{(\alpha)} = S_{(\delta)} \cdot \tau_{2\vec{v}}.$$

Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα 5 ὅμως μποροῦμε νά γράψουμε $S_{(\delta)} \cdot \tau_{2\vec{v}} = S_{(\delta)} \cdot \tau_{2\vec{v}_1}$, ὅπου $\vec{v}_1$ ἡ συνιστῶσα τοῦ $\vec{v}$ ἡ παράλληλη πρός τήν δ.

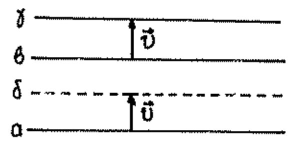
4.7. Ποιές εἶναι οἱ συνθῆκες γιά νά ἔχουμε $S_\alpha \tau_{\vec{v}} = S_\beta$;
Πολλαπλασιάζουμε ἀριστερά ἐπί S_α, ὅποτε θά ἔχουμε $\tau_{\vec{v}} = S_\alpha \cdot S_\beta$.

Ἄρα λοιπόν (α) $v \perp \alpha \parallel \beta$ ἤ

(β) $\vec{v} = \vec{0}$ ὁπότε $\alpha = \beta$.

4.8. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἀποτελῆ συμμετρία τὸ γινόμενο τριῶν συμμετριῶν $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ εἶναι:
(α) Οἱ ἄξονες α, β, γ νὰ περνοῦν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο.
(β) Οἱ τρεῖς ἄξονες νὰ εἶναι παράλληλοι.

Ἀναγκαία:
(α) Ἀπ' τὸ θεώρημα (6) ἔχουμε $S_\gamma S_\beta S_\alpha = S_\delta \cdot \tau_{2\vec{\upsilon}_1}$. Ἀλλὰ ἀφοῦ α, β, γ περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο, θὰ ἔχουμε $\vec{\upsilon}_1 = \vec{0}$, ἄρα $S_\gamma S_\beta S_\alpha = S_\delta$.
(β) Ἂν $\alpha \| \beta \| \gamma$.
Παίρνουμε τὴν δ ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα. Εἶναι



$$S_\gamma S_\beta = \tau_{2\vec{\upsilon}}.$$

Ἄρα $S_\gamma S_\beta S_\alpha = \tau_{2\vec{\upsilon}} \cdot S_\alpha = S_\delta \cdot S_\alpha \cdot S_\alpha = S_\delta$.

Ἱκανή:
$S_\gamma S_\beta S_\alpha = S_\delta \Rightarrow S_\gamma \cdot S_\beta = S_\delta \cdot S_\alpha$. Ἀπ' αὐτὴ τὴ σχέση προκύπτει (α) $\gamma \| \beta \| \delta \| \alpha$ ἢ (β) $\gamma \cap \beta \neq \emptyset \wedge \delta \cap \alpha \neq \emptyset$, ὁπότε $S_\gamma S_\beta = S_\delta \cdot S_\alpha \Rightarrow R_{(\gamma\cap\beta, 2(\beta,\gamma))} = R_{(\delta\cap\alpha, 2(\alpha,\delta))}$. Δηλαδὴ $\gamma\cap\beta = \delta\cap\alpha$ καὶ ἀκόμα $2(\beta,\gamma) = 2(\alpha,\delta) \mod 2k\pi$.

Παρατήρηση:
Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς ἑνὸς τετραπλεύρου, τότε αὐτὸ τὸ τετράπλευρο θὰ εἶναι ἐγγράψιμο.

Τὸ παρακάτω πόρισμα μᾶς δίνει μιὰ συνθήκη γιὰ νὰ περνᾶν τρεῖς εὐθεῖες α, β, γ ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

Πόρισμα: Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ περνᾶν οἱ εὐθεῖες α, β, γ ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο εἶναι

$$[S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha]^2 = I.$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἁπλὴ ἂν στηριχτοῦμε στὸ προηγούμενο θεώρημα.

4.9. Τὸ γινόμενο περιττοῦ πλήθους συμμετριῶν πρὸς ἄξονες ποὺ περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο εἶναι ἴσο μὲ συμμετρία.

Ἂς εἶναι $T = S_{\Delta_{2p+1}} \cdot S_{\Delta_{2p}} \cdots S_{\Delta_1}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι $S_{\Delta_{2p}} \cdots S_{\Delta_1} = R_{(0,\varphi)}$, δηλαδὴ $T = S_{\Delta_{2p+1}} R_{(0,\varphi)}$, ἄρα ἀπ' τὰ προηγούμενα $T = S_\Delta$ καὶ ἡ Δ

δίνεται ἀπό τήν σχέση

$$(\Delta,\Delta_{2p+1})=\frac{\varphi}{2}=(\Delta_1,\Delta_2)+(\Delta_2,\Delta_3)+\cdots+(\Delta_{2p},\Delta_{2p+1}).$$

Ἐφαρμογή:
Νά βρεθῆ ὁ Γ. τόπος τῶν διπλῶν σημείων τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$T=S_\Delta\cdot S_{\Delta'}\cdot S_\Delta\,,\quad \Delta\cap\Delta'\neq\emptyset.$$

Ἄς εἶναι $S_\Delta\cdot S_{\Delta'}\cdot S_\Delta=S_\delta \Rightarrow S_\Delta\cdot S_{\Delta'}=S_\delta\cdot S_\Delta \Rightarrow (\delta,\Delta)=(\Delta,\Delta')$. Ἄρα ὁ Γ. τόπος, δηλαδή ἡ εὐθεία δ δίνεται ἀπ' τήν προηγούμενη σχέση.

4.10. Τό γινόμενο ἄρτιου πλήθους συμμετριῶν εἶναι ἴσο μέ στροφή.
Ἄς εἶναι $T=S_{\Delta_{2p}}\cdot S_{\Delta_{2p-1}}\cdots S_{\Delta_1}$.
Ὅπως εἶναι γνωστό τό γινόμενο δύο συμμετριῶν εἶναι στροφή. Ἄρα ἄν συνθέσουμε ἀνά δύο τίς συμμετρίες πού δόθηκαν, βλέπουμε ὅτι καταλήγουμε σέ στροφή γωνίας $\varphi=2(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})+2(\widehat{\Delta_3,\Delta_4})+\cdots+2(\widehat{\Delta_{2p-1},\Delta_{2p}})$.

4.11. Τό γινόμενο περιττοῦ πλήθους συμμετριῶν εἶναι ἴσο μέ στροφή ἐπί συμμετρία (ἤ συμμετρία ἐπί στροφή) ἤ μέ τό γινόμενο τριῶν συμμετριῶν.
Ἡ ἀπόδειξη ἁπλούστατη, ὅπως παραπάνω.

4.12. Δυό σχήματα F,F' ὁμόρροπα ἴσα μποροῦν νά ἐφαρμόσουν μέ μιά μεταφορά (ἄν οἱ ὁμόλογες εὐθείες τους εἶναι παράλληλες) ἤ μιά στροφή.
Ἀπόδειξη:
Ἄν οἱ ὁμόλογες εὐθεῖες εἶναι παράλληλες καί A,A' δυό ὁμόλογα σημεῖα, τά σχήματα θά ἐφαρμόσουν μέ τήν μεταφορά $\tau_{\vec{AA'}}$.
Ἄν οἱ ὁμόλογες εὐθεῖες δέν εἶναι παράλληλες καί (A,A'), (B,B') δυό ζευγάρια ἀπό ὁμόλογα σημεῖα, ὑποθέτουμε ὅτι

$$A'B'=R_{(O,(AB,A'B'))}[AB].$$

θά εἶναι καί

$$F'=R_{(O,(AB,A'B'))}[F].$$

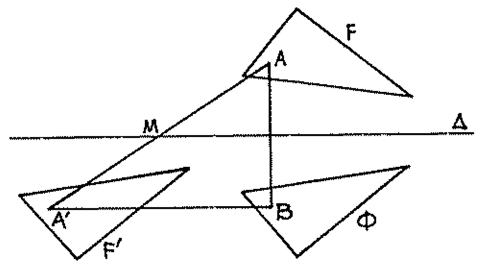
4.13. Δυό σχήματα F, F' ἀντίρροπα ἴσα μποροῦν νά ἐφαρμόσουν μέ τρεῖς συμμετρίες.

Ἀπόδειξη:

Ἄν Δ τυχαία εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου, θεωροῦμε τό σχῆμα $\Phi = S_\Delta[F]$. Ἀλλά τότε τά σχήματα F', Φ εἶναι ὁμόρροπα ἴσα καί ἐφαρμόζουν μέ μιά στροφή ἤ μιά μεταφορά δηλαδή μέ τό γινόμενο δυό συμμετριῶν. Ἄρα τά F, F' ἐφαρμόζουν μέ τρεῖς συμμετρίες.

4.14. Τά μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων πού ἑνώνουν τά ὁμόλογα σημεῖα δύο ἀντίρροπα ἴσων σχημάτων βρίσκονται σέ μιά εὐθεῖα.

Ἀπόδειξη:



Εἶναι γνωστόν ὅτι τό γινόμενο τριῶν συμμετριῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο συμμετρίας ἐπί μεταφορά, ὅπου τό διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς εἶναι παράλληλο μέ τόν ἄξονα συμμετρίας.

Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα 13 λοιπόν συμπεραίνουμε ὅτι τά δύο σχήματα F, F' μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ τό γινόμενο συμμετρίας ἐπί μεταφορά, δηλαδή:

$$F' = \tau_{\vec{v}} \cdot S_\Delta[F] \qquad \vec{v} \parallel \Delta.$$

Ἄν τώρα $A \in F$ καί $B = S_\Delta[A]$, $A' = \tau_{\vec{v}}[B]$ δηλαδή

$$A' = \tau_{\vec{v}} \cdot S_\Delta[A],$$

τότε $A'B \parallel \Delta$, ἄρα ἄν $M = AA' \cap \Delta$ εἶναι

$$MA = MA'.$$

4.15. Ἄν F_1, F_2, F_3 τρία σχήματα ὁμόρροπα ἴσα, τότε ὑπάρχει σχῆμα F ἀντίρροπα ἴσο μέ τά προηγούμενα πού εἶναι συμμετρικό τῶν F_1, F_2, F_3 πρός τρεῖς εὐθεῖες $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ἀντίστοιχα.

Ἀπόδειξη:

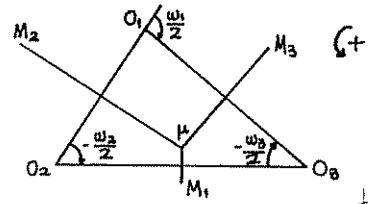
Ἄς εἶναι $F_2 = R_{(O_3, \omega_3)}[F_1]$, $F_3 = R_{(O_1, \omega_1)}[F_2]$, $F_1 = R_{(O_2, \omega_2)}[F_3]$.

Ἀπό τίς παραπάνω σχέσεις βγαίνει ὅτι:

$$F_3 = R_{(O_1,\omega_1)}\cdot R_{(O_3,\omega_3)}\cdot R_{(O_2,\omega_2)}[F_3].$$

Δηλαδή $R_{(O_1,\omega_1)}\cdot R_{(O_3,\omega_3)}\cdot R_{(O_2,\omega_2)} = I \Rightarrow R_{(O_1,\omega_1)} = R_{(O_2,-\omega_2)}\cdot R_{(O_3,-\omega_3)}$.

Ἄρα $F_3 = S_{O_1O_3}[F]$, $F = S_{O_1O_2}[F_2]$ καὶ τὸ θεώρημα ἀποδείχτηκε.



Τὸ παραπάνω θεώρημα ἀποδείχτηκε τὸ 1881 (μὲ διαφορετικὴ ἀπόδειξη) ἀπὸ τὸν Ἕλληνα γεωμέτρη Κυπάρισσο Στέφανο, καθηγητὴ στὸ Πανεπιστήμιο Ἀθηνῶν.

4.16. Οἱ σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ ποὺ ἀναπτύχθηκαν μέχρι τώρα (μεταφορά, στροφή, συμμετρία διατηροῦν τὴν ἰσότητα, ἄρα εἶναι ἰσομετρίες. Φυσικὰ τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὸ γινόμενό τους μὲ ὅποια τάξη κι ἂν τὰ πάρουμε. Ἀντίστροφα, κάθε ἰσομετρία μπορεῖ νὰ ἐκφραστῆ σὰν γινόμενο αὐτῶν τῶν τριῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν.

Ἀκόμα τὸ γινόμενο μεταφορῶν, στροφῶν ἀποτελεῖ μετατόπιση. Ἀντίστροφα κάθε μετατόπιση μπορεῖ νὰ ἐκφραστῆ σὰν γινόμενο μεταφορῶν, στροφῶν.

Τὸ γινόμενο μεταφορῶν, στροφῶν καὶ περιττοῦ πλήθους συμμετριῶν εἶναι ἀντιμετατόπιση, ἀλλὰ καὶ ἀντίστροφα κάθε ἀντιμετατόπιση μπορεῖ νὰ ἐκφραστῆ σὰν γινόμενο μεταφορῶν, στροφῶν καὶ περιττοῦ πλήθους συμμετριῶν.

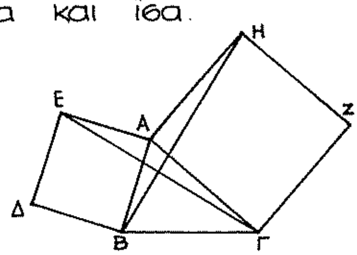
Δυὸ σχήματα ὁμόρροπα ἴσα μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν μὲ μιὰ μεταφορὰ ἢ μιὰ στροφή. Ἄρα κάθε μετατόπιση εἶναι ἴση μὲ μεταφορὰ ἢ στροφή.

Δυὸ σχήματα ἀντίρροπα ἴσα μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν μὲ μιὰ συμμετρία ἐπὶ μιὰ μεταφορὰ ἢ μιὰ στροφή.

Ἄρα κάθε ἰσομετρία εἶναι μιὰ μεταφορὰ ἢ μιὰ στροφὴ ἢ τὸ γινόμενο συμμετρίας ἐπὶ μεταφορὰν ἢ στροφήν.

4.17. Ἀσκήσεις.

1. Στὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι τὰ τμήματα ΓΕ καὶ ΒΗ εἶναι κάθετα καὶ ἴσα.



Ἀπόδειξη:

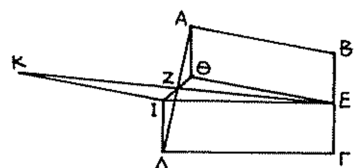
Παρατηροῦμε ὅτι ἡ στροφή $R_{(A,90^\circ)}$ μετασχηματίζει τὸ Ε στὸ Β καὶ τὸ Γ στὸ Η, ἄρα

$$BH = R_{(A,90^\circ)}[E\Gamma].$$

Δηλαδὴ τὰ τμήματα ΒΗ καὶ ΕΓ εἶναι ὁμόλογα, ἄρα ἴσα καὶ κάθετα.

Μὲ τὴν βοήθεια τῆς παραπάνω δῶστε μιὰ ἀκόμα λύση γιὰ τὸ πρόβλημα.

2. Ἂν σὲ τετράπλευρο ΑΒΓΔ τὸ εὐθ. τμῆμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα δυὸ ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δυὸ ἄλλων πλευρῶν τότε τὸ τετράπλευρο θἆναι τραπέζιο.



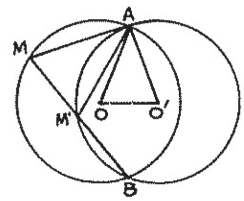
Ἀπόδειξη:

Ἂς εἶναι Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν ΒΓ, ΑΔ. Ἔχουμε $ZE = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$. Μεταφέρουμε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ στὸ ΘΕ καὶ τὸ ΓΔ στὸ ΕΙ καὶ παίρνουμε τὸ συμμετρικὸ τοῦ Ε πρὸς Ζ. Τὰ σημεῖα Θ, Ζ, Ι βρίσκονται σὲ εὐθεία ὅπως μπορεῖ νὰ ἀποδειχτῆ ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΘΖ, ΔΙΖ. Τὸ τετράπλευρο ΚΙΕΘ εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄρα $KI = \Theta E = AB$. Στὸ τρίγωνο ΚΙΕ $KI + IE > KE$ ἢ $AB + \Gamma\Delta > 2ZE$. Αὐτὴ ἡ σχέση ὅμως εἶναι ἀντίθετη μὲ τὴν ὑπόθεση, ἄρα τὸ τρίγωνο ΚΙΕ δὲν ὑπάρχει, δηλαδὴ τὸ σημεῖο Ι βρίσκεται στὴν ΚΕ. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι $AB \parallel \Gamma\Delta \parallel EZ$.

3. Θεωροῦμε τὴν περιφέρεια (Ο,R) καὶ Α ἕνα σημεῖο της. Παίρνουμε τὸ ὁμόλογο τῆς (Ο,R) κατὰ τὴν στροφὴ $R_{(A,\omega)}$, ὅπου $\omega \neq 2k\pi$. Ἂν $M \in (O,R)$ καὶ $M' = R_{(A,\omega)}[M]$ ἡ εὐθεία ΜΜ′ περνᾶ ἀπ᾽ τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῆς (Ο,R) καὶ τῆς ὁμόλογής της.

Ἀπόδειξη:

Ἂς εἶναι $(O', R') = R_{(A,\omega)}[(O,R)]$ καὶ Β τὸ δεύτερο σημεῖο



τομῆς τῶν (O,R), (O',R').

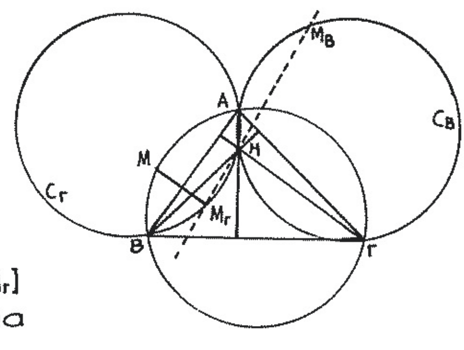
Εἶναι $\widehat{AOO'} \sim \widehat{AMM'} \Rightarrow \widehat{AMM'} = \widehat{AOO'}$ (1)

Ἀκόμα $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$ (2)

Τέλος ἀπό τίς (1),(2) συμπεραίνουμε ὅτι τά M, M', B βρίσκονται σέ εὐθεία.

4. Τά συμμετρικά σημείου τῆς περιφέρειας, τῆς περιγεγραμμένης σέ τρίγωνο ΑΒΓ, πρός τίς πλευρές του βρίσκονται σέ εὐθεία πού περνᾶ ἀπ' τό ὀρθόκεντρο.

Ἀπόδειξη:

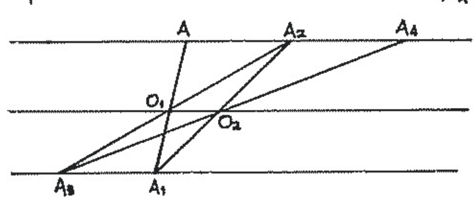


Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας καί M_A, M_B, M_Γ τά συμμετρικά του πρός ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντίστοιχα. Ὀνομάζουμε C_A, C_B, C_Γ τούς κύκλους ΒΗΓ, ΓΗΑ, ΑΗΒ ὅπου Η τό ὀρθόκεντρο τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$. Θά εἶναι $M_B = S_{A\Gamma}\cdot S_{AB}[M_\Gamma]$ ἤ $M_B = R_{(A,2(\overline{AB},\overline{\Gamma A}))}[M_\Gamma]$ ἤ ἀκόμα $C_B = R_{(A,2(\overline{AB},\overline{\Gamma A}))}[C_\Gamma]$.

Ἄρα τά M_Γ, M_B εἶναι ὁμόλογα στήν στροφή $R_{(A,2(\overline{AB},\overline{\Gamma A}))}$ καί ἀπό τήν προηγούμενη ἄσκηση συμπεραίνουμε ὅτι ἡ M_B, M_Γ περνᾶ ἀπ' τό σημεῖο τομῆς Η τῶν C_B, C_Γ.

5. Ἄν ἕνα σχῆμα F ἔχει δύο κέντρα συμμετρίας O_1, O_2, τότε α) δέν εἶναι πεπερασμένο καί β) ἔχει ἄπειρα κέντρα συμμετρίας πού βρίσκονται στήν εὐθεία O_1O_2.

Ἀπόδειξη:



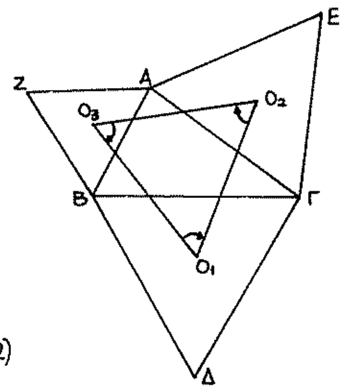
α) Ἄς πάρουμε $A \in F$ καί $A_1 = S_{O_1}[A]$, $A_2 = S_{O_2}[A_1]$, $A_3 = S_{O_1}[A_2]$, $A_4 = S_{O_2}[A_3]$ κ.τ.λ.

θά εἶναι $\overline{AA_2} = 2\cdot\overline{O_1O_2}$, $\overline{AA_4} = 4\,\overline{O_1O_2}$ καί γενικά $\overline{AA_{2\nu}} = 2\nu\cdot\overline{O_1O_2}$. Ἄν πάρουμε λοιπόν ἕναν τυχαῖο κύκλο (O,R) μπορεῖ, διαλέγοντας κατάλληλα τό ν, τό σημεῖο $A_{2\nu}$ νά βρίσκεται ἔξω ἀπ' τόν κύκλο. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό F δέν εἶναι πεπερασμένο.

β) Ἄν $O_3 = O_1O_2 \cap AA_3$ τὰ σημεῖα A, A_3 εἶναι συμμετρικὰ πρὸς O_3. Ἐπειδὴ τὸ A εἶναι ἕνα τυχαῖο σημεῖο τοῦ F συμπεραίνουμε ὅτι τὸ O_3 εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ F.

Μιὰ ἀξιόλογη ἐρώτηση γιὰ τὸν ἀναγνώστη: Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας O_1O_2 εἶναι κέντρο συμμετρίας;

6. Στὶς πλευρὲς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἐξωτερικὰ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ, ΓΑΕ, ΑΒΖ. Ἄς εἶναι O_1, O_2, O_3 τὰ κέντρα τους. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι τὸ τρίγωνο $O_1O_2O_3$ εἶναι ἰσόπλευρο.



Ἀπόδειξη:

$A = R_{(O_2,120°)} \cdot R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)}[A]$.

Ἀφοῦ ὅμως $120° + 120° + 120° = 360°$ ὁ μετασχηματισμός $R_{(O_2,120°)} \cdot R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)}$ εἶναι γενικὰ μεταφορά. Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχει διπλὸ σημεῖο θὰ εἶναι ταυτότητα. Ἄρα $R_{(O_2,120°)} \cdot R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)} = I \Longrightarrow$

$\Longrightarrow R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)} = R_{(O_2,-120°)}$. (1)

Ἀλλὰ $R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)} = R_{(O,240°)} = R_{(O,-120°)}$. (2)

(1),(2) $\Longrightarrow R_{(O_2,-120°)} = R_{(O,-120°)} \Longrightarrow O_2 \equiv O$.

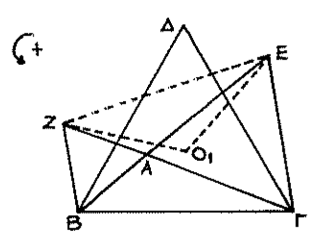
Δηλαδὴ τὸ O_2 εἶναι τὸ κέντρο τῆς στροφῆς $R_{(O_1,120°)} \cdot R_{(O_3,120°)}$. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ὅμως ἀπ' τὴν κατασκευὴ τοῦ O ξέρουμε ὅτι $O_2\widehat{O_3}O_1 = O_3\widehat{O_1}O_2 = 60°$.

Παρατήρηση: Ἄν τὰ ἰσόπλευρα κατασκευαστοῦν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου ἡ πρόταση ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύη, μὲ τὴν ἴδια ἀπόδειξη.

7. Στὶς πλευρὲς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἰσόπλευρα ΒΓΔ, ΓΑΕ, ΑΒΖ. Τὰ ΓΑΕ, ΑΒΖ πρὸς τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ τριγώνου, τὸ ΒΓΔ πρὸς τὸ ἐσωτερικό. Ἄν O_1 τὸ κέντρο τοῦ ΒΓΔ, τὸ τρίγωνο EO_1Z εἶναι ἰσοσκελές.

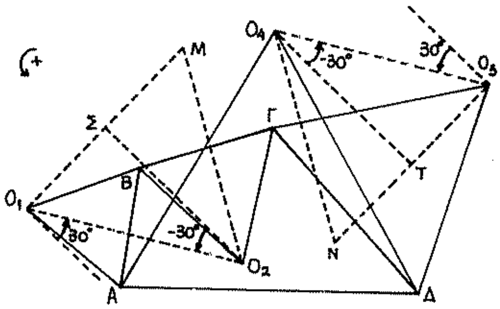
Ἀπόδειξη:

$B = R_{(O_1,-120°)} \cdot R_{(E,60°)} \cdot R_{(Z,60°)}[B]$.



Ἄρα $R_{(O_1,-120°)} \cdot R_{(E,60°)} \cdot R_{(Z,60°)} = I$, δηλαδὴ $R_{(E,60°)} \cdot R_{(Z,60°)} = R_{(O_1,120°)}$ καὶ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ κέντρου O_1 τῆς στροφῆς $R_{(E,60°)} \cdot R_{(Z,60°)}$ μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι $O_1\widehat{Z}E = O_1\widehat{E}Z = 30^\circ$.

8. Στίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ἰσόπλευρα τρίγωνα ABO_1, $\Gamma\Delta O_3$ πρός τό ἐξωτερικό τοῦ τετράπλευρου καί στίς ΒΓ, ΔΑ ἰσόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma O_2$, $A\Delta O_4$ πρός τό ἐσωτερικό τοῦ τετράπλευρου. Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο $O_1O_2O_3O_4$ εἶναι παραλληλόγραμμο.



Ἀπόδειξη:

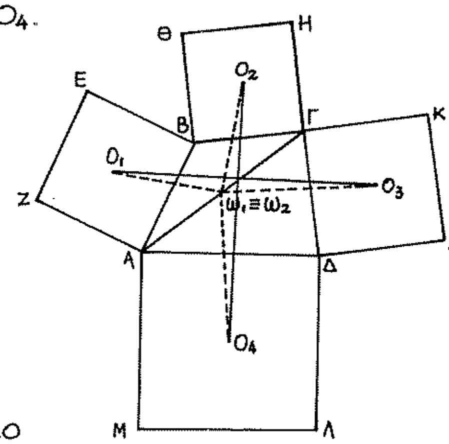
Παρατηροῦμε ὅτι:

$A = R_{(O_4,-60^\circ)} \cdot R_{(O_3,60^\circ)} \cdot R_{(O_2,-60^\circ)} \cdot R_{(O_1,60^\circ)}[A]$.

Ἀλλά $R_{(O_2,-60^\circ)} \cdot R_{(O_1,60^\circ)} = \tau_{2\overrightarrow{O_2\Sigma}} = \tau_{\overrightarrow{O_1M}}$ ὅπου $O_1\overset{\triangle}{M}O_2$ ἰσόπλευρο καί $O_2\Sigma \perp O_1M$. Ἀκόμα εἶναι $R_{(O_4,-60^\circ)} \cdot R_{(O_3,60^\circ)} = \tau_{2\overrightarrow{O_3T}} = \tau_{\overrightarrow{O_3N}}$ ὅπου $O_3\overset{\triangle}{N}O_4$ ἰσόπλευρο καί $O_4T \perp O_3N$. Ἄρα $A = \tau_{\overrightarrow{O_1M}} \cdot \tau_{\overrightarrow{O_3N}}[A]$, δηλαδή $\tau_{\overrightarrow{O_1M}} \cdot \tau_{\overrightarrow{O_3N}} = I \Rightarrow \overrightarrow{O_1M} = -\overrightarrow{O_3N}$. Ἀπό τήν τελευταία σχέση εὔκολα βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι $\overrightarrow{O_1O_2} = -\overrightarrow{O_3O_4}$.

Τί προκύπτει ἄν $\Delta \equiv A$;

9. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετράπλευρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ἐξωτερικά τά τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΑΔΛΜ. Ἄν O_1, O_2, O_3, O_4 εἶναι ἀντίστοιχα τά κέντρα τους, θά ἀποδείξουμε ὅτι $O_1O_3 \perp\!\!\!= O_2O_4$.



Ἀπόδειξη:

Παρατηροῦμε ὅτι

$A = R_{(O_4,90^\circ)} \cdot R_{(O_3,90^\circ)} \cdot R_{(O_2,90^\circ)} \cdot R_{(O_1,90^\circ)}[A]$.

Ἄς εἶναι $R_{(O_2,90^\circ)} \cdot R_{(O_1,90^\circ)} = R_{(\omega_1,180^\circ)}$ καί $R_{(O_4,90^\circ)} \cdot R_{(O_3,90^\circ)} = R_{(\omega_2,180^\circ)}$.

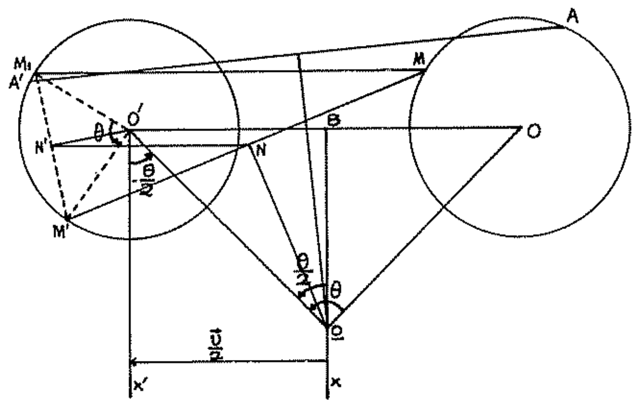
Θά εἶναι $R_{(\omega_2,180^\circ)} \cdot R_{(\omega_1,180^\circ)} = I$, γιατί τό γινόμενο δύο στροφῶν μέ ἄθροισμα γωνιῶν $0, 2\pi$ εἶναι μεταφορά καί ἐπειδή ὁ μετασχηματισμός ἔχει διπλό σημεῖο θά εἶναι ταυτότητα. Ἀπό τήν τελευταία σχέση θά ἔχουμε:

$R_{(\omega_2,180^\circ)} = R_{(\omega_1,-180^\circ)} = R_{(\omega_1,180^\circ)} \Rightarrow \omega_1 \equiv \omega_2$.

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῶν ω_1, ω_2 βλέπουμε ὅτι τὰ τρίγωνα $O_1\omega_1O_2$, $O_3\omega_2O_4$ εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ. Ἡ στροφὴ $R_{(\omega_1\equiv\omega_2, 90^\circ)}$ μετασχηματίζει τὴν O_1O_3 στὴν O_2O_4. Ἄρα $O_1O_3 \triangleq O_2O_4$

10. Σὲ δύο ἴσες περιφέρειες (O,R) καὶ (O',R') θεωροῦμε δύο σταθερὰ σημεῖα ἀντίστοιχα A, A', καὶ δύο μεταβλητὰ σημεῖα M, M' πάλιν ἀντίστοιχα ἔτσι ποὺ τὰ τόξα AM, $A'M'$ νὰ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἴσα. (α) Προσδιορίστε τὴν στροφὴ $R_{(\varrho,\theta)}$, ἔτσι ποὺ $\widehat{A'M'} = R_{(\varrho,\theta)}[\widehat{AM}]$. (β) Προσδιορίστε τὴν γωνία φ καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{v}$, ἔτσι ποὺ $R_{(\varrho,\theta)} = R_{(O',\varphi)}\,\tau_{\vec{v}}$. (γ) Μὲ βάση τὸ (β) νὰ βρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου N τοῦ εὐθ. τμήματος MM'.

Λύση:



(α) Τὸ κέντρο τῆς στροφῆς βρίσκεται, ὅπως εἶναι γνωστό, στὶς μεσοκάθετες τῶν AA', MM'. Τὸ σημεῖο αὐτὸ βρίσκεται ἀκόμα στὴν x μεσοκάθετη τῆς OO' καὶ ἐπειδὴ τὸ O, O' εἶναι ὁμόλογα κατὰ τὴν στροφὴ θὰ ἔχουμε:

$$\theta = (\overline{\varrho O}, \overline{\varrho O'}).$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε ἀριστερὰ τὴν ἰσότητα ἐπὶ $R^{-1}_{(O',\varphi)}$ θὰ ἔχουμε

$$R^{-1}_{(O',\varphi)} \cdot R_{(\varrho,\theta)} = \tau_{\vec{v}} \quad \text{ἤ}$$
$$R_{(O',-\varphi)} \cdot R_{(\varrho,\theta)} = \tau_{\vec{v}}.$$

Πρέπει λοιπὸν $-\varphi+\theta = 0 \Rightarrow \varphi = \theta$. Κάνουμε τὴ σύνθεση τῶν δύο στροφῶν $R_{(\varrho,\theta)}$, $R_{(O',\varphi)}$. Γιὰ νὰ γίνη φέρνουμε ἀπ' τὸ O' τὴν x' παράλληλη πρὸς τὴν x καὶ βλέπουμε ὅτι $(\overline{\varrho B}, \overline{\varrho O'}) = \frac{\theta}{2}$, $(\overline{O'\varrho}, \overline{O'x'}) = -\frac{\theta}{2}$, ἄρα σύμφωνα μὲ τὴν 4.3-β : $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$

(γ) Ἄς εἶναι $M_1 = \tau_{\vec{v}}[M]$ θά εἶναι $M' = R_{(O',\theta)}[M_1]$. Παίρνουμε τό μέσον N' τοῦ εὐθ. τμήματος M_1M'. Τό N' ἀνήκει σέ περιφέρεια (O',ρ), ὅπου ρ τό ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου πλευρᾶς R καί γωνίας κορυφῆς θ. Θά εἶναι $\overline{NN'} = \frac{\overline{MM_1}}{2} = \frac{\overline{OO'}}{2}$. Ἄρα $\overrightarrow{N'N} = -\frac{\vec{v}}{2}$. Δηλαδή γ. τόπος τοῦ N εἶναι τό ὁμόλογο τοῦ (O',ρ) κατά τήν μεταφορά $\tau_{-\frac{\vec{v}}{2}}$.

Παρατήρηση:

Τό (γ) μπορεῖ νά λυθῆ πιό ἁπλᾶ μέ βάση τήν 6.4.5.

11. Ἄν α, β δυό εὐθεῖες:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow S_\alpha \cdot S_\beta = S_\beta \cdot S_\alpha .$$

Ἀπόδειξη:

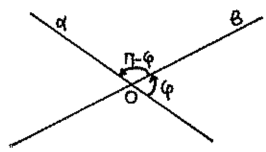
(α) $\alpha \perp \beta \Rightarrow S_\alpha \cdot S_\beta = S_\beta \cdot S_\alpha$ φανερό.

(β) $S_\alpha \cdot S_\beta = S_\beta \cdot S_\alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$

$S_\beta \cdot S_\alpha = R_{(O,\varphi)}$, ὅπου $O = \alpha \cap \beta$, $\varphi = 2(\widehat{\alpha,\beta})$

$S_\alpha \cdot S_\beta = R_{(O,\pi-\varphi)}$.

Ἄρα $\pi - \varphi = \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.



12. Ἄν α, β, δ τρεῖς εὐθεῖες, ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ δ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν α, β εἶναι

$$S_\delta = S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta$$

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι M ἕνα τυχαῖο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου καί δ ἡ διχοτόμος τῶν α, β. Θά εἶναι $\mu = S_\beta M$, $\mu' = S_\delta \mu$, $M' = S_\alpha \mu'$, δηλαδή $M' = S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta M$ (1).

Ἀλλά ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $M(\alpha\cap\beta)M'$ εἶναι ἡ δ. Ἄρα $M' = S_\delta M$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow S_\delta = S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta$.

Ἀντίστροφα, ἄς εἶναι $S_\delta = S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta \Rightarrow S_\delta^2 = [S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [S_\alpha \cdot S_\delta \cdot S_\beta]^2 = I$. Ἄρα σύμφωνα μέ τό 4.8 οἱ α, δ, β περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο.

Ἀκόμα ἡ ὑπόθεση γράφεται $S_\alpha \cdot S_\delta = S_\delta \cdot S_\beta \Rightarrow R_{(O,\varphi)} = R_{(O,\varphi')}$ (3), ὅπου $O = \alpha \cap \beta$, $\varphi = 2(\widehat{\delta,\alpha})$, $\varphi' = 2(\widehat{\beta,\delta})$.

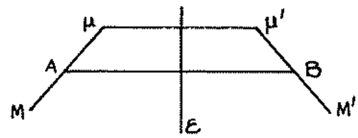
Ἀπό τήν (3) βλέπουμε ὅτι $\varphi = \varphi'$, ἄρα ἡ δ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν α, β.

13. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ εἶναι ἡ εὐθεία ε μεσοκάθετη στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι:

$$S_B \cdot S_\varepsilon \cdot S_A = S_\varepsilon .$$

Ἀπόδειξη:

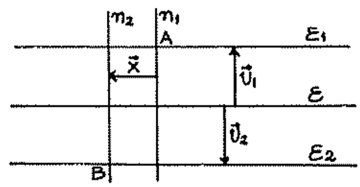
Ἂν ε μεσοκάθετος στὴν ΑΒ παίρνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Μ καὶ ἔχουμε $\mu = S_A M$, $\mu' = S_\varepsilon \mu$, $M' = S_B \mu'$ ἢ ἀκόμα $M' = S_B S_\varepsilon S_A M$.



Στὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιο $M\mu\mu'M'$ ἡ ε εἶναι μεσοκάθετη τῶν δύο βάσεων, ἄρα

$$M' = S_\varepsilon M, \text{ δηλαδὴ } S_B \cdot S_\varepsilon \cdot S_A = S_\varepsilon .$$

Ἀντίστροφα, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι $S_B S_\varepsilon S_A = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ μεσοκάθετη στὴν ΑΒ.



Ἀπ' τὴν ὑπόθεση ἔχουμε: $S_\varepsilon S_A = S_B S_\varepsilon$. Φέρνουμε ἀπὸ τὰ Α, Β τὶς παράλληλες καὶ τὶς κάθετες πρὸς τὴν ε ἀντίστοιχα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ καὶ η_1, η_2. Θὰ ἔχουμε $S_A = S_{\varepsilon_1} S_{\eta_1}$, $S_B = S_{\eta_2} S_{\varepsilon_2}$ ἢ $S_\varepsilon S_A = S_\varepsilon S_{\varepsilon_1} S_{\eta_1} = \tau_{-2\vec{\upsilon}_1} S_{\eta_1}$, $S_B S_\varepsilon = S_{\eta_2} S_{\varepsilon_2} S_\varepsilon = S_{\eta_2} \tau_{2\vec{\upsilon}_2}$. Ἄρα

$$\tau_{-2\vec{\upsilon}_1} S_{\eta_1} = S_{\eta_2} \tau_{2\vec{\upsilon}_2}, \text{ ἢ ἀκόμα}$$

$$\tau_{-2\vec{\upsilon}_1} = S_{\eta_1} S_{\eta_2} \tau_{2\vec{\upsilon}_2} = \tau_{-2\vec{x}} \tau_{2\vec{\upsilon}_2} .$$

Ἄρα $-2\vec{\upsilon}_1 = -2\vec{x} + 2\vec{\upsilon}_2$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ συγγραμικά:

$$\vec{x} = \vec{0},\ -\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 .$$

14. Ἂν O_1, O_2, O_3 τρία τυχαῖα σημεῖα, τότε θὰ ἰσχύη ἡ:
$S_{(O_3)} S_{(O_2)} S_{(O_1)} S_{(O_3)} S_{(O_2)} S_{(O_1)} = I$ (ἢ $[S_{(O_3)} S_{(O_2)} S_{(O_1)}]^2 = I$).

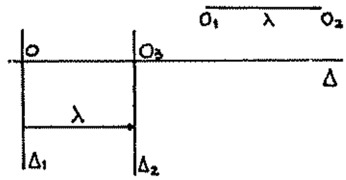
Ἀπόδειξη:

1η: Εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν 3.5.3 ὅτι τὸ γινόμενο τριῶν συμμετριῶν πρὸς σημεῖο εἶναι συμμετρία πρὸς σημεῖο, ἄρα εἶναι ἐνέλλειξη, ὁπότε τὸ τετράγωνό της εἶναι ταυτότητα.

2η: Φτάνει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $T = S_{(O_3)} S_{(O_2)} S_{(O_1)}$ εἶναι συμμετρία πρὸς σημεῖο, ὁπότε ὁ Τ σὰν ἐνελλεικτικὸς μετασχηματισμὸς θὰ μᾶς δώση $T^2 = I$.

Ὅπως εἶναι γνωστὸ $S_{(O_2)} S_{(O_1)} = \tau_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$.

Φέρνουμε ἀπ' τό O_3 τήν Δ παράλληλη πρός τήν O_1O_2. Ἀκόμα ἀπ' τό O_3 τήν Δ_2 κάθετη στήν O_1O_2 καί τέλος τήν Δ_1 παράλληλη πρός τήν Δ_2 καί σέ ἀπόσταση $\lambda = O_1O_2$. Θά ἔχουμε :



$$\tau_{2\overrightarrow{O_1O_2}} = S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1}$$

$$S_{(O_3)} = S_{\Delta} \cdot S_{\Delta_2}.$$

Ἄρα $S_{(O_3)} \cdot S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = S_{(O_3)} \cdot \tau_{2\overrightarrow{O_1O_2}} = S_{\Delta} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} = S_{\Delta} \cdot S_{\Delta_1} = S_{(O)}$

3ο: Ἄς εἶναι :

$$T_1 = S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = \tau_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$$
$$T_2 = S_{(O_1)} \cdot S_{(O_3)} = \tau_{2\overrightarrow{O_3O_1}}$$
$$T_3 = S_{(O_3)} \cdot S_{(O_2)} = \tau_{2\overrightarrow{O_2O_3}}.$$

Ἄρα $T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \tau_{2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_2O_3} + 2\overrightarrow{O_3O_1}} = \tau_{\vec{0}} = I.$

Μέ τήν ἴδια μέθοδο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι τό γινόμενο $2\nu+1$ συμμετριῶν πρός κέντρα $O_1, O_2, \dots, O_{2\nu+1}$ εἶναι κεντρική συμμετρία, δηλαδή ἐνελεικτικός μετασχηματισμός.

Ἀκόμα, ἐπειδή $S_{(O_1)} = H_{(O_1,-1)}$, τό πρόβλημα ὁλόκληρο μπορεῖ νά λυθῆ μέ τή θεωρία πού ἀναφέρεται στά γινόμενα ὁμοιοθεσιῶν.

15. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερες εὐθεῖες :

$$\delta = \text{διχοτόμος τῆς γωνίας } (O\alpha, S_\gamma S_\beta[O\alpha]) \Leftrightarrow S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = S_\delta,$$

ὅπου $O = \alpha \cap \beta$.

Ἡ ἀπόδειξη εὔκολη μέ τήν βοήθεια τῆς 12.

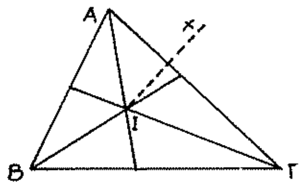
16. Ἄν ΑΒΓ ἕνα τρίγωνο καί $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, τότε :

$$S_{\delta_\gamma} \cdot S_{\delta_\beta} \cdot S_{\delta_\alpha} = S_x \Leftrightarrow x \perp A\Gamma.$$

Ἀπόδειξη:

Ἄν $S_{\delta_\gamma} \cdot S_{\delta_\beta} \cdot S_{\delta_\alpha} = S_x$, θά ἀποδείξουμε ὅτι $x \perp A\Gamma$.

Εἶναι φανερό ὅτι $S_\beta[B] = B$.



Θά ἔχουμε λοιπόν:

$S_x \cdot S_\beta[\beta] = S_{\delta_\gamma} \cdot S_{\delta_\beta} \cdot S_{\delta_\alpha} \cdot S_\beta[\beta] = \beta$ (1).

Παρατηροῦμε ὅμως ἀκόμα ὅτι:

$S_\beta \cdot S_x[\beta] = S_\beta \cdot S_{\delta_\gamma} \cdot S_{\delta_\beta} \cdot S_{\delta_\alpha}[\beta] = \beta$ (2).

Ἀπό τίς (1),(2) καί τήν ἄσκηση 11 ἔχουμε λοιπόν

$$S_x \cdot S_\beta = S_\beta \cdot S_x \Rightarrow x \perp \beta.$$

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ ἀντίστροφου εἶναι εὔκολη (μέ τήν σέ ἄτοπο ἀπαγωγή).

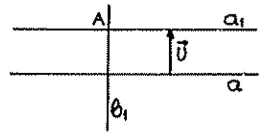
17. Γιά τό σημεῖο A καί τήν εὐθεία α:

$$S_A \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_A \Leftrightarrow A \in \alpha.$$

Ἀπόδειξη:

α) $A \in \alpha \Rightarrow S_A \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_A$ φανερό.

β) $S_A \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_A \Rightarrow A \in \alpha$.



Ἄς ὑποθέσουμε ἀντίθετα ὅτι $A \notin \alpha$. Φέρνουμε ἀπ' τό A τίς $\alpha_1 \parallel \alpha$ καί $\beta_1 \perp \alpha$. Θά εἶναι:

$$S_A = S_{\alpha_1} \cdot S_{\beta_1} = S_{\beta_1} \cdot S_{\alpha_1},$$

ἄρα

$$S_A \cdot S_\alpha = S_{\beta_1} \cdot S_{\alpha_1} \cdot S_\alpha = S_{\beta_1} \cdot \tau_{2\vec{\upsilon}},$$

$$S_\alpha \cdot S_A = S_\alpha \cdot S_{\alpha_1} \cdot S_{\beta_1} = \tau_{-2\vec{\upsilon}} \cdot S_{\beta_1}.$$

Ἄρα $S_{\beta_1} \cdot \tau_{2\vec{\upsilon}} = \tau_{-2\vec{\upsilon}} \cdot S_{\beta_1} \Rightarrow \tau_{2\vec{\upsilon}} = \tau_{-2\vec{\upsilon}} \Rightarrow \vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon}$, δηλαδή $A \in \alpha$.

18. $\vec{OA} = -\vec{OB} \Leftrightarrow S_A \cdot S_O \cdot S_B = S_O$.

Ἄν $\vec{OA} = -\vec{OB} \Rightarrow S_A \cdot S_O \cdot S_B = S_O$ φανερό.

Ἄν $S_A \cdot S_O \cdot S_B = S_O \Rightarrow S_A \cdot S_O = S_O \cdot S_B \Rightarrow \tau_{2\vec{OA}} = \tau_{2\vec{BO}} \Rightarrow \vec{OA} = -\vec{OB}$.

19. Ποιά σχέση συνδέει τά A, B, Γ ἄν $S_A \cdot S_B \cdot S_\Gamma \cdot S_B \cdot S_\Gamma \cdot S_B = I$.

Λύση:

Ἡ σχέση πού δόθηκε γίνεται $\tau_{2\vec{BA}} \cdot \tau_{2\vec{B\Gamma}} \cdot \tau_{2\vec{B\Gamma}} = I$, ὁπότε $\vec{BA} + \vec{B\Gamma} + \vec{B\Gamma} = \vec{O}$, ἄρα $\vec{B\Gamma} = \frac{\vec{AB}}{2}$.

20. Ἄν $\alpha \parallel \beta$ καί $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB \perp \alpha, \beta$, τότε:

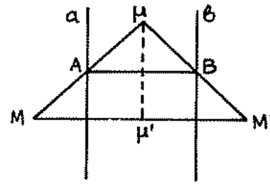
$$S_B \cdot S_A = S_\beta \cdot S_\alpha.$$

Ἀπόδειξη:

Θά εἶναι $\mu = S_A M$, $M' = S_B \mu$, δηλαδή $M' = S_B \cdot S_A M$.

Παρόμοια $\mu' = S_a M$, $M' = S_\beta \mu'$, δηλαδή $M' = S_\beta \cdot S_a M$.

Ἄρα $S_B \cdot S_A = S_\beta \cdot S_a$.



21. Ἄν $a \parallel \beta$ καί P ἕνα τυχαῖο σημεῖο στό ἐπίπεδό τους, τότε $(S_a \cdot S_\beta \cdot S_P)^2 = I$.

Ἀπόδειξη:

Ἀπό τό προηγούμενο ἔχουμε $S_a S_\beta = S_\kappa S_\lambda$, ὅπου $\kappa \in a$, $\lambda \in \beta$ καί $\kappa\lambda$ κοινή κάθετη τῶν a, β. Εἶναι ὅμως γνωστό ἀπό τήν ἄσκηση 14 ὅτι $(S_\kappa \cdot S_\lambda \cdot S_P)^2 = I$.

22. Ἄν οἱ εὐθεῖες $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο, θά εἶναι $S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_3}$.

Ἀπόδειξη:

Ὅπως εἶναι γνωστό (ἄσκ. 14 καί 48) $(S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1})^2 = I$. Ἄρα $S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} = (S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1})^{-1} = S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_3}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} = S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_3} \quad (1)$$

Παρόμοια ἔχουμε $S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_2} = S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_4}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_3} \cdot S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_4} \cdot S_{\Delta_3}$.

23. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι γιά τέσσερα τυχαῖα σημεῖα O_1, O_2, O_3, O_4 στό ἐπίπεδο εἶναι:

$$S_{(O_4)} \cdot S_{(O_3)} \cdot S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} \cdot S_{(O_4)} \cdot S_{(O_3)}.$$

Ἀπόδειξη:

Εἶναι γνωστό ὅτι $S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = \tau_{2\vec{O_1O_2}}$, $S_{(O_4)} \cdot S_{(O_3)} = \tau_{2\vec{O_3O_4}}$.

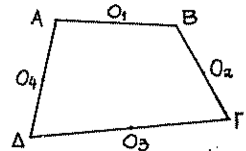
Ἄρα $S_{(O_4)} \cdot S_{(O_3)} \cdot S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} = \tau_{2(\vec{O_1O_2} + \vec{O_3O_4})}$ (1).

Παρόμοια $S_{(O_2)} \cdot S_{(O_1)} \cdot S_{(O_4)} \cdot S_{(O_3)} = \tau_{2(\vec{O_3O_4} + \vec{O_1O_2})}$ (2).

Τά δεξιά μέλη τῶν (1),(2) εἶναι ἴσα. Ἄρα θά εἶναι ἴσα καί τά ἀριστερά μέλη.

24. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Ἀπόδειξη:



Ἄς εἶναι O_1, O_2, O_3, O_4 τὰ μέσα τῶν $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ ἀντίστοιχα. Θὰ εἶναι

$$A = S_{O_4} S_{O_3} S_{O_2} S_{O_1} [A],$$

δηλαδὴ $A = \tau_{2\overrightarrow{O_3O_4}} \tau_{2\overrightarrow{O_1O_2}} [A]$ ἢ $A = \tau_{2(\overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_1O_2})} [A]$. Ἡ μεταφορὰ ὅμως ἔχει διπλὸ σημεῖο μόνον ὅταν εἶναι ταυτότητα. Ἄρα $\overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_4O_3} \Rightarrow O_1O_2O_3O_4$ παραλληλόγραμμο.

25. Ἂν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ τρεῖς εὐθεῖες ποὺ τέμνονται καὶ δὲν περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο, θὰ εἶναι:

$$S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} = S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2}.$$

Ἀπόδειξη:

Ἀπὸ τὴν 4.6 θὰ ἔχουμε $S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} S_{\Delta_1} = S_\Delta \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} S_\Delta$. Ἄρα

$$S_\Delta \tau_{\vec{v}} S_\Delta \tau_{\vec{v}} = S_\Delta S_\Delta \tau_{\vec{v}} \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}}^2 = \tau_{2\vec{v}}.$$

Ἀκόμα $S_{\Delta_1} S_{\Delta_3} S_{\Delta_2} = S_{\Delta'} \tau_{\vec{v}'}$.

Ἄρα τὸ πρῶτο μέλος τῆς σχέσης ποὺ θέλουμε νὰ ἀποδείξουμε εἶναι ἴσο μὲ $\tau_{2\vec{v}} \tau_{2\vec{v}'} = \tau_{2(\vec{v}+\vec{v}')}$.

Παρόμοια τὸ δεύτερο μέλος βρίσκεται ἴσο μὲ τὴν $\tau_{2\vec{v}'} \tau_{2\vec{v}} = \tau_{2(\vec{v}'+\vec{v})}$.

26. $S_\alpha S_\beta S_P S_O S_\beta S_\alpha S_O S_P = I \Rightarrow (P \equiv O) \vee (S_\alpha S_\beta S_O)^2 = I$, ὅπου α, β εὐθεῖες καὶ P, O σημεῖα σ' ἕνα ἐπίπεδο.

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι $\alpha \cap \beta = K$, $2(\alpha, \beta) = \varphi$.

$S_\alpha S_\beta S_P S_O S_\beta S_\alpha S_O S_P = R_{(K,\varphi)} \tau_{2\overrightarrow{OP}} R_{(K,-\varphi)} \tau_{2\overrightarrow{PO}} = I$. Ἄρα θἆναι $R_{(K,\varphi)} \tau_{2\overrightarrow{OP}} = [R_{(K,-\varphi)} \tau_{2\overrightarrow{PO}}]^{-1} = \tau_{2\overrightarrow{OP}} R_{(K,\varphi)}$.

Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὴν 4.4 γιὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενο $R \cdot \tau$ ἀντιμεταθετὸ πρέπει ἢ $\varphi = 0$ ὁπότε $\alpha \parallel \beta$, καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἄσκηση 21 $(S_\alpha S_\beta S_O)^2 = I$, ἢ $\vec{v} = \vec{0}$ ὁπότε $P \equiv O$.

27. $S_\alpha \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} S_\alpha \Leftrightarrow \vec{v} \perp \alpha$.

Ἀπόδειξη:

Ἂν $\vec{v} \perp \alpha$ φανερὸ εἶναι ὅτι $S_\alpha \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} S_\alpha$ (ἢ $[S_\alpha \tau_{\vec{v}}]^2 = I$).

Ἂν $S_\alpha \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} S_\alpha$, ἀναλύουμε $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, ὅπου $\vec{v}_1 \perp \alpha$. Ἄρα

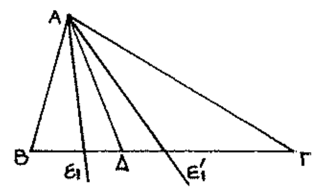
$\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}_1} \tau_{\vec{v}_2}$ καὶ ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἔχουμε τότε

$$S_a \cdot \tau_{\vec{v}_1} \tau_{\vec{v}_2} = \tau_{\vec{v}_2} \tau_{\vec{v}_1} S_a \Longrightarrow (S_a \cdot \tau_{\vec{v}_1})^2 \cdot \tau^2_{\vec{v}_2} = 1.$$

Ἀλλὰ ἀπ' τὸ πρῶτο μέρος $(S_a \cdot \tau_{\vec{v}_1})^2 = 1$, ὁπότε $\tau^2_{\vec{v}_2} = 1$, ἄρα $\vec{v}_2 = \vec{0}$.

28. Ἄς θεωρήσουμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὶς εὐθεῖες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ποὺ περνᾶν ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β, Γ ἀντίστοιχα. Παίρνουμε τὶς ἰσοκλινεῖς $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ πρὸς τὶς διχοτόμους τῶν Α, Β, Γ ἀντίστοιχα. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ περνᾶν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο οἱ $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ εἶναι οἱ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ νὰ περνᾶν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. (11-12.2, Α' τεῦχος Γεωμετρίας).

Ἀπόδειξη:



Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδειχτῆ ἡ σχέση:

$$S_{\varepsilon_1'}[A\Gamma] = S_{AB} \cdot S_{\varepsilon_1} S_{A\Gamma}[A\Gamma]$$

καὶ ἀπ' ἐδῶ:

$$S_{\varepsilon_1'} = S_{AB} \cdot S_{\varepsilon_1} S_{A\Gamma} \qquad (1)$$

Μὲ κυκλικὴ ἐναλλαγὴ στὴν (1) καὶ μὲ πολλαπλασιασμὸ κατὰ μέλη ἔχουμε $[S_{\varepsilon_3'} \cdot S_{\varepsilon_2'} \cdot S_{\varepsilon_1'}]^2 = [S_{\Gamma A} \cdot S_{\varepsilon_3} S_{\Gamma B} \cdot S_{B\Gamma} \cdot S_{\varepsilon_2} S_{BA} S_{AB} \cdot S_{\varepsilon_1} \cdot S_{A\Gamma}]^2 =$
$= S_{\Gamma A}[S_{\varepsilon_3} S_{\varepsilon_2} S_{\varepsilon_1}]^2 S_{A\Gamma}$.

Ἂν τώρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο, θὰ εἶναι

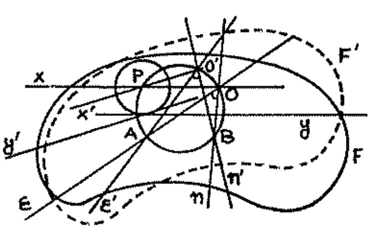
$$[S_{\varepsilon_3} \cdot S_{\varepsilon_2} \cdot S_{\varepsilon_1}]^2 = I.$$

Ἄρα καὶ $[S_{\varepsilon_3'} \cdot S_{\varepsilon_2'} \cdot S_{\varepsilon_1'}]^2 = I$, δηλαδὴ οἱ $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ περνᾶν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

29. Ἂν σχῆμα F μετατοπίζεται σ' ἕνα ἐπίπεδο ἔτσι ποὺ δύο ὁρισμένες ὄχι παράλληλες εὐθεῖες του ε καὶ η νὰ περνᾶν ἀπὸ δύο δοσμένα σημεῖα Α καὶ Β, τότε τυχαία εὐθεία τοῦ F περνᾶ ἀπὸ σταθερὸ σημεῖο ἢ ἐφάπτεται μὲ σταθερὴ περιφέρεια.

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι Ο=ε∩η. Τὸ Ο βρίσκεται σὲ τόξο χορδῆς ΑΒ ποὺ δέχεται γωνία φ=(ε,η)=σταθερό.



Ἄς εἶναι F' ἡ νέα θέση τοῦ F καί ε', η' οἱ θέσεις τῶν ε, η.

Ἄν τώρα πάρουμε μιά ὁρισμένη εὐθεία x τοῦ F πού νά περνᾶ ἀπ' τό O, ἡ γωνία τῶν x, ε εἶναι σταθερή καί ἄς τήν ὀνομάσουμε θ. Ἄν P τό σημεῖο τομῆς τῆς περιφέρειας AOB μέ τήν x καί P' τό σημεῖο τομῆς τῆς περιφέρειας AOB μέ τήν x', θά ἔχουμε

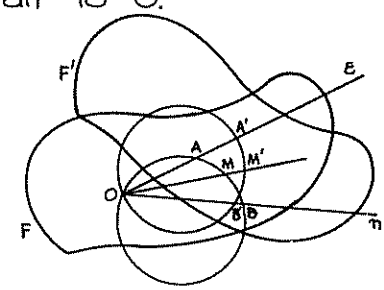
$$P'\widehat{O}A = P\widehat{O}A = \theta.$$

Δηλαδή $P' \equiv P$, πού σημαίνει ὅτι ἡ x κατά τήν κίνηση περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο P.

Ἄν τώρα πάρουμε σταθερή εὐθεία y τοῦ F πού νά μή περνᾶ ἀπ' τό O καί φέρουμε ἀπό τό O τήν παράλληλη εὐθεία x πρός τήν y, τότε ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου τομῆς P τῆς x μέ τήν περιφέρεια AOB ἀπό τήν y εἶναι σταθερή. Δηλαδή ἡ y ἐφάπτεται σταθερῆς περιφέρειας (P, a), ὅπου a ἡ ἀπόσταση τοῦ P ἀπό τήν εὐθεία y.

30. Ἄν τό σχῆμα F μετατοπίζεται στό ἐπίπεδο ἔτσι πού δυό ὁρισμένα σημεῖα του A, B νά διαγράφουν δυό σταθερές εὐθεῖες ε καί η πού τέμνονται στό O, τότε ὑπάρχει κύκλος τοῦ F τέτοιος πού ὅλα τά σημεῖα του νά διαγράφουν εὐθεῖες πού περνᾶν ἀπ' τό O.

Ἀπόδειξη:



Ἄς εἶναι F' μιά νέα θέση τοῦ F καί A', B' δυό νέες θέσεις τῶν A, B πάνω στίς ε, η ἀντίστοιχα.

Εἶναι φανερό ὅτι $AB = A'B'$, ἐπειδή ἡ κίνηση εἶναι μετατόπιση.

Παίρνουμε ἕνα σταθερό σημεῖο M τοῦ κύκλου AOB καί ἄς εἶναι M' τό ἀντίστοιχό του στόν κύκλο $A'OB'$. Θά εἶναι

$$A\widehat{O}M = A'\widehat{O}M'.$$

Ἄρα τά σημεῖα M, M' βρίσκονται σέ μιά εὐθεία πού περνᾶ ἀπ' τό O, δηλαδή κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου AOB

διαγράφει μιά σταθερή εὐθεία πού περνᾶ ἀπ' τό O.

31. Στίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί πρός τό ἐξωτερικό του κατασκευάζουμε ἰσοσκελῆ τρίγωνα $BA_1\Gamma, \Gamma B_1 A, A\Gamma_1 B$ μέ γωνίες κορυφῆς ἀντίστοιχα τίς A_1, B_1, Γ_1 καί ἔτσι πού $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=360°$. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι ἴσες μέ $\frac{1}{2}\hat{A}_1, \frac{1}{2}\hat{B}_1, \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_1$.

32. Παίρνουμε ἕνα ὀρθοκεντρικό τετράπλευρο (ἄσκ. 571, Α' τεῦχος Γεωμετρίας) $A_1A_2A_3A_4$. Εἶναι γνωστό πώς οἱ κύκλοι $(O_1,R_1)=(A_2A_3A_4)$, $(O_2,R_2)=(A_1A_3A_4)$, $(O_3,R_3)=(A_1A_2A_4)$, $(O_4,R_4)=$ $=(A_1A_2A_3)$ εἶναι ἴσοι. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ὑπάρχει σημεῖο O στό ἐπίπεδο τέτοιο πού:

$$O_1O_2O_3O_4=S_{(O)}[A_1A_2A_3A_4].$$

33. Τό τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (O,R). Ἄς εἶναι H_i τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου $A_\kappa A_\lambda A_\mu$, ὅπου i,κ,λ,μ διαφορετικά μεταξύ τους ἀπό 1 ὥς 4. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι:

(α) ὑπάρχει σημεῖο H στό ἐπίπεδο, τέτοιο πού

$$H_1H_2H_3H_4=S_{(H)}[A_1A_2A_3A_4],$$

(β) τά τετράπλευρα $A_\kappa A_\lambda H_i H_j$, ὅπου κ,λ,i,j διαφορετικά μεταξύ τους ἀπό 1 ὥς 4, εἶναι ἐγγράψιμα σέ κύκλους ἴσους μέ τόν (O,R).

34. Ἄς πάρουμε σ' ἕνα ἐπίπεδο τά σημεῖα $O_1,O_2,\ldots,O_\nu$. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι

$$[S_{(O_\nu)}\cdot S_{(O_{\nu-1})}\cdots S_{(O_1)}]^2=\tau_{\vec{x}}$$

ὅπου: ὅταν $\nu=2\kappa$ $\vec{x}=4(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_4}+\cdots+\overrightarrow{O_{2\kappa-1}O_{2\kappa}})$,

ὅταν $\nu=2\kappa+1$ $\vec{x}=\vec{0}$.

35. Ἄν $O_1,O_2,\ldots,O_{2\kappa}$ σημεῖα σ' ἕνα ἐπίπεδο καί AB ἕνα εὐθ. τμῆμα, νά ἀποδειχτῆ ὅτι:

(α) $B=S_{(O_{2\kappa})}\cdot S_{(O_{2\kappa-1})}\cdots S_{(O_1)}\cdot S_{(O_{2\kappa})}\cdots S_{(O_1)}[A]$,

(β) $A\,S_{(O_{2\kappa})}\cdot S_{(O_{2\kappa-1})}\cdots S_{(O_1)}[A]=B\,S_{(O_{2\kappa})}\cdot S_{(O_{2\kappa-1})}\cdots S_{(O_1)}[B]$.

36. Ἄς εἶναι $O_1, O_2, \dots, O_K$ σημεῖα σ' ἕνα ἐπίπεδο. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ τύποι:

1. $S_{O_{2n+1}} S_{O_{2n}} \cdots S_{O_1} = S_O$,
2. $S_{O_{2n+2}} S_{O_{2n+1}} \cdots S_{O_1} = S_{O_{2n+2}} S_O$ (μεταφορά)

Ἀκόμα, ἄν $S_{O_n} S_{O_{n-1}} \cdots S_{O_1} = I$ n ἄρτιος;

37. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό γινόμενο $\tau_{\vec{v}} S_A$ εἶναι συμμετρία πρός κέντρο Κ, δηλαδή $\tau_{\vec{v}} S_A = S_K$. Νά βρεθῆ τό σημεῖο Κ.

38. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εὐθεῖες $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \Leftrightarrow S_\gamma S_\delta S_\beta S_\alpha =$ μεταφορά.

39. Ἡ ἐξίσωση $S_\alpha S_h S_\alpha S_\beta S_\gamma S_h S_\beta S_\gamma = I$ πρός h, ἔχει λύση μόνον ὅταν $h = h_a$, ὅπου α, β, γ οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ.

40. Ἄν οἱ εὐθεῖες α, β, γ δέν περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο τό γινόμενο $[S_\alpha S_\beta S_\gamma]^2$ εἶναι μεταφορά.

41. Ἄν α, β, γ τρεῖς τυχαῖες εὐθεῖες, τότε

$$(S_\alpha S_\beta S_\gamma)^2 (S_\beta S_\gamma S_\alpha)^2 = (S_\beta S_\gamma S_\alpha)^2 (S_\alpha S_\beta S_\gamma)^2$$

42. Ἄν Α σημεῖο καί α εὐθεία:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow (S_A S_\alpha)^2 = I.$$

43. Ἄν $S_\alpha S_\beta S_\gamma S_K S_\gamma S_\beta S_\alpha S_K = I$, ὅπου α, β, γ εὐθεῖες σ' ἕνα ἐπίπεδο καί Κ ἕνα τυχαῖο σημεῖο στό ἴδιο ἐπίπεδο, τότε οἱ α, β, γ περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο.

44. Ἄν α, β, γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ:

$$S_\alpha (S_\beta S_\alpha S_\gamma)^2 S_\alpha (S_\gamma S_\alpha S_\beta)^2 = I \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}.$$

45. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι τό ἰσοτομικό σημείου Ρ γιά τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ $S_A P \widehat{S_B} P S_\Gamma P$.

46. Ἂν τρία σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται σὲ εὐθεία, τὸ ἴδιο θὰ συμβαίνῃ καὶ μὲ τὰ ἰσοτομικά τους.

47. Σὲ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$R_{(\Gamma,2\hat{\Gamma})}\cdot R_{(B,2\hat{B})}\cdot R_{(A,2\hat{A})}=I.$$

48. Σὲ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$R_{(\Gamma,\hat{\Gamma})}\cdot R_{(B,\hat{B})}\cdot R_{(\Gamma,\hat{\Gamma})}=S_{I_\beta},$$

ὅπου I_β τὸ σημεῖο ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (Ι) μὲ τὴν πλευρά β.

49. Ἂν δοθοῦν δύο στροφὲς $R_{(O_1,\varphi_1)}$, $R_{(O_2,\varphi_2)}$ νὰ βρεθῆ τὸ Α ποὺ $R_{(O_1,\varphi_1)}A=R_{(O_2,\varphi_2)}A$.

50. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι τὸ κέντρο τῆς στροφῆς

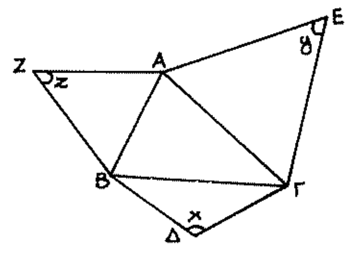
$$R_{(O_1,\varphi_1)}\cdot R_{(O_2,\varphi_2)}\cdot R^{-1}_{(O_1,\varphi_1)}$$

βρίσκεται στὴν εὐθεία O_1O_2.

51. Γιὰ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ νὰ ὑπολογίσετε τὸ γινόμενο

$$R_{(B,-\hat{B})}\cdot R_{(A,-\hat{A})}\cdot R_{(B,\hat{B})}\cdot R_{(A,\hat{A})}.$$

52. Ἂν δοθοῦν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ γωνίες x, y, z, νὰ βρεθῆ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ὅπου τὰ τρίγωνα $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{\Gamma E A}$, $\widehat{AZB}$ εἶναι ἰσοσκελῆ μὲ γωνίες κορυφῆς $\hat{\Delta}=\hat{x}$, $\hat{E}=\hat{y}$, $\hat{Z}=\hat{z}$.



53. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ στὶς πλευρές του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ φέρνουμε ἀντίστοιχα τὶς κάθετες $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Ἂς εἶναι $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ τὰ συμμετρικά τους πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀντίστοιχα. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι:

(α) $S_{\varepsilon_1'} = S_B \cdot S_{\varepsilon_1} \cdot S_\Gamma$,

(β) $[S_{\varepsilon_3'} \cdot S_{\varepsilon_2'} \cdot S_{\varepsilon_1'}]^2 = S_{A'} \cdot [S_{\varepsilon_3} \cdot S_{\varepsilon_2} \cdot S_{\varepsilon_1}]^2 \cdot S_A$.

(γ) Ἀποδεῖξτε ἀκόμα ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ περνᾶν οἱ $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, εἶναι οἱ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ νὰ περνᾶν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο (Ἄσκ. 89 Α' τεῦχος Γεωμετρίας).

54. Ἄν ἕνα σχῆμα F κινεῖται σ' ἕνα ἐπίπεδο ἔτσι πού δυὸ ὁρισμένες καὶ ὄχι παράλληλες εὐθεῖες του ε καὶ η νὰ ἐφάπτωνται μὲ δυὸ σταθερὲς περιφέρειες (A,ρ), (B,R) τοῦ ἐπιπέδου, τότε τυχαία εὐθεία (ὁρισμένη) τοῦ F, περνᾶ ἀπὸ σταθερὸ σημεῖο ἢ ἐφάπτεται μὲ σταθερὴ περιφέρεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

5.1. Ἂς πάρουμε τὸ σημεῖο Ο καὶ τὸν πραγματικὸ ἀριθμὸ κ. Σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμε τὸ σημεῖο Μ′ ἀπὸ τὴν σχέση

$$\overline{OM'} = \kappa \cdot \overline{OM}.$$

Συμβολισμός: $M' = H_{(O,\kappa)}[M]$.

Ὁ μετασχηματισμὸς $H_{(O,\kappa)}$ λέγεται ὁμοιοθεσία μὲ κέντρο Ο καὶ λόγο ὁμοιοθεσίας κ καὶ τὸ σημεῖο Μ′ ὁμοιόθετο τοῦ Μ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$.

Ἂν $\kappa > 0$ τὸ σημεῖο Μ′ βρίσκεται στὴν ἡμιευθεία ΟΜ, ἂν $\kappa < 0$ στὴν ἀντίθετη ἡμιευθεία.

Ἂν τὸ σχῆμα F′ εἶναι ὁμόλογο τοῦ F σ' αὐτὴ τὴν ὁμοιοθεσία τότε θὰ λέγεται ὁμοιόθετο τοῦ F.

5.2. Τὸ ζευγάρι $(\{H_O\}, \cdot)$, ὅπου $\{H_O\}$ τὸ σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν κέντρου Ο καὶ "·" τὸ γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν, εἶναι ἀβελιανὴ ὁμάδα.

Ἀπόδειξη:

(α) $H_{(O,1)} = I$

(β) $H^{-1}_{(O,\kappa)} = H_{(O,\kappa^{-1})}$

(γ) $H_{(O,\kappa_1)} \cdot H_{(O,\kappa_2)} = H_{(O,\kappa_1\kappa_2)}$

Γιατὶ ἂν $\mu = H_{(O,\kappa_1)}[M] \Longleftrightarrow \overline{O\mu} = \kappa_1 \overline{OM}$

καὶ ἂν $M' = H_{(O,\kappa_2)}[\mu] \Longleftrightarrow \overline{OM'} = \kappa_2 \overline{O\mu}$.

Ἄρα $M' = H_{(O,\kappa_2)}[H_{(O,\kappa_1)}[M]]$. Ἀλλὰ $\overline{OM'} = \kappa_2 \overline{O\mu} = \kappa_1\kappa_2 \overline{OM} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow M' = H_{(O,\kappa_1\kappa_2)}[M]$.

Ἀπ' αὐτὸ βγάζουμε τὸ συμπέρασμα ὅτι:

$$H_{(O,\kappa_2)} \cdot H_{(O,\kappa_1)} = H_{(O,\kappa_1\kappa_2)}.$$

Ἡ τελευταία σχέση μπορεῖ ἀκόμα νά γραφτῆ

$$H_{(0,\kappa_1)} \cdot H_{(0,\kappa_2)} = H_{(0,\kappa_2)} \cdot H_{(0,\kappa_1)} = H_{(0,\kappa_1\kappa_2)}.$$

Ἄρα ἡ ὁμάδα εἶναι ἀβελιανή.

5.3. Ἰδιότητες.

(α) $H_{(0,-1)} = S_{(0)}$.

(β) $O = H_{(0,\kappa)}[O]$, δηλαδή τό κέντρον ὁμοιοθεσίας εἶναι διπλό σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ.

(γ) $H_{(0,\kappa)} \cdot S_{(0)} = H_{(0,-\kappa)}$.

Γιατί $S_{(0)} = H_{(0,-1)}$, ἄρα $H_{(0,\kappa)} \cdot S_{(0)} = H_{(0,\kappa)} \cdot H_{(0,-1)} = H_{(0,-\kappa)}$.

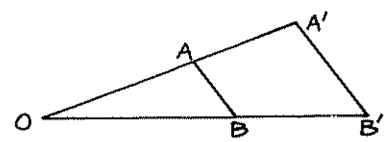
(δ) Ἄν A, B δύο σημεῖα στό ἐπίπεδο καί A', B' τά ὁμόλογά τους κατά τήν ὁμοιοθεσία $H_{(0,\kappa)}$ θά εἶναι

$$\overrightarrow{A'B'} = \kappa \cdot \overrightarrow{AB}$$

Ἀπόδειξη:

θά εἶναι $\overline{OA'} = \kappa \cdot \overline{OA}$

$\overline{OB'} = \kappa \cdot \overline{OB}$.



Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ, θά ἔχουμε $AB \parallel A'B'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \kappa$. Ἄρα $\overrightarrow{A'B'} = \kappa \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ἀκόμα προκύπτει ἀπ' τήν προηγούμενη πρόταση ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία διατηρεῖ τήν διάταξη πάνω σέ μιά εὐθεία.

5.4. Ἡ ὁμοιοθεσία στά ἁπλᾶ σχήματα.

(α) Ὁμοιόθετον εὐθείας.

Ἄς πάρουμε μιάν εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο O ἔξω ἀπ' τήν ε. Ἄν ε' τό ὁμοιόθετο τῆς ε κατά τήν ὁμοιοθεσία $H_{(0,\kappa)}$, θά εἶναι

$$\varepsilon' = H_{(0,\kappa)}[\varepsilon].$$

Ἄς εἶναι $A \in \varepsilon$ καί $A' = H_{(0,\kappa)}[A]$. Ἄν τώρα πάρουμε ἕνα σημεῖο $M \in \varepsilon$ θά ἔχουμε $M' = H_{(0,\kappa)}[M]$ καί ἀκόμα

$$\overrightarrow{A'M'} = \kappa \cdot \overrightarrow{AM}.$$

Δηλαδή τό σημεῖο M' βρίσκεται σέ μιάν εὐθεία παράλληλη ἀπό τό A' πρός τήν $ε$. Ἀντίστροφα κάθε σημεῖο $M_1' \in ε'$ ἔχει τό ὁμόλογό του M_1 κατά τήν ἀντίστροφη ὁμοιοθεσία πάνω στήν $ε$. Δηλαδή $M_1' = H_{(O,κ)}[M_1]$. Ἄρα λοιπόν τό σχῆμα $ε'$ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλη ἀπό τό A' πρός τήν $ε$.

Ἄν $O \in ε$ τότε εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι $ε' \equiv ε$.

(β) Ὁμοιόθετο περιφερείας.

Ἄς θεωρήσουμε τήν περιφέρεια $(Λ,R)$ καί ἕνα σημεῖο O στό ἐπίπεδό της. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία $H_{(O,κ)}$ μετασχηματίζει τήν περιφέρεια στό σχῆμα F. Δηλαδή

$$F = H_{(O,κ)}[(Λ,R)].$$

Θά προσδιορίσουμε τό σχῆμα F.

Ἄς εἶναι $Λ' = H_{(O,κ)}[Λ]$. Γιά κάθε $M \in (Λ,R)$ ἔχουμε $M' = H_{(O,κ)}[M]$ καί $\overrightarrow{Λ'M'} = κ \cdot \overrightarrow{ΛM}$ δηλαδή $Λ'M' = κR$. Ἄρα $M' \in (Λ', κR)$.

Ἀντίστροφα κάθε σημεῖο $M_1' \in (Λ', κR)$ μέ τήν ὁμοιοθεσία $H^{-1}_{(O,κ)}$ μετασχηματίζεται στό σημεῖο $M_1 \in (Λ,R)$. Ἄρα $M_1' = H_{(O,κ)}[M_1]$. Ἰσχύει λοιπόν καί τό ἀντίστροφο, ἄρα

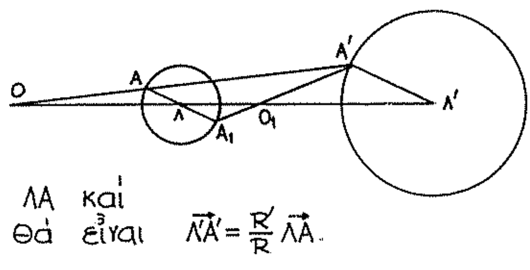
$$F = (Λ', κR),$$

ὁπότε

$$(Λ', κR) = H_{(O,κ)}[(Λ,R)].$$

Δηλαδή τό ὁμοιόθετο περιφερείας $(Λ,R)$ εἶναι πάλι περιφέρεια μέ κέντρο τό ὁμοιόθετο τοῦ κέντρου τῆς $(Λ,R)$ καί ἀκτίνα τήν ἀκτίνα τῆς $(Λ,R)$ πολλαπλασιασμένη ἐπί τόν λόγο ὁμοιοθεσίας.

Ὁμοιοθεσίες πού μετασχηματίζουν δυό ἄνισους κύκλους μεταξύ τους.



Ἄς θεωρήσουμε δυό κύκλους $(Λ,R)$ καί $(Λ',R')$, $R \neq R'$ καί δυό παράλληλες ἀκτίνες $ΛA$ καί $Λ'A'$ μέ τήν ἴδια φορά. Θά εἶναι $\overrightarrow{Λ'A'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{ΛA}$.

Ἄς εἶναι O τό σημεῖο τομῆς τῶν $AA', \Lambda\Lambda'$. Τό σημεῖον O ὅπως διαπιστώνεται εὔκολα εἶναι σταθερό ἀνεξάρτητο ἀπό τήν διεύθυνση τῶν $\Lambda A, \Lambda' A'$ καί ἀκόμα:

$$\Lambda' A' = H_{(0,\frac{R'}{R})}[\Lambda A].$$

Ἄρα λοιπόν θἄναι καί

$$(\Lambda', R') = H_{(0,\frac{R'}{R})}[(\Lambda, R)].$$

Ἄν ἀκόμα ἀντί τοῦ A πάρουμε τό ἀντιδιαμετρικό του A_1 καί $A_1A' \cap \Lambda\Lambda' = O_1$, παρόμοια βρίσκουμε ὅτι:

$$(\Lambda', R') = H_{(0,-\frac{R'}{R})}[(\Lambda, R)].$$

Συμπέρασμα: Ἄν δοθοῦν δυό κύκλοι (Λ, R) καί (Λ', R') μποροῦμε νά θεωρήσουμε τόν ἕναν ἀπ' τούς δυό ὁμοιόθετο τοῦ ἄλλου κατά δύο ὁμοιοθεσίες μέ ἀντίθετους λόγους ὁμοιοθεσίας. Τό κέντρον ὁμοιοθεσίας μέ θετικό λόγο λέγεται ἐξωτερικό κέντρον ὁμοιοθεσίας. Τό κέντρον ὁμοιοθεσίας μέ ἀρνητικό λόγο λέγεται ἐσωτερικό κέντρον ὁμοιοθεσίας.

Ἄν ὁ ἕνας κύκλος εἶναι ἔξω ἀπ' τόν ἄλλο τότε τό ἐξωτερικό κέντρον ὁμοιοθεσίας εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων καί τό ἐσωτερικό τό σημεῖο τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων.

(γ) Ὁμοιόθετο μιᾶς καμπύλης c.

Ἄς εἶναι c' τό ὁμοιόθετο μιᾶς καμπύλης c κατά τήν ὁμοιοθεσία $H_{(0,\kappa)}$. Ἄν $(P, M) \in c$ καί (P', M') ἀντίστοιχα τά ὁμόλογά τους καί εἶναι:

$$\overline{MP} = \kappa \cdot \overline{M'P'}$$

Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία τῶν σημείων $P_i \to M$ τῆς c. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν δοθῆ $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει n_0 τέτοιο πού γιά κάθε $n > n_0$

$$|\overline{MP_n}| < \varepsilon.$$

Ἀντίστοιχα θά ἔχουμε καί ὅτι

$$|M'P'_n| < \frac{\varepsilon}{|\kappa|}$$

Δηλαδή ὅταν τό σημεῖο $P_i \to M$ τό σημεῖο $P'_i \to M'$. Ἡ εὐθεῖα MP_i τείνει πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς c στό M, ὅπως καί ἡ $M'P'_i$ πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς c' στό M'. Ἐπειδή ὅμως $MP_i \| M'P'_i$ συμπεραίνουμε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες στά M, M' εἶναι παράλληλες.

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ἀκόμα ὅτι ἄν S τό μῆκος τόξου τῆς c καί S' τό ἀντίστοιχο μῆκος τόξου τῆς c' θά εἶναι

$$S' = \kappa S.$$

Αὐτό γιατί τά S, S' μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε σάν ὅρια ὁμοιόθετων πολυγωνικῶν γραμμῶν.

(δ) Διατήρηση τῶν γωνιῶν στήν ὁμοιοθεσία.

Ἄς εἶναι M τό σημεῖο τομῆς δύο καμπύλων c, c_1. Εἶναι γνωστόν ὅτι γωνία τῶν c, c_1 στό A λέμε τήν ὄχι ἀμβλεῖα γωνία τῶν ἐφαπτομένων τους στό A. Μετά ἀπ' αὐτό ἄν c', c'_1, A' τά ὁμόλογα τῶν c, c_1, A κατά τήν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$, βλέπουμε, ἄν βασιστοῦμε καί στήν προηγούμενη παράγραφο, ὅτι ἡ γωνία τῶν δύο καμπύλων διατηρεῖται κατά τήν ὁμοιοθεσία τους στά ὁμόλογα σημεῖα τομῆς τους.

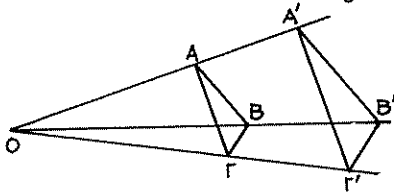
(ε) Ὁμοιόθετο τριγώνου.

Ἡ ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$ μετασχηματίζει ἕνα τρίγωνο $AB\Gamma$ σέ ὅμοιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ μέ τέτοιο τρόπο πού τά A', B', Γ' νά εἶναι ὁμόλογα τῶν A, B, Γ ἀντίστοιχα.

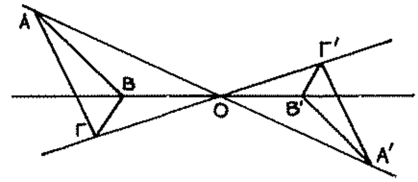
Ἀντίστροφα: Ἄν $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$ δυό τρίγωνα μέ παράλληλες ἀντίστοιχα πλευρές, δηλαδή $AB \| A'B'$, $B\Gamma \| B'\Gamma'$ καί $\Gamma A \| \Gamma'A'$ ὑπάρχει μία καί μόνον ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$ πού

$$A'B'\Gamma' = H_{(O,\kappa)}[AB\Gamma].$$

Κέντρον ὁμοιοθεσίας εἶναι τό κοινό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν πού συνδέουν τίς ὁμόλογες κορυφές. Ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητας



$A'B'\Gamma' = H_{(O,\frac{a'}{a})}[AB\Gamma]$



$A'B'\Gamma' = H_{(O,-\frac{a'}{a})}[AB\Gamma]$

5.5. Γινόμενα ὁμοιοθεσιῶν πρὸς διαφορετικὰ κέντρα.

Εἴδαμε ὅτι τὸ ζευγάρι $(\{H_0\},\cdot)$ ἀποτελεῖ ὁμάδα, δηλαδὴ τὸ γινόμενο δύο ὁμοιοθεσιῶν πρὸς τὸ ἴδιο κέντρο O εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ κέντρο O, δηλαδὴ

$$H_{(O,\kappa_2)}\cdot H_{(O,\kappa_1)} = H_{(O,\kappa_1\kappa_2)}.$$

Ἂς θεωρήσουμε τώρα δύο ὁμοιοθεσίες $H_{(O,\kappa)}$ καὶ $H_{(O_1,\kappa_1)}$ μὲ $O \neq O_1$ καὶ $\kappa, \kappa_1 \neq 1$. Ἂν A, B δύο σημεῖα, θὰ ἔχουμε

$$\alpha\beta = H_{(O,\kappa)}[AB] \Rightarrow \vec{\alpha\beta} = \kappa\cdot\vec{AB}, \text{ ἀκόμα}$$

$$A'B' = H_{(O_1,\kappa_1)}[\alpha\beta] \Rightarrow \vec{A'B'} = \kappa_1\cdot\vec{\alpha\beta}, \text{ ὁπότε}$$

$$\vec{A'B'} = \kappa_1\kappa\,\vec{AB}.$$

Δηλαδὴ τὰ εὐθ. τμήματα A'B', AB εἶναι ὁμοιόθετα μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας $O' = AA' \cap BB'$ καὶ λόγο $\kappa_1\cdot\kappa$.

Ἂν τώρα πάρουμε ἕνα σημεῖο M καὶ τὰ ὁμόλογά του κατὰ τὶς $H_{(O,\kappa)}, H_{(O_1,\kappa_1)}$ θὰ ἔχουμε

$$\mu = H_{(O,\kappa)}[M], \quad M' = H_{(O_1,\kappa_1)}[\mu],$$

δηλαδὴ $\vec{M'A'} = \kappa\cdot\kappa_1\,\vec{MA}$. Ἀλλὰ ἡ εὐθεία MM' μπορεῖ εὔκολα νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι περνᾶ ἀπ' τὸ O' (τὰ τρίγωνα AMB, A'M'B' ἔχουν πλευρὲς παράλληλες). Ἄρα, λοιπόν, τὰ σημεῖα M, M' εἶναι ὁμόλογα στὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O',\kappa'=\kappa\kappa_1)}$, ὁπότε

$$H_{(O_1,\kappa_1)}\cdot H_{(O,\kappa)} = H_{(O',\kappa\kappa_1)}.$$

Τὸ σημεῖο O' βρίσκεται στὴν εὐθεία OO_1 γιατὶ εἶναι ἀναλλοίωτη κατὰ τὸ γινόμενο $H_{(O_1,\kappa_1)}\cdot H_{(O,\kappa)}$.

θά προσδιορίσουμε μέ ἀκρίβεια τήν θέση τοῦ O'.

$$O \qquad\qquad O_1 \qquad\qquad O'$$

Ἄς εἶναι $P=H_{(O,\kappa)}[O']$ καί $O'=H_{(O_1,\kappa_1)}[P]$. Θά εἶναι

$$\overline{OP}=\kappa\overline{OO'} \qquad (1)$$
$$\overline{O_1O'}=\kappa_1\overline{O_1P} \qquad (2).$$

Ἀλλά κατά τό θεώρημα τοῦ Chasles $\overline{OO_1}=\overline{OP}+\overline{PO_1}$ (3) καί $\overline{OO'}=\overline{OO_1}+\overline{O_1O'}$ (4). Ἀπό τήν (3) ἔχουμε τό $\overline{O_1P}$ καί ἀπό τήν (4) τό $\overline{O_1O'}$. Ἀντικαθιστοῦμε στήν (2)

$$(3),(4),(2)\Rightarrow \overline{OO'}-\overline{OO_1}=\kappa_1(\overline{OP}-\overline{OO_1}) \quad (5)$$

Ἀπό τήν (1) ἀντικαθιστοῦμε τό $\overline{OP}$ στήν (5)

$$(1),(5)\Rightarrow \overline{OO'}-\overline{OO_1}=\kappa_1(\kappa\overline{OO'}-\overline{OO_1}).$$

Τελικά ἔχουμε

$$\overline{OO'}=\frac{(1-\kappa_1)\overline{OO_1}}{1-\kappa\kappa_1} \quad (6)$$

ἀφοῦ $\kappa\kappa_1\neq 1$.

Ἀκόμα ἄν στήν (6) ἀντικαταστήσουμε τό $\overline{OO_1}$ ἀπό τήν (4) βρίσκουμε

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{O_1O'}}=-\frac{1-\kappa_1}{\kappa_1(1-\kappa)} \quad (7)$$

ἀφοῦ $\kappa\cdot\kappa_1\neq 1$.

Παρατηρήσεις:

(1) Ἄν $\kappa=1$ ἤ $\kappa_1=1$, τότε μιά ἀπ' τίς ὁμοιοθεσίες εἶναι ταυτότητα.

(2) Ἄν $\kappa\kappa_1=1$ θά εἶναι $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ δηλαδή μεταφορά. Θά προσδιορίσουμε τό διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ τῆς μεταφορᾶς.

Ἄς εἶναι $A'B'=\tau_{\vec{\upsilon}}[AB]$. Ἄν P τό ὁμόλογο τοῦ O κατά τήν $H_{(O_1,\kappa_1)}$ ἔχουμε $P=H_{(O_1,\kappa_1)}[O]$ ἤ ἀκόμα $P=H_{(O_1,\kappa_1)}[H_{(O,\kappa)}[O]]$ ἄρα $P=\tau_{\vec{\upsilon}}[O]$, ὁπότε

$$\overrightarrow{OP}=\vec{\upsilon}.$$

Ἀλλά $\overline{O_1P}=\kappa_1\overline{O_1O}$ καί ἀπό τό θεώρημα τοῦ Chasles εἶναι $\overline{O_1P}=\overline{OP}-\overline{OO_1}$. Ἀπό τίς δύο τελευταῖες σχέσεις

$$(\overline{OP}-\overline{OO_1})=\kappa_1\overline{O_1O}\Rightarrow\overline{OP}=\vec{\upsilon}=(1-\kappa_1)\overline{OO_1}=(1-\tfrac{1}{\kappa})\overline{OO_1}.$$

(3) Τὸ ζευγάρι $(\{H\},\cdot)$ ὅπου $\{H\}$ τὸ σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν εἶναι ὁμάδα. Αὐτὸ εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὶς 5.2 καὶ 5.5. Ἡ ὁμάδα ὅμως αὐτή, ὅπως εὔκολα διαπιστώνουμε ἀπ' τὸν τύπο 7 σ' αὐτὴ τὴν παράγραφο, δὲν εἶναι ἀβελιανὴ γιατὶ οἱ $H_{(O_1,\kappa_1)}\cdot H_{(O,\kappa)}$ καὶ $H_{(O,\kappa)}\cdot H_{(O_1,\kappa_1)}$ δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο.

5.6. Τὸ γινόμενο ὁμοιοθεσίας ἐπὶ μεταφορά.

Ἂς πάρουμε τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$ καὶ τὴν μεταφορὰ $\tau_{\vec{v}}$. Ἂν A,B δύο σημεῖα καὶ α,β τὰ ὁμοιόθετά τους κατὰ τὴν $H_{(O,\kappa)}$ θὰ εἶναι:

$$\overrightarrow{\alpha\beta} = \kappa\,\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

Ἂς εἶναι ἀκόμα A',B' τὰ ὁμόλογα τῶν α,β κατὰ τὴν μεταφορὰ $\tau_{\vec{v}}$. Θὰ ἔχουμε

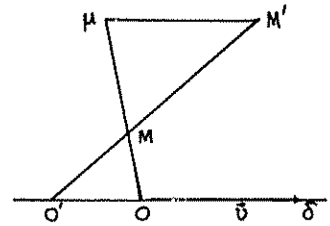
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\alpha\beta} \quad (2)$$

$(1),(2) \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \kappa\,\overrightarrow{AB}$.

Ἂν τώρα M' τὸ ὁμόλογο σημείου M κατὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς $H_{(O,\kappa)}$, $\tau_{\vec{v}}$ διαδοχικὰ θὰ εἶναι πάλι:

$$\overrightarrow{A'M'} = \kappa\cdot\overrightarrow{AM}.$$

Δηλαδὴ τὸ σημεῖο M' προκύπτει ἀπ' τὸ M μὲ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O',\kappa)}$, ὅπου $O' = A'A \cap B'B$.



Τὸ σημεῖο O' βρίσκεται εὔκολα, γιατὶ ἡ εὐθεία δ ἡ παράλληλη πρὸς τὸ $\vec{v}$ ἀπὸ τὸ O εἶναι ἀναλλοίωτη κατὰ τὸν μετασχηματισμό.

Ἄρα $\overrightarrow{OO'} = -\dfrac{\vec{v}}{\kappa-1}$.

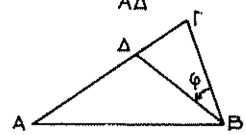
Παρόμοια συμπεραίνουμε ὅτι τὸ γινόμενο μεταφορᾶς ἐπὶ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ τὸν ἴδιο λόγο κ καὶ κέντρο ποὺ βρίσκεται στὴν ἀπ' τὸ O παράλληλη πρὸς τὸ $\vec{v}$. Γενικὰ $\tau_{\vec{v}}\cdot H_{(O,\kappa)} \neq H_{(O,\kappa)}\cdot\tau_{\vec{v}}$.

5.7. Τὸ γινόμενο ὁμοιοθεσίας $H_{(O,\kappa)}$ ἐπὶ στροφὴν $R_{(O_1,\varphi)}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο ὁμοιοθεσίας ἐπὶ στροφὴν πρὸς τὸ ἴδιο κέντρο O'. Ὁ λόγος τῆς νέας ὁμοιοθεσίας εἶναι κ

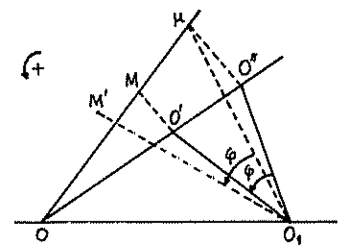
καὶ ἡ γωνία τῆς στροφῆς φ. Δηλαδὴ

$$R_{(O_1,\varphi)} H_{(O,\kappa)} = R_{(O',\varphi)} H_{(O',\kappa)}.$$

Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι εἶναι εὔκολο νὰ κατασκευάσουμε τρίγωνο ΑΒΓ ὅπου Δ∈ΑΓ καὶ νὰ εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \kappa$, $ΒΓ = ΒΔ$, $Γ\hat{Β}Δ = \varphi$. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσουμε τυχαῖο ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΓΒΔ μὲ $Γ\hat{Β}Δ = \varphi$. Μετὰ παίρνουμε τὸ Α μὲ τρόπο ποὺ νὰ εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \kappa$.



Κατασκευάζουμε λοιπὸν τώρα $\widehat{OO_1O''} \sim \widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{O'O_1O''} \sim \widehat{ΔΒΓ}$. Παρατηροῦμε ὅτι $O'' = H_{(O,\kappa)}[O']$, $O' = R_{(O_1,\varphi)}[O'']$. Δηλαδὴ τὸ σημεῖο O' εἶναι διπλὸ σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ $R_{(O_1,\varphi)} \cdot H_{(O,\kappa)}$. Ἂς ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι γιὰ κάποιο Μ εἶναι $\mu = H_{(O,\kappa)}[M]$, $M' = R_{(O_1,\varphi)}[\mu]$. Ἄρα $O'M' = R_{(O_1,\varphi)}[H_{(O,\kappa)}[O'M]]$. Ἐπειδὴ ὅμως $\frac{O'M'}{O'M} = \frac{O'\mu}{O'M} = \kappa$ καὶ $M\hat{O'}M' = (\overrightarrow{O'\mu}, \overrightarrow{O'M'}) = \varphi$ συμπεραίνουμε ὅτι τὰ M, M' εἶναι ὁμόλογα στὸν μετασχηματισμὸ



$$R_{(O',\varphi)} \cdot H_{(O',\kappa)}.$$

Ἐπίσης ὁ μετασχηματισμὸς $H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O_1,\varphi)} = H_{(P,\kappa)} \cdot R_{(P,\varphi)}$ ὅπου P τὸ συμμετρικὸ τοῦ O' πρὸς O.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Ὁμοιότητα λέγεται κάθε μετασχηματισμὸς ποὺ μετασχηματίζει ἕνα σχῆμα σὲ ἄλλο ὅμοιο μ' αὐτό. Ἂν διατηρεῖται ὁ προσανατολισμὸς θὰ λέγεται ὁμόρροπη ὁμοιότητα, ἂν ὄχι ἀντίρροπη ὁμοιότητα.

6.1. Θεώρημα

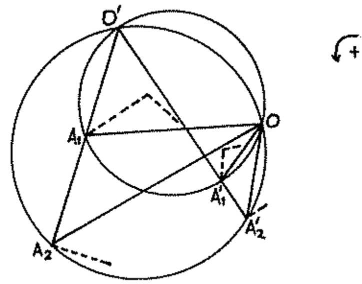
Ἂν F, F' δύο ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα ὑπάρχει:

(α) ἂν εἶναι ὅμοια προσανατολισμένα, μετασχηματισμός γινόμενον ὁμοιοθεσίας ἐπί στροφή μέ ἴδιο κέντρο πού μετασχηματίζει τό ἕνα σχῆμα στό ἄλλο·

(β) ἂν εἶναι ἀντίθετα προσανατολισμένα, μετασχηματισμός γινόμενον ὁμοιοθεσίας ἐπί στροφή μέ ἴδιο κέντρο, ἐπί συμμετρία πρός τυχαία εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου, πού μετασχηματίζει τό ἕνα σχῆμα στό ἄλλο.

Ἀπόδειξη:

(α) Ἂς εἶναι $F = A_1A_2 \cdots A_n$, $F' = A_1'A_2' \cdots A_n'$ ὅπου $F \sim F'$ (A_i' ὁμόλογο τοῦ A_i). Θεωροῦμε τούς κύκλους $A_1O'A_1'$, $A_2O'A_2'$ ὅπου $O' = A_1A_2 \cap A_1'A_2'$ καί ἂς εἶναι O τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τους. Θά εἶναι $\widehat{OA_1O'} = \widehat{OA_1'O'}$, $\widehat{OA_2O'} = \widehat{OA_2'O'}$. Ἄρα $\widehat{OA_1A_2} \sim \widehat{OA_1'A_2'}$. Ἀκόμα $A_1\widehat{O}A_1' = A_2\widehat{O}A_2' = (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1'A_2'}) = \varphi$.



Ἄρα λοιπόν

$$A_1'A_2' = R_{(O,\varphi)} \cdot H_{(O,\kappa)}[A_1A_2],$$

ὅπου $\kappa = \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2}$. Εἶναι πολύ εὔκολο πιά νά δοῦμε ὅτι:

$$F' = R_{(O,\varphi)} \cdot H_{(O,\kappa)}[F].$$

Παρατήρηση:

Μπορεῖ ἀμέσως νά ἀποδειχτῆ ὅτι $R \cdot H = H \cdot R$, ὅταν ἡ ὁμοιοθεσία καί ἡ στροφή γίνονται μέ τό ἴδιο κέντρο.

(β) Ἂν τά F, F' εἶναι ἀντίθετα προσανατολισμένα μία συμμετρία τοῦ F' πρός μιά τυχαία εὐθεία δίνει τό σχῆμα F'' καί ἔχουμε πάλι τήν περίπτωση (α).

Συμβολίζουμε $R_{(O,\varphi)} H_{(O,\kappa)} = \Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$.

6.2. (α) Εἶναι φανερόν ὅτι $\Sigma_{(O,0,1)} = I$.

(β) Ἀκόμα $\Sigma^{-1}_{(O,\varphi,\kappa)} = \Sigma_{(O,-\varphi,\kappa^{-1})}$.

(γ) Τό γινόμενο δύο ὁμορρόπων ὁμοιοτήτων (πρός τό ἴδιο ἢ ὄχι κέντρο) εἶναι ὁμόρροπη ὁμοιότητα.

Ἂν Σ_1, Σ_2 δύο ὁμόρροπες ὁμοιότητες καί F ἕνα σχῆμα στό ἐπίπεδό τους θά ἔχουμε:

$$f=\Sigma_1[F],\ F'=\Sigma_2[f].$$

Ἀλλὰ τὰ F, F' εἶναι ὅμοια, δηλαδὴ ὁμόλογα σὲ μιὰ ὁμοιότητα Σ, σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο θεώρημα. Δηλαδή:

$$\Sigma=\Sigma_2\cdot\Sigma_1.$$

Ἄρα τὸ ζευγάρι $(\{\Sigma\},\cdot)$, ὅπου $\{\Sigma\}$ τὸ σύνολο τῶν ὁμορρόπων ὁμοιοτήτων ἀποτελεῖ ὁμάδα. Ἡ ὁμάδα αὐτὴ εἶναι ἀβελιανὴ ἂν οἱ ὁμοιότητες ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο, ἂν ὄχι, τότε, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω ἡ ὁμάδα δὲν εἶναι ἀβελιανή.

Τὸ γινόμενο δύο ἀντιρρόπων ὁμοιοτήτων ἀποτελεῖ ὁμόρροπη ὁμοιότητα.

Ἀκόμα βλέπουμε εὔκολα ὅτι ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

(δ) Τὸ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους ἰσομετριῶν ἐπὶ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὁμοιοθεσιῶν, μὲ ὁποια τάξη κι ἂν τὰ πάρουμε, ἀποτελεῖ ὁμοιότητα.

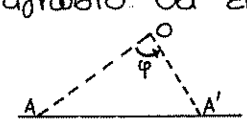
(ε) Τὸ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μετατοπίσεων ἐπὶ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὁμοιοθεσιῶν, μὲ ὅποια τάξη κι ἂν τὰ πάρουμε, ἀποτελεῖ ὁμόρροπη ὁμοιότητα.

(στ) Τὸ γινόμενο περιττοῦ πλήθους ἀντιμετατοπίσεων ἐπὶ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὁμοιοθεσιῶν, μὲ ὅποια τάξη κι ἂν τὰ πάρουμε, ἀποτελεῖ ἀντίρροπη ὁμοιότητα.

6.3. Ἡ ὁμόρροπη ὁμοιότητα εἶναι ὁρισμένη:

(α) Ἂν δοθῆ ἡ γωνία, ὁ λόγος καὶ ἕνα ζευγάρι ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα.

Ἂς εἶναι $A'=\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}[A]$. Τὸ κέντρο O ἄγνωστο. Θὰ εἶναι $\frac{OA'}{OA}=\kappa$, δηλαδὴ τὸ O θὰ εἶναι σὲ Ἀπολλώνια περιφέρεια. Ἀκόμα $(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA})=\varphi$, δηλαδὴ τὸ O βρίσκεται σ' ἕνα τόξο μὲ χορδὴ AA' ποὺ δέχεται γωνία φ. Ἡ τομὴ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τόξου εἶναι τὸ κέντρο.



Λύση μία.

(β) Ἂν δοθῆ τὸ κέντρο O καὶ δύο ὁμόλογα σημεῖα A, A'.

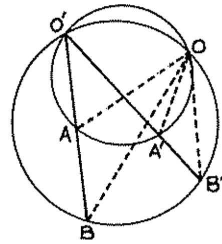
Γιατί $A'=\Sigma_{(O,\widehat{AOA},\frac{OA'}{OA})}[A]$.

(γ) Ἂν δοθοῦν δύο ζευγάρια ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα (A,B),

(A',B'). Γιατὶ ἂν παρατηρήσουμε ὅτι $\kappa=\frac{A'B'}{AB}$, $\varphi=(AB,A'B')$ καὶ A,A' ὁμόλογα τὸ κέντρο μπορεῖ νὰ βρεθῆ σύμφωνα μὲ τὴν (α) περίπτωση.

Μιὰ ἄλλη ἁπλῆ κατασκευὴ μπορεῖ νὰ γίνη μὲ τὸν παρακάτω τρόπο:

Ἂς εἶναι $O'=AB\cap A'B'$. Οἱ κύκλοι $AO'A'$, $BO'B'$ τέμνονται ἀκόμα στὸ O (διαφορετικὸ ἢ ὄχι ἀπ' τὸ O'). Ἡ ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\widehat{AOA'},\frac{A'B'}{AB})}$ μετασχηματίζει τὸ ζευγάρι (A,B) στὸ (A',B').



Ἂν $AB\parallel A'B'$, ἡ ὁμοιότητα $\Sigma_{(O',\widehat{AO'A'},\frac{A'B'}{AB})}$, ὅπου $O'=AA'\cap BB'$, μετασχηματίζει τὸ ζευγάρι (A,B) στὸ (A',B').

Ἀξίζει ἀκόμα νὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὸ ζευγάρι (B,B') προέρχεται ἀπ' τὸ (A,A') μὲ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\widehat{AOA'},\frac{BB'}{AA'})}$.

Ἄρα καὶ οἱ κύκλοι ABP, $A'B'P$ ὅπου $P=AA'\cap BB'$ περνᾶν ἀπ' τὸ O. Βρίσκουμε πάλι δηλαδὴ τὸ θεώρημα τοῦ Miquel (Γεωμ. φροντ. 11-20.1).

Ἀκόμα μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα AB, $A'B'$ μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογα στὶς ἑπόμενες ὁμοιότητες $(A',B')=\Sigma_1[(A,B)]$, $(B',A')=\Sigma_2[(A,B)]$. Τὸ κέντρο τῆς Σ_2 εἶναι τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων $O'AB'$, $O'BA'$. Ἀκόμα ἡ γωνία στροφῆς τῆς Σ_2 εἶναι $\pi-\widehat{AO'B'}$.

6.4. (α) Μετασχηματισμὸς τῶν ἁπλῶν σχημάτων.

Ἂς θεωρήσουμε μιὰ εὐθεία (ε) καὶ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}=R_{(O,\varphi)}\cdot H_{(O,\kappa)}$. Ἂν $\varepsilon_1=H_{(O,\kappa)}[\varepsilon]$ καὶ $\varepsilon'=R_{(O,\varphi)}[\varepsilon_1]$ θὰ εἶναι

$$\varepsilon'=\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}[\varepsilon].$$

Δηλαδὴ τὸ ὁμόλογο μιᾶς εὐθείας ε σὲ μιὰ ὁμοιότητα εἶναι ἐπίσης εὐθεία ε'.

Τὸ ὁμόλογο εὐθ. τμήματος AB θὰ εἶναι εὐθ. τμῆμα $A'B'$.

Τὸ ὁμόλογο περιφέρειας (Λ,R) θὰ εἶναι περιφέρεια (Λ',R'), ὅπου Λ' τὸ ὁμόλογο τοῦ Λ καὶ $R'=\kappa R$.

Τὸ ὁμόλογο τόξου εἶναι τόξο.

(β) Μετασχηματισμός μιᾶς καμπύλης c.

Ἄν θυμηθοῦμε τόν μετασχηματισμό μιᾶς καμπύλης c μέ τήν ὁμοιοθεσία $H_{(O,k)}$ εἶναι εὔκολο νά βροῦμε τόν μετασχηματισμό τῆς c μέ τήν $\Sigma_{(O,\varphi,k)}$.

1. Οἱ ἐφαπτόμενες στά ὁμόλογα σημεῖα θά εἶναι παράλληλες.

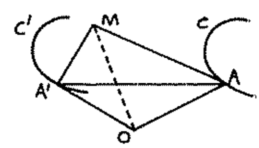
2. Τά ὁμόλογα τόξα θά εἶναι ἀνάλογα.

3. Τό ἐμβαδόν ὁμόλογων κλειστῶν περιοχῶν θά ἔχη λόγο k^2.

4. Ἡ γωνία δύο καμπύλων c, c_1 σ' ἕνα σημεῖο τομῆς τους A διατηρεῖται μέ τόν μετασχηματισμό.

5. Ἄν σημεῖο A γράφη τήν γραμμή c καί τό ὁμόλογό του A' στήν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,k)}$ τήν γραμμή c', τότε κάθε σημεῖο M ὅπου $A\widehat{M}A'$ ὅμοιο μέ τρίγωνο T πού ἔχει δοθῆ γράφει καμπύλη ὅμοια μέ τήν c.

Ἀπόδειξη:



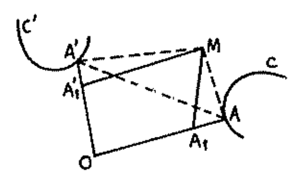
Ὅταν τό A κινεῖται στήν c τό τετράπλευρο $OAMA'$ παραμένει ὅμοιο μέ σταθερό τετράπλευρο. Ἄρα τό M γράφει τήν c_1 ἀπό τήν σχέση:

$$c_1 = \Sigma_{(O,A\hat{O}M,\frac{OM}{OA})}[c].$$

6. Ἄν τό σημεῖο A γράφη τήν γραμμή c καί τό ὁμόλογό του A' κατά τήν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,k)}$ τήν c', τότε κάθε σημεῖο M πού δίνεται ἀπό τήν $\overline{OM} = \lambda\overline{OA} + \lambda'\cdot\overline{OA'}$ γράφει καμπύλη ὅμοια μέ τήν c.

Γίνεται ἀμέσως ἀναγωγή στό προηγούμενο ἄν παρατηρήσουμε ὅτι τό τετράπλευρο $AOA'M$ παραμένει ὅμοιο μέ σταθερό τετράπλευρο.

Ἀλλοιῶς μποροῦμε νά πάρουμε:



$$\overline{OA_1} = \lambda\overline{OA}, \ \overline{OA_1'} = \lambda'\cdot\overline{OA'}.$$

Τό A_1 γράφει καμπύλη ὁμοιόθετη μέ τήν c. Ἄρα τό M γράφει τήν καμπύλη $c_1' = \Sigma_{(O,A_1\hat{O}M,\frac{OM}{OA_1})}[c]$. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ γωνία $A_1\hat{O}M$ εἶναι σταθερή καί ὁ λόγος $\frac{OM}{OA_1}$ εἶναι σταθερός.

Ἀκόμα εὔκολα μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι ἄν B, B' ὁμόλογα σημεῖα στίς c, c', τό σημεῖο M_1 ἀπό τήν σχέση:

$$\vec{OM_1} = \lambda\cdot\vec{AB} + \lambda'\vec{A'B'}$$

γράφει ὅμοια καμπύλη, ἄν A, A' σταθερά, B, B' μεταβλητά.

6.5. Ὅμοια διαίρεση εὐθειῶν.

(α) Ἄς εἶναι Δ' τὸ ὁμόλογο εὐθείας Δ στὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$. Ἄν τὸ σημεῖο M διαγράφη τὴν Δ τὸ ὁμόλογο του M' διαγράφει τὴν Δ'. Λέμε τότε ὅτι τὰ σημεῖα M, M' διαγράφουν στὶς Δ, Δ' ὅμοιες διαιρέσεις.

Ἄν A, A' δύο ὁμόλογα σημεῖα στὶς Δ, Δ' θὰ εἶναι ὅπως εἶναι γνωστὸ γιὰ κάθε ζευγάρι M, M' ὁμολόγων σημείων $\frac{A'M'}{AM} = \kappa$.

Ἀντίστροφα: Ἄν A, A' σταθερὰ σημεῖα τῶν Δ, Δ' ἀντίστοιχα καὶ M, M' μεταβλητὰ σημεῖα τους ἀντίστοιχα ὅπου $\frac{A'M'}{AM} = \kappa$, τὰ M, M' διαγράφουν στὶς Δ, Δ' ὅμοιες διαιρέσεις. Αὐτὸ βγαίνει ἀμέσως ἀπὸ τὴν παράγραφο 6.3. Γιατί οἱ Δ, Δ' μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογες στὴν ὁμοιότητα ποὺ μετασχηματίζει τὸ εὐθ. τμῆμα AM στὸ $A'M'$.

Ἄς εἶναι $O' = \Delta \cap \Delta'$ καὶ A_0' τὸ ὁμόλογο τοῦ O' ἄν τὸ θεωρήσουμε σὰν σημεῖο τῆς Δ, A_0 τὸ ὁμόλογο τοῦ O' ἄν τὸ θεωρήσουμε σὰν σημεῖο τῆς Δ'. Εἶναι φανερὸν ὅτι $A_0' \in \Delta'$ καὶ $A_0 \in \Delta$. Τὰ σημεῖα A_0, A_0' ὀνομάζουμε **ἀρχικὰ σημεῖα** τῆς ὅμοιας διαίρεσης τῶν Δ, Δ'. Τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ τους ἄν τὸ κέντρο O τῆς ὁμοιότητας εἶναι διάφορο τοῦ O'. Θὰ εἶναι ἀκόμα γιὰ κάθε ζευγάρι ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα M, M':

$$\frac{O'M'}{A_0M} = \kappa \quad \text{καὶ} \quad \frac{O'M}{A_0'M'} = \frac{1}{\kappa}.$$

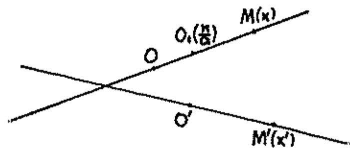
Ὅταν τὰ σημεῖα A_0, A_0' συμπίπτουν στὸ O' θὰ εἶναι $\frac{OM'}{OM} = \kappa$. Ἄρα οἱ εὐθεῖες ποὺ συνδέουν ζευγάρια ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα θὰ εἶναι παράλληλες καὶ $O \equiv O'$.

(β) Ἄν σὲ δύο ἄξονες Ox καὶ $O'x'$ πάρουμε ἀντίστοιχα τὰ σημεῖα M, M' ἔτσι ποὺ οἱ τετμημένες τους x, x' νὰ συνδέωνται μὲ τὴν πρωτοβάθμια σχέση

$$\alpha x + \alpha' x' = \lambda,$$

ὅπου a, a', λ σταθερά, τότε τά M, M' γράφουν στίς Ox, $O'x'$ ὅμοιες διαιρέσεις.

Ἄν $x = x_1 + \frac{\kappa}{a}$ τότε
$a(x_1 + \frac{\kappa}{a}) + a'x' = \kappa$ ἤ
$ax_1 + a'x' = 0$ ἤ $\frac{x'}{x_1} = -\frac{a}{a'}$.



Ἄν πάρουμε λοιπόν $O_1(\frac{\kappa}{a})$ στήν Ox τά $O_1, M - O', M'$ εἶναι ὁμόλογα σημεῖα ὅμοιας διαίρεσης στούς δύο ἄξονες.

6.7. Ὅμοια διαίρεση δύο κύκλων.

Ἄς εἶναι (Λ, R) καί (Λ', R') δυό κύκλοι καί $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$ μιά ὁμοιότητα ὅπου

$$(\Lambda', R') = \Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}[(\Lambda, R)].$$

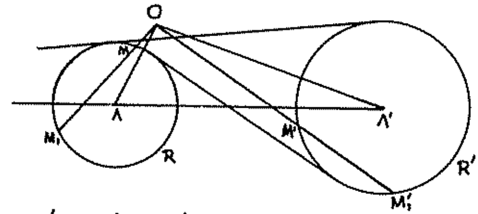
Θά εἶναι $\frac{R'}{R} = \frac{O\Lambda'}{O\Lambda} = \kappa$, $(\overline{O\Lambda}, \overline{O\Lambda'}) = \varphi$. Τό κέντρο δηλαδή αὐτῆς τῆς ὁμοιότητας εἶναι ἀπόλυτα καθορισμένο. Βρίσκεται σέ Ἀπολλώνια περιφέρεια πρός Λ, Λ' μέ λόγο κ καί σέ τόξο χορδῆς $\Lambda\Lambda'$ πού δέχεται γωνία φ.

Ἀπό τά προηγούμενα βλέπουμε ὅτι δύο κύκλοι μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι προκύπτει ὁ ἕνας ἀπ' τόν ἄλλον ἀπό ἄπειρες ὁμοιότητες πού τά κέντρα τους βρίσκονται σ' αὐτή τήν Ἀπολλώνια περιφέρεια καί οἱ γωνίες τῆς ὁμοιότητας μεταβάλλονται ἀπό 0 ὥς 2π. Αὐτή ἡ Ἀπολλώνια περιφέρεια ὀνομάζεται **περιφέρεια ὁμοιότητας** (ἤ κύκλος ὁμοιότητας) τῶν $(\Lambda, R), (\Lambda', R')$. Καί ἐπειδή $\frac{R'}{R} = \kappa$, ἡ περιφέρεια ὁμοιότητας θά περνᾶ ἀπ' τό ἐξωτερικό καί ἐσωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας.

Ἄν δοθοῦν δύο κύκλοι (Λ, R) καί (Λ', R') ἡ ὁμοιότητα πού μετασχηματίζει τόν ἕνα κύκλο στόν ἄλλο εἶναι ἀπόλυτα καθορισμένη ἄν εἶναι γνωστή ἡ γωνία της, δηλαδή ἄν δοθῆ ἕνα ζευγάρι ἀπό ὁμόλογα σημεῖα M, M'. Τότε ἐπειδή καί τά Λ, Λ' εἶναι ὁμόλογα ἡ γωνία ὁμοιότητας θά εἶναι $\varphi = (\overline{\Lambda M}, \overline{\Lambda' M'})$.

Εἶναι φανερό ὅτι τό εὐθ. τμῆμα ΛM μετασχηματίζεται στό $\Lambda' M'$, ἄρα ἡ κατασκευή τοῦ κέντρου ὁμοιότητας μπορεῖ νά γίνη καί ἀπό τήν 6.3-γ. Τά σημεῖα M, M' πρέπει πάντα νά ἐπαληθεύουν τήν $\frac{\Lambda' M'}{\Lambda M} = \frac{R'}{R}$.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$ μεταοχηματίζει τόν κύκλο (Λ, R) στόν (Λ', R'). Ἄν M σημεῖο τῆς περιφέρειας (Λ, R) τό ὁμόλογό του M' θά εἶναι σημεῖο τῆς περιφέρειας (Λ', R'). Ἄν τό M γράφη τόξο s στήν (Λ, R) τό M' θά γράφη τόξο $s' = \kappa s$. Ἄς εἶναι M_1 καί M_1' τά δεύτερα



σημεῖα τομῆς τῶν OM, OM' μέ τούς κύκλους (Λ, R), (Λ', R') ἀντίστοιχα. Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι $M_1\widehat{\Lambda O} \sim M_1'\widehat{\Lambda' O}$. Ἄρα τά M_1, M_1' εἶναι ὁμόλογα στήν ἴδια ὁμοιότητα.

Ἄρα σέ δύο ὁμόλογες εὐθεῖες ἀντιστοιχοῦν δύο ζευγάρια ἀπό ὁμόλογα σημεῖα τά (M, M') καί (M_1, M_1').

Τά σημεῖα (M, M_1'), (M_1, M') λέγονται **ἀντιομόλογα** καί συνδέονται μέ τήν σχέση:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = \mathcal{D}_\Lambda(O) \quad \text{καί} \quad \frac{OM'}{OM} = \frac{R'}{R},$$

ὁπότε $\overline{OM_1} \cdot \overline{OM'} = \frac{R'}{R}\mathcal{D}_\Lambda(O)$.

Ἀκόμα ἔχουμε $\overline{OM} \cdot \overline{OM_1'} = \frac{R}{R'}\mathcal{D}_{\Lambda'}(O)$.

Ἀλλά εἶναι πολύ εὔκολο νά δοῦμε ὅτι $\frac{R'}{R}\mathcal{D}_\Lambda(O) = \frac{R}{R'}\mathcal{D}_{\Lambda'}(O)$, ὁπότε προκύπτει ὅτι:

$$OM_1 \cdot OM' = OM \cdot OM_1' = \sqrt{\mathcal{D}_\Lambda(O) \cdot \mathcal{D}_{\Lambda'}(O)}.$$

Ἀπό τήν προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ὅτι: Ἄν τό σημεῖο M κινεῖται στήν (Λ, R) καί εἶναι M_1' τό ἀντιομόλογό του στήν (Λ', R'), τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου MOM_1' εἶναι σταθερό.

6.8. Γινόμενα.

(α) Τό γινόμενο δυό ὁμόρροπων ὁμοιοτήτων μέ τό ἴδιο κέντρο εὔκολα βρίσκουμε ὅτι εἶναι ὁμόρροπη μέ τίς προηγούμενες ὁμοιότητα μέ τό ἴδιο κέντρο, μέ γωνία τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καί λόγο τό γινόμενο τῶν λόγων.

(β) Ἄς πάρουμε τώρα τό γινόμενο δυό ὁμόρροπων ὁμοιοτήτων $\Sigma_{(O_1, \varphi_1, \kappa_1)}$, $\Sigma_{(O_2, \varphi_2, \kappa_2)}$ μέ διαφορετικά κέντρα O_1, O_2. Τό γινόμενο αὐτό ὅπως εἴδαμε εἶναι ὁμοιότητα.

θά προσδιορίσουμε τά στοιχεία της.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ζευγάρι A,B σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Θά ἔχουμε

$$(\alpha,\beta)=\Sigma_{(O_1,\varphi_1,\kappa_1)}[(A,B)],$$
$$(A',B')=\Sigma_{(O_2,\varphi_2,\kappa_2)}[(\alpha,\beta)].$$

Ἀκόμα $\alpha\beta=\kappa_1 AB$, $A'B'=\kappa_2\cdot\alpha\beta$, ἄρα $A'B'=\kappa_1\kappa_2 AB$. Ἐπίσης $(\overline{AB},\overline{\alpha\beta})=\varphi_1$, $(\overline{\alpha\beta},\overline{A'B'})=\varphi_2$, ἄρα $(\overline{AB},\overline{A'B'})=\varphi_1+\varphi_2$.

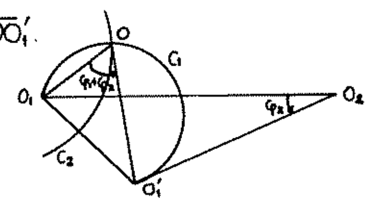
Ἄρα ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητας γινόμενο εἶναι τό γινόμενο τῶν λόγων $\kappa_1\cdot\kappa_2$ καί ἡ γωνία τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν.

Προσδιορισμός τοῦ κέντρου της O:

Εἶναι φανερόν ὅτι $O_1=\Sigma_{(O_1,\varphi_1,\kappa_1)}[O_1]$ καί ἄς εἶναι ἀκόμα $O_1'=\Sigma_{(O_2,\varphi_2,\kappa_2)}[O_1]$. Ἄρα

$$O_1'=\Sigma_{(O_2,\varphi_2,\kappa_2)}[\Sigma_{(O_1,\varphi_1,\kappa_1)}[O_1]]=\Sigma_{(O)}[O_1].$$

Δηλαδή $(\overline{OO_1},\overline{OO_1'})=\varphi_1+\varphi_2$, $\overline{OO_1}=\kappa_1\kappa_2\cdot\overline{OO_1'}$.

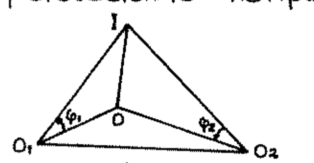


Τό σημεῖο O βρίσκεται σέ τόξο C_1 χορδῆς O_1O_1' πού δέχεται γωνία $\varphi_1+\varphi_2$ καί σέ Ἀπολώνια περιφέρεια C_2 πρός O_1O_1' μέ λόγο $\kappa_1\cdot\kappa_2$.

Μιά δεύτερη λύση εἶναι ἡ παρακάτω:

Ἄς εἶναι $I=\Sigma_{(O_1)}[O]$, ὁπότε $O=\Sigma_{(O_2)}[I]$. Ἄρα $\overline{O_1I}=\kappa_1\cdot\overline{O_1O}$ καί $(\overrightarrow{O_1O},\overrightarrow{O_1I})=\varphi_1$. Δηλαδή γιά τό τρίγωνο O_1IO ξέρουμε μιά γωνία καί τόν λόγο τῶν πλευρῶν πού τήν περιέχουν. Ἄρα εἶναι γνωστές ὅλες οἱ γωνίες του. Τό ἴδιο μέ τό τρίγωνο O_2IO. Ἄρα εἶναι γνωστές ὅλες οἱ γωνίες τοῦ τετραπλεύρου O_1OIO_2 καί τό τρίγωνο OO_1O_2 κατασκευάζεται.

Ἄς εἶναι τώρα 1) $\varphi_1+\varphi_2=0 \pmod{2\kappa\pi}$, $\kappa_1\kappa_2\neq 1$. Θά εἶναι $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\alpha\beta})+(\overrightarrow{\alpha\beta},\overrightarrow{A'B'})=0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\alpha\beta})=-(\overrightarrow{\alpha\beta},\overrightarrow{A'B'})$ δηλαδή $\overrightarrow{A'B'}=\kappa_1\kappa_2\overrightarrow{AB}$. Δηλαδή τό γινόμενο εἶναι ὁμοιοθεσία. Τό κέντρο κατασκευάζεται εὔκολα, ὅπως φαίνεται στό διπλανό σχῆμα. Εἶναι ἡ τομή τῆς O_1O μέ τήν ἡμιευθεία O_2x, ὅπου $(\overline{O_2I},\overline{O_2x})=-\varphi_1$.



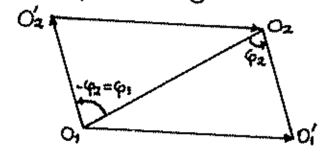
$\varphi_1=(\overrightarrow{O_1O},\overrightarrow{O_1I})$ $\quad\varphi_2=(\overrightarrow{O_2I},\overrightarrow{O_2O})$

$\kappa_1=\frac{O_1I}{O_1O}$ $\quad\kappa_2=\frac{O_2O}{O_2I}$

2) Ἄν $\varphi_1+\varphi_2\neq 0 \pmod{2\kappa\pi}$

καὶ $\kappa_1\kappa_2=1$. Εἶναι στροφὴ μὲ κέντρο O καὶ γωνία $\varphi_1+\varphi_2$.

3) Ἂν $\varphi_1+\varphi_2=0 \pmod{2\kappa\pi}$ καὶ $\kappa_1\kappa_2=1$, θὰ εἶναι τελικά $\vec{A'B'}=\vec{AB}$, δηλαδὴ μεταφορά (ἢ ταυτότητα). Τὸ διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς βρίσκεται σύμφωνα μὲ τὰ γνωστά. Τὸ ὁμόλογο τοῦ O_1 στὸ γινόμενο $\Sigma_{(O_2,\varphi_2,\kappa_2)}\cdot\Sigma_{(O_1,\varphi_1,\kappa_1)}$ εἶναι τὸ σημεῖο O_1' καὶ ἂς εἶναι τὸ O_2 ὁμόλογο τοῦ O_2'. Θὰ ἔχουμε τὸ διπλανὸ σχῆμα ὅπου $O_2O_1'=\kappa_2\cdot O_2O_1$ καὶ $O_1O_2=\kappa_1\cdot O_1O_2'$, δηλαδὴ $O_2O_1'=O_1O_2'$.



Ἄρα τὸ $O_1O_1'O_2O_2'$ εἶναι παραλληλόγραμμο καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{O_1O_2'}$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς.

6.9. Ἀντίρροπη ὁμοιότητα.

Ἂς θεωρήσουμε τὰ ἀντίρροπα προσανατολισμένα ὅμοια σχήματα F, F'. Γνωρίζουμε ἀπὸ τὴν 6.1.6 ὅτι τὰ δύο σχήματα μποροῦν νὰ ταυτιστοῦν μ' ἕνα μετασχηματισμὸ γινόμενο ὁμόρροπης ὁμοιότητας ἐπὶ συμμετρία πρὸς τυχαία εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου. Ἀκόμα μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε τὸ παρακάτω θεώρημα:

Κάθε ἀντίρροπη ὁμοιότητα εἶναι ἴση μὲ ὁμοιοθεσία ἐπὶ συμμετρία πρὸς τυχαία εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπ' τὸ κέντρο τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξη:

Ἡ ἀντίρροπη ὁμοιότητα μπορεῖ νὰ γραφτῆ σὰν γινόμενο μιᾶς ὁμόρροπης ὁμοιότητας $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$ ἐπὶ μιὰ συμμετρία πρὸς εὐθεία Δ ποὺ περνᾶ ἀπ' τὸ O. Ἂς εἶναι λοιπὸν σ ἡ ἀντίρροπη ὁμοιότητα. Θὰ εἶναι:

$$\sigma=\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}\cdot S_{(\Delta)}.$$

Ἀλλὰ $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}=H_{(O,\kappa)}\cdot R_{(O,\varphi)}=H_{(O,\kappa)}\cdot S_{(\Delta_1)}\cdot S_{(\Delta)}$, γιατὶ σύμφωνα μὲ τὴν 3.4.2 $R_{(O,\varphi)}=S_{(\Delta_1)}\cdot S_{(\Delta)}$. Ἄρα $\sigma=H_{(O,\kappa)}\cdot S_{(\Delta_1)}\cdot S_{(\Delta)}\cdot S_{(\Delta)}$. Ἀλλὰ $S_{(\Delta)}\cdot S_{(\Delta)}=I$, ἄρα $\sigma=H_{(O,\kappa)}\cdot S_{(\Delta_1)}$.

Μελέτη τοῦ μετασχηματισμοῦ $\sigma=H_{(O,\kappa)}\cdot S_{(\Delta_1)}$.

(1) Τὸ σημεῖο O εἶναι τὸ μοναδικὸ διπλὸ σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ. Πραγματικά, τὸ O ἀποτελεῖ διπλὸ σημεῖο τοῦ $H_{(O,\kappa)}$ καὶ ἐπειδὴ βρίσκεται καὶ στὴν Δ_1 διπλὸ σημεῖο καὶ τῆς

$S_{(\Delta_1)}$ Ἄν τώρα ὑπῆρχε καὶ δεύτερο διπλὸ σημεῖο O' θὰ ἦταν: $O \to O$, $O' \to O'$ ἄρα $OO' = \kappa OO'$ ἢ $OO'(1-\kappa) = 0$. Ἀλλὰ $\kappa \neq 1$.

(2) Ἡ εὐθεία Δ_1 καὶ ἡ κάθετη της Δ_2 ἀπ' τὸ O εἶναι οἱ διπλὲς εὐθεῖες τοῦ μετασχηματισμοῦ καὶ δὲν ὑπάρχει ἄλλη διπλῆ εὐθεία γιατὶ ἂν ὑπῆρχε θὰ περιεῖχε τὸ μοναδικὸ διπλὸ σημεῖο O. Ἄρα θὰ περνοῦσε ἀπ' τὸ O, ὁπότε ἂν ἦταν ἡ δ θὰ εἴχαμε:

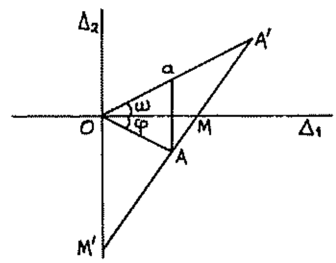
$$\delta = H_{(O,\kappa)}[\delta],\ \delta = S_{(\Delta_1)}[\delta]$$

ποὺ εἶναι ἄτοπο.

(3) $\sigma = H_{(O,\kappa)} \cdot S_{(\Delta_1)} = S_{(\Delta_1)} \cdot H_{(O,\kappa)}$

(4) Ἄν A, A' τὰ ὁμόλογα σημεῖα σὲ μιὰ ἀντίρροπη ὁμοιότητα μὲ διπλὲς εὐθεῖες Δ_1, Δ_2, τὰ σημεῖα ποὺ χωρίζουν τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AA' σὲ λόγο κ, ὅπου κ ὁ λόγος ὁμοιότητας, βρίσκονται στὶς Δ_1, Δ_2.

Ἀπόδειξη:



Ἄς εἶναι $\sigma = H_{(O,\kappa)} \cdot S_{(\Delta_1)}$ θὰ εἶναι $\varphi = \omega$ καὶ ἂν $M = \Delta_1 \cap AA'$, $M' = \Delta_2 \cap AA'$ στὸ τρίγωνο AOA' οἱ OM καὶ OM' θὰ εἶναι ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας AOA'. Ἄρα $\frac{MA'}{MA} = \frac{M'A'}{M'A} = \frac{OA'}{OA} = \kappa$.

(5) $H_{(O,\kappa)} \cdot S_{(\Delta_1)} = H_{(O,-\kappa)} \cdot S_{(\Delta_2)}$.

Ὅπως εἶναι γνωστὸ $S_{(\Delta_1)} \cdot S_{(\Delta_2)} = S_{(O)}$ ἢ $S_{(\Delta_1)} = S_{(O)} \cdot S_{(\Delta_2)}$. Ἄρα $H_{(O,\kappa)} \cdot S_{(\Delta_1)} = H_{(O,\kappa)} \cdot S_{(O)} \cdot S_{(\Delta_2)} = H_{(O,-\kappa)} \cdot S_{(\Delta_2)}$.

(6) Ἄν B, B' δύο ὁμόλογα σημεῖα στὸν προηγούμενο μετασχηματισμὸ σ καὶ $P = \Delta_1 \cap BB'$, $P' = \Delta_2 \cap BB'$, οἱ Ἀπολλώνιες περιφέρειες μὲ διαμέτρους MM', PP' ἔχουν κοινὸ σημεῖο τὸ O καὶ ἃς ὑποθέσουμε ἀκόμα ἕνα σημεῖο O'. Τὰ τρίγωνα $AO'B$, $A'O'B'$ εἶναι ὁμόρροπα ὅμοια μὲ λόγο ὁμοιότητας $\frac{A'B'}{AB} = \kappa$, ἄρα ὁμόλογα στὴν ὁμόρροπη ὁμοιότητα $\Sigma_{(O',\varphi,\kappa)}$ ὅπου $\varphi = (\vec{AB}, \vec{A'B'})$.

6.10. Μελέτη τῆς κίνησης σχήματος F κατὰ τὶς ὁμοιότητες $\Sigma_{(O,\varphi_i,\kappa_i)}$.

(1) Βασικὸ τρίγωνο πρώτου εἴδους.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σημεῖο $A \in F$ καὶ ἀκόμα:

$$A_1 = \Sigma_{(O,\varphi_1,\kappa_1)}[A],\ A_2 = \Sigma_{(O,\varphi_2,\kappa_2)}[A].$$

Τὸ τρίγωνο AA_1A_2 μένει πάντα ὅμοιο μὲ τρίγωνο Τ. Οἱ γωνίες του δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ F παρὰ μόνο ἀπ' τὶς ὁμοιότητες. Ἄρα ἂν $B\epsilon F$ καὶ B_1, B_2 τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα θὰ εἶναι $\widehat{BB_1B_2} \sim \widehat{AA_1A_2}$.

Τὸ τρίγωνο AA_1A_2 λέγεται **βασικὸ τρίγωνο πρώτου εἴδους**.

Τὸ τρίγωνο BB_1B_2 προκύπτει ἀπὸ τὸ AA_1A_2 μὲ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\hat{AOB},\frac{OB}{OA})}$.

Ἄς πάρουμε τώρα τρεῖς εὐθεῖες $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ποὺ δὲν περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ $A\epsilon\varepsilon, A_1\epsilon\varepsilon_1, A_2\epsilon\varepsilon_2$. Μποροῦμε νὰ φανταστοῦμε ὅτι τὸ τρίγωνο AA_1A_2 εἶναι τὸ βασικὸ τρίγωνο γιὰ τὶς δύο ὁμοιότητες $\Sigma_{(O,\varphi_1,\kappa_1)}, \Sigma_{(O,\varphi_2,\kappa_2)}$ καὶ ἀκόμα ὅτι:

$$\varepsilon_1 = \Sigma_{(O,\varphi_1,\kappa_1)}[\varepsilon], \varepsilon_2 = \Sigma_{(O,\varphi_2,\kappa_2)}[\varepsilon].$$

Τὸ O εἶναι τὸ κοινὸ σημεῖο τῶν κύκλων $\varepsilon\cap\varepsilon_1 AA_1$, $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2 A_1A_2$, $\varepsilon_2\cap\varepsilon A_2A$ (σημεῖο Miquel). Ἐπίσης $\kappa_1 = \frac{OA_1}{OA}$, $\kappa_2 = \frac{OA_2}{OA}$, $\varphi_1 = A\hat{O}A_1$, $\varphi_2 = A\hat{O}A_2$.

Ἂν τώρα $B\epsilon\varepsilon, B_1\epsilon\varepsilon_1, B_2\epsilon\varepsilon_2$ καὶ $\widehat{BB_1B_2} \sim \widehat{AA_1A_2}$ τὰ σημεῖα B, B_1, B_2 εἶναι ὁμόλογα κατὰ τὶς δύο ὁμοιότητες ὅπως καὶ τὰ A, A_1, A_2. Καὶ τὸ τρίγωνο BB_1B_2 προκύπτει ἀπ' τὸ AA_1A_2 ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\hat{AOB},\frac{OB}{OA})}$.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν ἐγγεγραμμένων τριγώνων σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ποὺ εἶναι ὅμοια μὲ ἕνα τρίγωνο Τ ποὺ ἔχει δοθῆ, ὁρίζουν ἕνα κέντρο ὁμοιότητας O. Καὶ τὸ ἕνα τρίγωνο προκύπτει ἀπ' τὸ ἄλλο μὲ ὁμοιότητα κέντρου O. Ἀκόμα τὸ O εἶναι τὸ κέντρο τῶν ὁμοιοτήτων ποὺ ἐναλλάσσουν τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅταν τὰ ὁμόλογα σημεῖα ποὺ βρίσκονται σ' αὐτὲς εἶναι οἱ κορυφὲς τῶν ὅμοιων τριγώνων ἀντίστοιχα.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι οἱ τρεῖς εὐθεῖες $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο O καὶ ἂς εἶναι $A\epsilon\varepsilon, A_1\epsilon\varepsilon_1, A_2\epsilon\varepsilon_2$. Τὸ AA_1A_2 εἶναι τὸ βασικὸ τρίγωνο στὶς δύο ὁμοιότητες

$$\Sigma_{(O,A\hat{O}A_1,\frac{OA_1}{OA})},\ \Sigma_{(O,A\hat{O}A_2,\frac{OA_2}{OA})}.$$

Ἂν τώρα $B\epsilon\varepsilon, B_1\epsilon\varepsilon_1, B_2\epsilon\varepsilon_2$ καὶ $\widehat{BB_1B_2} \sim \widehat{AA_1A_2}$ τὰ δύο τρίγωνα AA_1A_2 καὶ BB_1B_2 εἶναι ὁμοιόθετα πρὸς O.

Μὲ τὴν βοήθεια τοῦ βασικοῦ τριγώνου πρώτου εἴδους θὰ ἀποδείξουμε τὸ παρακάτω θεώρημα:

"Ἂν σχῆμα F κινεῖται καὶ παραμένει ὅμοιο μὲ σχῆμα ποὺ ἔχει δοθῆ καὶ μὲ τέτοιο τρόπο ποὺ τρία σημεῖα του A, A_1, A_2 νὰ διαγράφουν τρεῖς σταθερὲς εὐθεῖες ποὺ δὲν περνᾶν ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο, τότε καὶ κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ F διαγράφει μιὰ σταθερὴ εὐθεία.

Ἀπόδειξη:

Μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸ τρίγωνο AA_1A_2 σὰν βασικὸ τρίγωνο καὶ ἔτσι μπορεῖ νὰ προσδιοριστῆ τὸ κέντρο ὁμοιότητας τῶν $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, δηλαδὴ τὸ γνωστὸ ἀπ' τὰ προηγούμενα σημεῖο O. Ἀλλὰ τότε τὸ O εἶναι καὶ κέντρον ὁμοιότητας τῶν τριγώνων ποὺ εἶναι ὅμοια μὲ τὸ βασικὸ AA_1A_2, δηλαδὴ κέντρον ὁμοιότητας καὶ τοῦ F. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ κίνηση τοῦ F εἶναι ὁμοιότητα μὲ κέντρο O καὶ ἄρα ὅλα τὰ σημεῖα του γράφουν ὅμοιες γραμμές, δηλαδὴ εὐθεῖες, ἀφοῦ τὸ A γράφει εὐθεία.

Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε τρεῖς κύκλους (O,R), (O_1,R_1), (O_2,R_2). Οἱ κύκλοι (O_1,R_1) καὶ (O_2,R_2) μποροῦν νὰ προκύψουν ἀπ' τὸν (O,R) μὲ ὁμοιότητα πρὸς τὸ ἴδιο σημεῖο, γιατὶ οἱ κύκλοι ὁμοιότητας τῶν τριῶν κύκλων ἂν τοὺς πάρουμε ἀνὰ δύο περνᾶν ἀπὸ δύο σημεῖα ϱ, ω. Ἄρα λοιπὸν μποροῦμε νὰ γράψουμε $(O_1,R_1) = \Sigma_{(\varrho, O\hat{\varrho}O_1, \frac{R_1}{R})}[(O,R)]$ καὶ $(O_2,R_2) = \Sigma_{(\varrho, O\hat{\varrho}O_2, \frac{R_2}{R})}[(O,R)]$. Παρόμοια καὶ γιὰ τὸ ω. Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι τὸ βασικὸ τρίγωνο πρώτου εἴδους εἶναι τὸ $O\hat{O_1}O_2$. Ἄρα λοιπὸν ἂν $A \in (O,R)$, $A_1 \in (O_1,R_1)$ καὶ $A_2 \in (O_2,R_2)$ τὰ σημεῖα A, A_1, A_2 μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογα κατὰ τὶς ὁμοιότητες μόνον ὅταν $A\hat{A_1}A_2 \sim O\hat{\varrho}O_2$.

(2) Βασικὸ πολύγωνο πρώτου εἴδους.

Ἂς εἶναι $A \in F$ καὶ $A_i = \Sigma_{(O,\varphi_i,k_i)}[A]$, $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Τὸ πολύγωνο εἶναι ὅμοιο μὲ τὸν ἑαυτό του, δηλαδὴ ἂν $B \in F$ καὶ $B_i = \Sigma_{(O,\varphi_i,k_i)}[B]$ θὰ εἶναι $AA_1 \cdots A_{n-1} \sim BB_1 \cdots B_{n-1}$.

Τὸ $AA_1 \cdots A_{n-1}$ λέγεται **βασικὸ πολύγωνο πρώτου εἴδους** καὶ οἱ ἰδιότητές του εἶναι ἀνάλογες μ' ἐκεῖνες τοῦ τριγώνου.

(3) Βασικὸ τρίγωνο δεύτερου εἴδους.

Ἂς θεωρήσουμε τὴν εὐθεία ε καὶ τὶς ὁμόλογές της

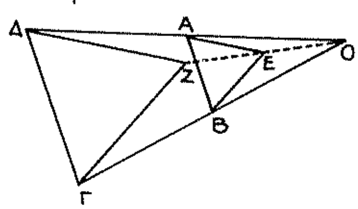
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στὶς ὁμοιότητες $\Sigma_{(O,\varphi_1,\kappa_1)}, \Sigma_{(O,\varphi_2,\kappa_2)}$. Τὸ τρίγωνο μὲ κορυφὲς $\varepsilon \cap \varepsilon_1, \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2, \varepsilon_2 \cap \varepsilon$ εἶναι ὅμοιο μὲ ὁρισμένο τρίγωνο ὅταν μεταβάλλεται ἡ ε θὰ λέμε αὐτὸ τὸ τρίγωνο **βασικὸ τρίγωνο δεύτερου εἴδους**. Παρόμοια ἂν ἐπεκτείνουμε παίρνουμε τὸ **βασικὸ πολύγωνο δεύτερου εἴδους.**

Ἂς φανταστοῦμε τώρα τὴν κίνηση σχήματος F, ἔτσι ποὺ τρεῖς εὐθεῖες του $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ νὰ περιβάλλουν τρεῖς ὅμοιες καμπύλες c, c_1, c_2. Τότε μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸ τρίγωνο μὲ κορυφὲς $\varepsilon \cap \varepsilon_1, \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2, \varepsilon_2 \cap \varepsilon$ σὰν βασικὸ τρίγωνο δεύτερου εἴδους, ὁπότε ἡ κίνηση θὰ εἶναι ὁμοιότητα πρὸς τὸ ἴδιο σημεῖο, ἄρα καὶ κάθε ἄλλη εὐθεία τοῦ F θὰ περιβάλη ὅμοια καμπύλη ὅπως καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ F θὰ γράφουν ὅμοιες μεταξύ τους καμπύλες.

6.11. Ἀσκήσεις.

1. Στὶς παράλληλες πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ τραπέζιου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ἰσόπλευρα τρίγωνα. Τὸ ἕνα τρίγωνο ἔχει κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τραπέζιου, τὸ ἄλλο ὄχι. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὶς τρίτες κορυφὲς τῶν ἰσοπλεύρων περνᾶ ἀπ' τὸ σημεῖο ὅπου τέμνονται οἱ μὴ παράλληλες πλευρές.

Ἀπόδειξη:



Πραγματικά, ἂν Ο τὸ σημεῖο τομῆς τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὁμόλογα κατὰ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\frac{A\Gamma}{AB})}$, δηλαδὴ

$$\overset{\triangle}{\Gamma\Delta Z} = H_{(O,\frac{A\Gamma}{AB})}[\overset{\triangle}{BEA}].$$

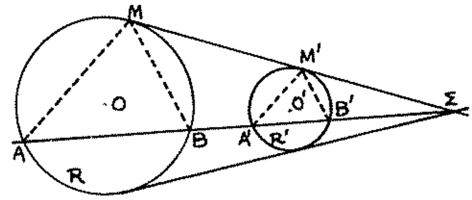
2. Δίνονται δυὸ κύκλοι (O,R) καὶ (O′,R′) καὶ Σ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτόμενων. Ἀπὸ τὸ Σ φέρνουμε μιὰ εὐθεία ε ποὺ νὰ τέμνη τοὺς κύκλους στὰ Α,Β - Α′,Β′ ἀντίστοιχα. Ἂν Μ,Μ′ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μιᾶς ἀπὸ τὶς ἐφαπτόμενες μὲ τοὺς (O,R), (O′,R′) ἀντίστοιχα, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι:

(α) $A\hat{M}B \sim A'\hat{M'}B'$,

(β) $\frac{(AMB)}{(A'M'B')} = \frac{R^2}{R'^2}$.

(γ) ἡ εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ κέντρα βάρους τῶν $\hat{AMB}, \hat{A'M'B'}$ περνᾶ καὶ ἀπὸ τὸ Σ.

Ἀπόδειξη:



Τὰ τρίγωνα ΑΜΒ, Α'Μ'Β' εἶναι ὁμοιόθετα κατὰ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(\Sigma, \frac{R}{R'})}$. Δηλαδὴ

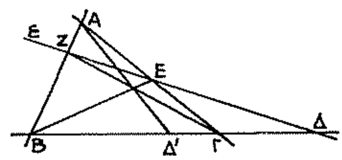
$\hat{AB\Gamma} = H_{(\Sigma, \frac{R}{R'})}[\hat{A'M'B'}]$.

Ἄρα (α) $\hat{AMB} \sim \hat{A'M'B'}$, (β) $\frac{(AMB)}{(A'M'B')} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2$ καὶ (γ) τὰ κέντρα βάρους εἶναι ὁμόλογα σημεῖα κατὰ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(\Sigma, \frac{R}{R'})}$. Ἄρα ἡ εὐθεία ποὺ ὁρίζουν τὰ κέντρα βάρους περνᾶ ἀπ' τὸ κέντρο ὁμοιοθεσίας, δηλαδὴ τὸ Σ.

3. Νὰ ἀποδειχτῆ τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου, δηλαδὴ ἂν ΑΒΓ τρίγωνο καὶ (ε) μιὰ τυχαία εὐθεία ποὺ τέμνει τὶς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στὰ Δ, Ε, Ζ ἀντίστοιχα θὰ ἔχουμε:

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{AZ}} \frac{\overline{AE}}{\overline{\Gamma E}} \frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{B\Delta}} = 1.$$

Ἀπόδειξη:



Ὁ μετασχηματισμὸς

$$T = H_{(Z, \frac{\overline{BZ}}{\overline{AZ}})} \cdot H_{(E, \frac{\overline{AE}}{\overline{\Gamma E}})} \cdot H_{(\Delta, \frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{B\Delta}})}$$

ἀφήνει τὸ σημεῖο Β ἀμετάβλητο, ἄρα $T = I$, ὁπότε

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{AZ}} \frac{\overline{AE}}{\overline{\Gamma E}} \frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{B\Delta}} = 1.$$

Παρόμοια μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε καὶ τὸ ἀντίστροφο.

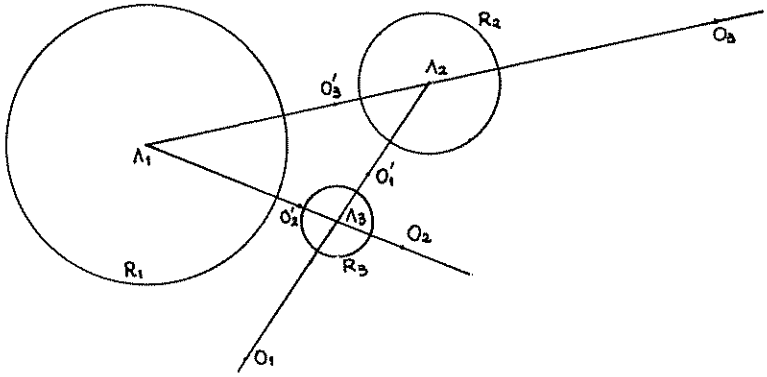
Τὸ θεώρημα τοῦ Ceva προκύπτει ἀπ' τὸ προηγούμενο θεώρημα τοῦ Μενελάου, ἂν παρατηρήσουμε ὅτι Β,Γ-Δ,Δ' ἁρμονικὴ τετράδα.

4. Κέντρα ὁμοιοθεσίας τριῶν κύκλων.

(α) Τὰ ἐξωτερικὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας τριῶν κύκλων ἂν τοὺς πάρουμε ἀνὰ δύο βρίσκονται σὲ εὐθεία.

(β) Δύο ἐσωτερικὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας καὶ τὸ ἀντίστοιχο ἐξωτερικὸ βρίσκονται σὲ εὐθεία.

Ἀπόδειξη:



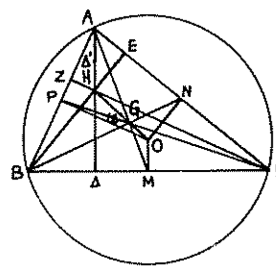
(α) Τά σημεῖα O_1, O_2, O_3 βρίσκονται σέ εὐθεία. Πραγματικά, εἶναι $H(O_3,\frac{R_1}{R_2})\cdot H(O_2,\frac{R_3}{R_1}) = H(O_1,\frac{R_3}{R_2})$. Δηλαδή τό O_1 εἶναι τό κέντρο τῆς ὁμοιοθεσίας $H(O_3,\frac{R_1}{R_2})\cdot H(O_2,\frac{R_3}{R_1})$ καί ὅπως εἶναι γνωστό θά βρίσκεται σέ εὐθεία μέ τά O_2, O_3.

(β) Παρόμοια $H(O_3',-\frac{R_2}{R_1})\cdot H(O_2',-\frac{R_1}{R_3})\cdot H(O_1,\frac{R_3}{R_2}) = I$. Δηλαδή τά O_3', O_2', O_1 βρίσκονται σέ εὐθεία.

5. Εὐθεία τοῦ Euler.

Τό ὀρθόκεντρο H, τό κέντρο βάρους G καί τό περίκεντρο O τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται σέ εὐθεία καί $\frac{\overline{HG}}{\overline{GO}} = \frac{2}{1}$.

Ἀπόδειξη:



Ἄν M,N τά μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ τά τρίγωνα MON, AHB θά ἔχουν τίς πλευρές παράλληλες, ἄρα θά εἶναι ὁμοιόθετα μέ λόγο $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = -\frac{2}{1}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ OH περνᾶ ἀπ' τό σημεῖο $G = AM \cap BN$ καί ἀκόμα $\frac{\overline{GH}}{\overline{GO}} = -\frac{2}{1}$.

6. Κύκλος τοῦ Euler.

Τά μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καί τά μέσα τῶν τμημάτων $HA, HB, HΓ$ ἀνήκουν στήν ἴδια περιφέρεια.

Ἀπόδειξη:

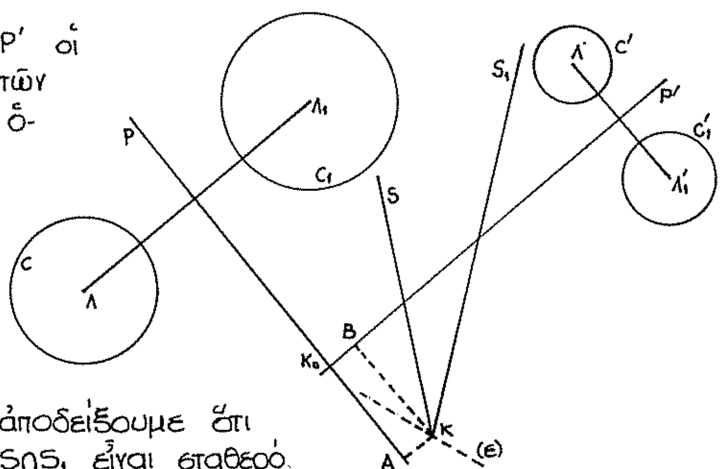
Ἡ ὁμοιοθεσία $H(G,-\frac{2}{1})$ μετασχηματίζει τό $\overset{\triangle}{MNP}$, ὅπου M,N,P τά μέσα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στό $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$. Ὁ κύκλος MNP μετασχηματίζεται στόν κύκλο ΑΒΓ καί τό κέντρο ω τοῦ κύκλου

MNP στό σημεῖο O, ἔτσι πού $\frac{\overline{GO}}{\overline{G\omega}}=-\frac{2}{1}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό ω εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος HO (στηριζόμαστε καί στήν προηγούμενη ἄσκηση). Ἀπ' αὐτό προκύπτει ὅτι (α) $\omega M=\omega\Delta$, δηλαδή οἱ πόδες τῶν ὑψῶν βρίσκονται στήν περιφέρεια MNP, (β) ἄν Δ' τό μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος AH, τά σημεῖα Δ',ω,M βρίσκονται σέ εὐθεία καί $\omega M=\omega\Delta'$. Ἄρα τά μέσα τῶν τμημάτων HA, HB, HΓ βρίσκονται στήν περιφέρεια MNP. Δηλαδή τά 9 σημεῖα βρίσκονται στόν κύκλο (ω), πού ὀνομάζεται κύκλος τοῦ Euler.

7. Ἡ ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$ μετασχηματίζει μιά δέσμη κύκλων F στήν δέσμη F'. Ἄν c ἕνας κύκλος τῆς F καί c' τό ὁμόλογό του, τότε ὁ ριζικός ἄξονας τῶν c,c' περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο.

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι P,P' οἱ ριζικοί ἄξονες τῶν F,F' καί c_1, c_1' ὁμόλογοι κύκλοι τῶν F,F' ἀντίστοιχα. Ἀκόμα S ὁ ριζικός ἄξονας τῶν c,c' καί S_1 ὁ ριζικός ἄξονας τῶν c_1, c_1' θά ἀποδείξουμε ὅτι τό σημεῖο $K=S\cap S_1$ εἶναι σταθερό.



Ὅπως εἶναι γνωστό (τύπος Casey)

$$\mathcal{D}_{\Lambda_1}(K)-\mathcal{D}_{\Lambda}(K)=2\overline{\Lambda_1\Lambda}\cdot\overline{AK}$$

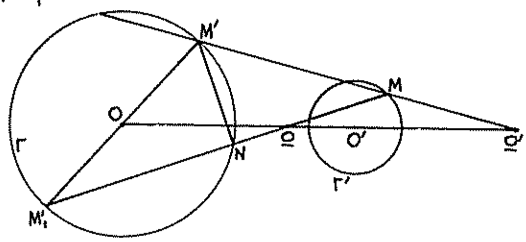
$$\mathcal{D}_{\Lambda_1'}(K)-\mathcal{D}_{\Lambda'}(K)=2\overline{\Lambda_1'\Lambda'}\cdot\overline{BK}.$$

Ἀλλά $\mathcal{D}_{\Lambda_1}(K)=\mathcal{D}_{\Lambda_1'}(K)$ καί $\mathcal{D}_{\Lambda'}(K)=\mathcal{D}_{\Lambda}(K)$. Ἄρα $2\overline{\Lambda_1\Lambda}\cdot\overline{AK}=2\overline{\Lambda_1'\Lambda'}\cdot\overline{BK}$, δηλαδή $\frac{\Lambda_1\Lambda}{\Lambda_1'\Lambda'}=\frac{BK}{AK}=\frac{1}{\kappa}$. Ἀλλά τό σύνολο τῶν σημείων K πού ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς εὐθεῖες P, P' εἶναι $\frac{\Lambda_1\Lambda}{\Lambda_1'\Lambda'}=\frac{1}{\kappa}$ σταθερός εἶναι μιά εὐθεία (ε). Ἡ τομή τῆς (ε) μέ τόν S_1 εἶναι σταθερό σημεῖο, ἀπ' ὅπου πρέπει νά περνᾶν ὅλοι οἱ μεταβλητοί ριζικοί ἄξονες S τῶν κύκλων c,c'.

8. Θεωροῦμε τούς κύκλους $\Gamma(O,R)$, $\Gamma'(O',R')$. Ἄν Ω, Ω' εἶναι τό ἐσωτερικό καί τό ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας τους, νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ περιφέρειες πού ἔχουν διάμετρο τό εὐθ. τμῆμα πού ἑνώνει δυό ὁμόλογα πρός Ω' σημεῖα ἀποτελοῦν δίκτυο μέ κέντρο Ω. Τό ἴδιο μέ ἐναλλαγή τῶν Ω, Ω'.

Τό θεώρημα μπορεῖ νά γενικευτῆ μέ τόν ἑπόμενο τρόπο: Ἄς εἶναι $\Sigma_{(\Omega,\varphi,\kappa)}$ ἡ ὁμοιότητα πού μετασχηματίζει τόν Γ στόν Γ' καί M, M' ἀντίστοιχα δύο ὁμόλογα σημεῖα. Οἱ κύκλοι μέ διάμετρο MM' ἀποτελοῦν δίκτυο.

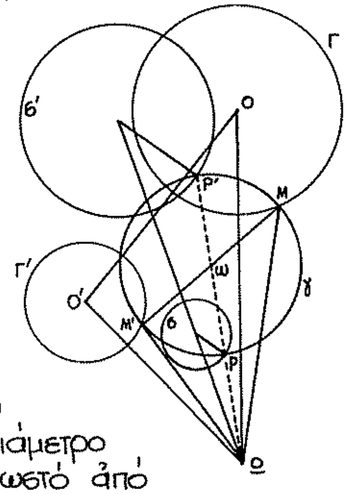
Ἀπόδειξη τοῦ πρώτου μέρους:



Τά σημεῖα M,N εἶναι ἀντιομόλογα πρός Ω, ἄρα $\overline{\Omega N}\cdot\overline{\Omega M}$ = σταθερό καί ἐπειδή $M'\hat{N}M = 1^L$ συμπεραίνουμε ὅτι οἱ περιφέρειες μέ διάμετρο MM' ἀποτελοῦν δίκτυο μέ κέντρο Ω.

Τό ἴδιο γιά τά ὁμόλογα πρός Ω, τά M, M'_1.

Ἀπόδειξη τοῦ δεύτερου μέρους:



Ἄν ω τό κέντρο τῆς περιφέρειας γ μέ διάμετρο MM' φέρνουμε τήν $\Omega P\omega P'$ ὅπου P,P' τά σημεῖα τομῆς τῆς περιφέρειας γ μέ τήν $\Omega\omega$. Τόπος τοῦ P θά εἶναι ἡ περιφέρεια σ, ὅπου $\sigma = \Sigma_{(\Omega,\frac{\Omega P}{\Omega M'},(\widehat{\Omega M',\Omega P}))}[\Gamma']$. Ἀλλά $\frac{\Omega P'}{\Omega P}$ = σταθερό, δηλαδή τόπος τοῦ P' ἡ ὁμοιόθετη τῆς σ πρός Ω μέ λόγο $\frac{\Omega P'}{\Omega P}$ δηλαδή ἡ περιφέρεια σ'. Ἀλλά τότε P,P' ὁμόλογα σ' αὐτή τήν ὁμοιοθεσία καί περιφέρεια μέ διάμετρο PP' εἶναι ἡ γ. Ὅπως εἶναι λοιπόν γνωστό ἀπό τό πρῶτο μέρος οἱ περιφέρειες γ ἀποτελοῦν δίκτυο πρός Ω', πού εἶναι τό κέντρο τῆς ἐσωτερικῆς ὁμοιότητας τῶν σ,σ'.

9. Θεωροῦμε τό σχῆμα F καί τίς ὁμοιότητες $\Sigma_{(O_1,\varphi_1,\kappa_1)} = \Sigma_1$, $\Sigma_{(O_2,\varphi_2,\kappa_2)} = \Sigma_2$. Ἄν $F_1 = \Sigma_1[F]$ καί $F_2 = \Sigma_2[F]$, νά βρεθῆ μετασχηματισμός T τέτοιος πού $F_2 = T[F_1]$. Ἀκόμα ἄν M_1, M_2 ὁμόλογα σημεῖα τοῦ $M \in F$ κατά τίς ὁμοιότητες Σ_1, Σ_2 ἀντίστοιχα καί τό τρίγωνο M_1NM_2 εἶναι ὅμοιο μέ τρίγωνο ΑΒΓ πού ἔχει δοθῆ, νά βρεθῆ ὁ τόπος τοῦ N.

Λύση:

Εἶναι φανερό ὅτι $\Sigma_2^{-1} T \Sigma_1 = I \Rightarrow T = \Sigma_2 \Sigma_1^{-1} = \Sigma_{(O,\varphi_2-\varphi_1,\frac{\kappa_2}{\kappa_1})}$. 163 +

Γιά τό δεύτερο μέρος ~~δές~~ τήν 6.4.5.

10. Οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),\ldots,(O_\nu,R_\nu)$ περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο O. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πολύγωνο μέ τίς κορυφές του $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ στούς κύκλους ἀντίστοιχα, πού μεταβάλλει θέση καί μένει πάντα ὅμοιο μέ τόν ἑαυτό του. +

Ἀπόδειξη:

Ἄς ὀνομάσουμε ω_{ij} τήν γωνία τῶν κύκλων $(O_i,R_i),(O_j,R_j)$. Θεωροῦμε τίς ὁμοιότητες $\Sigma_1(O,\omega_{12},\frac{R_2}{R_1})$, $\Sigma_2(O,\omega_{23},\frac{R_3}{R_2})$, $\ldots$, $\Sigma_\nu(O,\omega_{\nu 1},\frac{R_\nu}{R_1})$. Ἄν $M \in (O_1,R_1)$, θά ἔχουμε

$$M_1 \xrightarrow{\Sigma_1} M_2 \xrightarrow{\Sigma_2} M_3 \xrightarrow{\Sigma_3} \cdots \xrightarrow{\Sigma_{\nu-1}} M_\nu \xrightarrow{\Sigma_\nu} M_1$$

καί M_iM_{i+1} περνᾶ ἀπό τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων $(O_i,R_i),(O_{i+1},R_{i+1})$. Ἀλλά τό τρίγωνο OM_iM_{i+1} κρατᾶ τίς γωνίες του σταθερές. Ἀπ' αὐτό εὔκολα βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι καί τό πολύγωνο $M_1M_2\ldots M_\nu$ κρατᾶ τίς γωνίες του σταθερές.

11. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot \tau_{\vec{u}}$.

Λύση:

Παρατηροῦμε ὅτι $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O,\varphi)}$, ἄρα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot \tau_{\vec{u}} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O,\varphi)} \cdot \tau_{\vec{u}} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O',\varphi)}$, γιατί ὅπως εἶναι γνωστό ἰσχύει $R_{(O,\varphi)} \cdot \tau_{\vec{u}} = R_{(O',\varphi)}$. Ὁπότε $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot \tau_{\vec{u}} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O',\varphi)} = H_{(\varrho,\kappa)} \cdot R_{(\varrho,\varphi)} = \Sigma_{(\varrho,\varphi,\kappa)}$.

Νά γίνουν καί οἱ γεωμετρικές κατασκευές.

12. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot R_{(O',\varphi')}$.

Λύση:

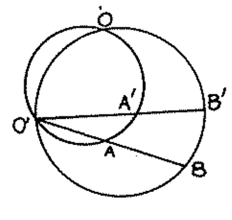
$\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(O,\varphi)}$. Ἀλλά $R_{(O,\varphi)} \cdot R_{(O',\varphi')} = R_{(\varrho,\varphi+\varphi')}$.

Ἄρα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot R_{(O',\varphi')} = H_{(O,\kappa)} \cdot R_{(\varrho,\varphi+\varphi')} = H_{(O_1,\kappa)} \cdot R_{(O_1,\varphi+\varphi')} = \Sigma_{(O_1,\varphi+\varphi',\kappa)}$

Νά γίνουν καί οἱ γεωμετρικές κατασκευές.

13. Δυό τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' εἶναι ὁμόρροπα ὅμοια. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι τά $(\alpha+\alpha')AA'$, $(\beta+\beta')BB'$, $(\gamma+\gamma')\Gamma\Gamma'$ ἐπαληθεύουν τήν τριγωνική ἀνισότητα.

Ἀπόδειξη:



Ἄς εἶναι $\Sigma(O,\omega,\kappa)$ ἡ ὁμοιότητα πού μετασχηματίζει τό ΑΒΓ στό Α'Β'Γ'.

Θά εἶναι $\overset{\triangle}{OAA'} \sim \overset{\triangle}{OBB'}$ Ἄρα $\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}$ (1)

Παρόμοια ἔχουμε $\frac{\Gamma\Gamma'}{BB'} = \frac{O\Gamma}{OB}$ (2).

Ἀπό τό τετράπλευρο ΟΑΒΓ καί σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου (Γεωμετρία, 11-6.1) θά ἔχουμε

$$OB\cdot\beta \leqslant OA\alpha + O\Gamma\cdot\gamma \qquad (3).$$

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}AA' = \frac{\alpha\cdot OA}{\beta\cdot OB}BB' \\ (2) \Longrightarrow \frac{\gamma}{\beta}\Gamma\Gamma' = \frac{\gamma\cdot O\Gamma}{\beta\cdot OB}BB'\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\alpha\cdot AA'+\gamma\cdot\Gamma\Gamma'}{\beta} = \frac{OA\cdot\alpha+O\Gamma\cdot\gamma}{OB\cdot\beta}BB' \quad (4)$$

Τέλος ἀπό τίς (3),(4) $\Longrightarrow \frac{\alpha\cdot AA'+\gamma\cdot\Gamma\Gamma'}{\beta} \geqslant BB'$

Παρόμοια βρίσκουμε $\frac{\alpha'AA'+\gamma'\Gamma\Gamma'}{\beta'} \geqslant BB'$. Οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις μᾶς δίνουν $(\alpha+\alpha')AA' + (\gamma+\gamma')\Gamma\Gamma' \geqslant (\beta+\beta')BB'$.

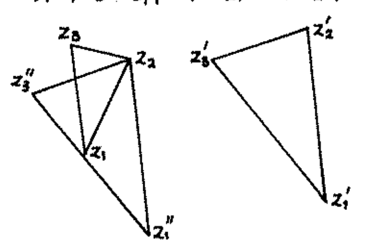
Μέ τόν ἴδιο τρόπο προκύπτουν καί οἱ ἄλλες δύο ἀνισότητες καί ἔτσι τό πρόβλημα λύθηκε.

Θά δώσουμε ἀκόμα μιά λύση, ἀξιόλογη ἐφαρμογή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν στήν γεωμετρία.

Ἀναφερόμαστε στό μιγαδικό ἐπίπεδο καί ἄς εἶναι z_1, z_2, z_3 οἱ μιγαδικοί γιά τά Α,Β,Γ καί z_1', z_2', z_3' οἱ μιγαδικοί γιά τά Α',Β',Γ' ἀντίστοιχα. Ἀπό τήν φανερή σχέση $(z_1-z_1')(z_2-z_2') - (z_1-z_1')(z_3-z_3') = (z_1-z_1')(z_2-z_2') - (z_2-z_2')(z_3-z_3') +$ $+(z_2-z_2')(z_3-z_3') - (z_3-z_3')(z_1-z_1')$ προκύπτει ἡ ἀνισότητα

$$|z_1-z_1'|\,|(z_2-z_3)-(z_2'-z_3')| \leqslant |z_2-z_2'|\,|(z_1-z_3)-(z_1'-z_3')| + |z_3-z_3'|\,|(z_1-z_2)-(z_1'-z_2')| \quad (1)$$

Μεταφέρουμε τό τρίγωνο $z_1'z_2'z_3'$ στή θέση $z_1''z_2z_3''$. Θά εἶναι $z_2\overset{\triangle}{z_3}z_3'' \sim z_2\overset{\triangle}{z_1}z_1''$. Ἄρα



$$\left.\begin{array}{l}|(z_2-z_3)-(z_2'-z_3')| = |(z_1-z_2)-(z_1'-z_2')|\,\frac{|z_2-z_3|}{|z_1-z_2|} \\ |(z_1-z_3)-(z_1'-z_3')| = |(z_1-z_2)-(z_1'-z_3')|\,\frac{|z_1-z_3|}{|z_1-z_2|}\end{array}\right. \quad (2)$$

Ἀντικαθιστοῦμε τίς (2) στήν (1) καί ἔχουμε:

$$|z_1-z_1'||z_2-z_3|\leqslant|z_2-z_2'||z_1-z_3|+|z_3-z_3'||z_1-z_2|.$$

Παρόμοια προκύπτει καί ἡ σχέση:

$$|z_1-z_1'||z_2'-z_3'|\leqslant|z_2-z_2'||z_1'-z_3'|+|z_3-z_3'||z_1'-z_2'|.$$

Ἄν προσθέσουμε κατά μέλη τίς δύο τελευταῖες σχέσεις θά ἔχουμε:

$$|z_1-z_1'|(|z_2-z_3|+|z_2'-z_3'|)\leqslant|z_2-z_2'|(|z_1-z_3|+|z_1'-z_3'|)+|z_3-z_3'|(|z_1-z_2|+|z_1'-z_2'|)$$

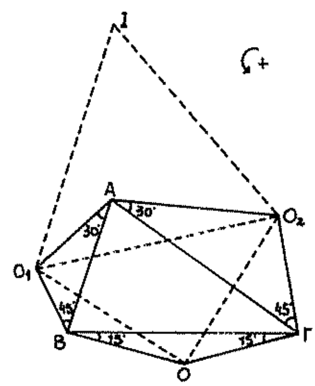
δηλαδή τό ζητούμενο.

14. Στίς πλευρές τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἐξωτερικά τά τρίγωνα AO_1B, $BO\Gamma$, ΓO_2A ἔτσι πού $O_1\widehat{A}B=\Gamma\widehat{A}O_2=30^\circ$, $O_1\widehat{B}A=A\widehat{\Gamma}O_2=45^\circ$, $O\widehat{B}\Gamma=B\widehat{\Gamma}O=15^\circ$. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι τό τρίγωνο O_1OO_2 εἶναι ὀρθογώνιο ἰσοσκελές.

(Παγκόσμια Μαθηματική Ὀλυμπιάδα 1975)

Ἀπόδειξη:

Θεωροῦμε τίς ὁμοιότητες



$$\Sigma_1=\Sigma_{(O_1,105;\frac{O_1B}{O_1A})}$$

$$\Sigma=\Sigma_{(O,150;\frac{1}{1})}$$

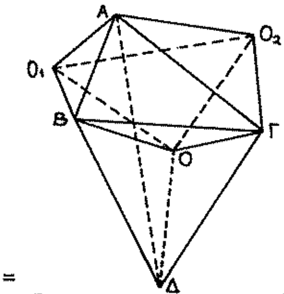
$$\Sigma_2=\Sigma_{(O_2,105;\frac{O_2A}{O_2\Gamma})}.$$

Ἐπειδή $\frac{O_1B}{O_1A}\cdot\frac{O_2A}{O_2\Gamma}=1$ (1) καί $105^\circ+105^\circ+150^\circ=360^\circ$ (2) συμπεραίνουμε ὅτι τό γινόμενο $\Sigma_2\Sigma\Sigma_1$ εἶναι μεταφορά, ἀλλά ἐπειδή τό A εἶναι διπλό σημεῖο της θά εἶναι ταυτότητα. Ἄρα $\Sigma_2\Sigma\Sigma_1=I$ δηλαδή $\Sigma=\Sigma_2^{-1}\cdot\Sigma_1^{-1}$.

Ἡ κατασκευή τοῦ κέντρου τῆς $\Sigma_2^{-1}\cdot\Sigma_1^{-1}$ γίνεται σύμφωνα μέ τήν 6.8.6 καί μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα πού ζητᾶμε.

2η λύση: Κατασκευάζουμε τό τετράπλευρο OO_1IO_2 ἔτσι πού $O\widehat{O_1}I=105^\circ$, $O\widehat{O_2}I=105^\circ$. Θά εἶναι $\frac{O_1I}{O_1O}=\frac{O_1A}{O_1B}=\frac{O_2A}{O_2\Gamma}=\frac{O_2I}{O_2O}$, ὁπότε $O_1O=O_2O$ καί $O_1\widehat{O}O_2=1^L$

3η λύση, μόνο μέ ὅμοια τρίγωνα, μπορεῖ νά γίνη μέ τόν παρακάτω τρόπο: Κατασκευάζουμε τό ἰσόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ. Θά ἔχουμε $\overset{\triangle}{AO_1B}\sim\overset{\triangle}{\Delta OB}\Rightarrow\frac{AB}{BO_1}=\frac{B\Delta}{BO}$ (1). Ἀλλά $A\widehat{B}\Delta=O_1\widehat{B}O=\widehat{B}+60^\circ$. Ἄρα ἀπό τήν τελευταία σχέση καί ἀπό τήν (1) βλέπουμε ὅτι $\overset{\triangle}{AB\Delta}\sim\overset{\triangle}{O_1BO}$. Θά ἔχουμε λοιπόν τίς σχέσεις



$\frac{O_1O}{A\Delta}=\frac{OB}{B\Delta}$ (2) καί $O_1\hat{O}B = A\hat{\Delta}B$.

Παρόμοια βρίσκουμε καί

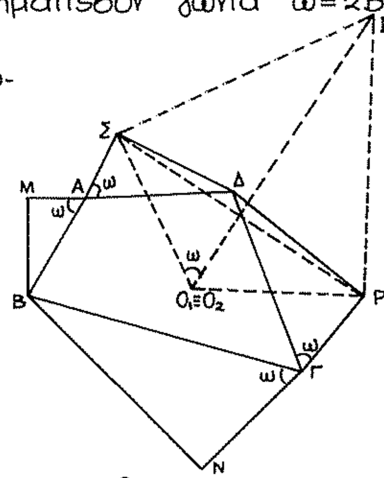
$\frac{OO_2}{A\Delta}=\frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (3) καί $O_2\hat{O}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$.

Ἀκόμα $\frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{OB}{B\Delta}$, ἄρα ἀπό τίς (2),(3) συμπεραίνουμε ὅτι $O_1O = OO_2$. Ἐπίσης $O_1\hat{O}B + O_2\hat{O}\Gamma = A\hat{\Delta}B + A\hat{\Delta}\Gamma = 60^\circ \Rightarrow O_1\hat{O}O_2 = B\hat{O}\Gamma - 60^\circ = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, δηλαδή τό τρίγωνο O_1OO_2 εἶναι ὀρθογώνιο ἰσοσκελές.

15. Στίς πλευρές τετράπλευρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε ἐξωτερικά ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα, δηλαδή $A\overset{\triangle}{M}B \sim \Gamma\overset{\triangle}{N}B \sim \Gamma\overset{\triangle}{P}\Delta \sim A\overset{\triangle}{\Sigma}\Delta$ καί $\hat{M}=1^L$. Νά δείξετε ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα ΜΡ, ΝΣ εἶναι ἴσα καί σχηματίζουν γωνία $\hat{\omega} = 2B\hat{A}M$.

Ἀπόδειξη:

Ὀνομάζουμε $\frac{BM}{AM}=\kappa$ καί θεωροῦμε τό γινόμενο



$\Sigma(\Sigma,\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\cdot\Sigma(P,\frac{\pi}{2},\kappa)\cdot\Sigma(N,\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\cdot\Sigma(M,\frac{\pi}{2},\kappa) =$

$= \Sigma(O,2\pi,1)$. Εἶναι δηλαδή μεταφορά, ἐπειδή ὅμως τό Α εἶναι διπλό σημεῖο θά εἶναι ταυτότητα. Ἄρα

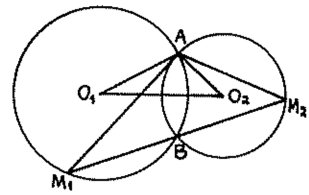
$\Sigma(\Sigma,\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\cdot\Sigma(P,\frac{\pi}{2},\kappa) = \Sigma^{-1}(M,\frac{\pi}{2},\kappa)\cdot\Sigma^{-1}(N,\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa}) =$

$= \Sigma(M,-\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\cdot\Sigma(N,-\frac{\pi}{2},\kappa)$.

Ἄν λοιπόν ὀνομάσουμε $\Sigma(\Sigma,\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\cdot\Sigma(P,\frac{\pi}{2},\kappa)=R(O_1,\pi)$ καί $\Sigma(M,-\frac{\pi}{2},\frac{1}{\kappa})\,\Sigma(N,-\frac{\pi}{2},\kappa) = R(O_2,-\pi)=R(O_2,\pi)$, ἐπειδή εἶναι $R(O_1,\pi)=R(O_2,\pi)$ θά ἔχουμε $O_1\equiv O_2$. Ἡ γεωμετρική κατασκευή τοῦ $O_1\equiv O_2$ γίνεται σύμφωνα μέ τήν 6.8.6, ἄρα $I\overset{\triangle}{\Sigma}O_1 \sim \Delta\overset{\triangle}{\Sigma}A \sim I\overset{\triangle}{P}O_1$. Ἀπό ἐδῶ βλέπουμε λοιπόν ὅτι $PM = R(O_1,2\omega)[\Sigma N]$. Αὐτό ὅμως ἀποδεικνύει τήν ἄσκηση.

16. Ἄς πάρουμε δυό κύκλους (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) πού τέμνονται στά Α,Β. Ὅπως εἶναι γνωστό τά σημεῖα Α,Β βρίσκονται στόν κύκλο ὁμοιότητος. Ἄν τά σημεῖα M_1,M_2 εἶναι σημεῖα τῶν δύο κύκλων ἀντίστοιχα καί εἶναι ὁμόλογα κατά τὴν ὁμοιότητα $\Sigma = \Sigma_{(A,\varphi,\frac{R_2}{R_1})}$, ὅπου $\varphi = (\overline{AO_1}, \overline{AO_2})$, τότε ἡ εὐθεία M_1M_2 περνᾶ ἀπὸ τὸ B.

Ἀπόδειξη:



Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

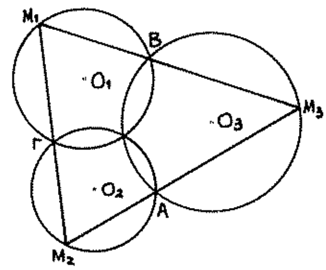
$$\overset{\triangle}{AO_2M_2} = \Sigma[\overset{\triangle}{AO_1M_1}],$$

δηλαδὴ $O_1\overset{\triangle}{A}O_2 \sim M_1\overset{\triangle}{A}M_2$, ἄρα $A\hat{O}_1O_2 = A\hat{M}_1M_2$.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία M_1M_2 περνᾶ ἀπὸ τὸ B.

17. Τρεῖς κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ περνᾶν ἀπ' τὸ σημεῖο O. Ὀνομάζουμε A τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων $(O_2),(O_3)$, B τὸ δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν $(O_1),(O_3)$ καὶ Γ τῶν $(O_1),(O_2)$. Ἂν M_1 τυχαῖο σημεῖο τοῦ (O_1), φέρνουμε τὴν $M_1\Gamma$ ποὺ τέμνει τὸν (O_2) στὸ M_2. Ἡ M_2A τέμνει τὸν (O_3) στὸ M_3. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ M_3B τέμνει τὸν κύκλο (O_1) στὸ M_1. Ὅταν τὸ M_1 κινεῖται στὴν (O_1) νὰ μελετηθῆ ἡ κίνηση τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$.

Ἀπόδειξη:



Θεωροῦμε τὶς ὁμοιότητες $\Sigma_1 = \Sigma_{(O,\varphi_3,\frac{R_2}{R_1})}$, $\Sigma_2 = \Sigma_{(O,\varphi_1,\frac{R_3}{R_2})}$ καὶ $\Sigma_3 = \Sigma_{(O,\varphi_2,\frac{R_1}{R_3})}$, ὅπου $\varphi_1 = (\overline{OO_2}, \overline{OO_3})$ $\varphi_2 = (\overline{OO_3}, \overline{OO_1})$ καὶ $\varphi_3 = (\overline{OO_1}, \overline{OO_2})$.

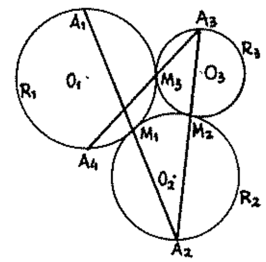
Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι $\Sigma_3 \cdot \Sigma_2 \cdot \Sigma_1 = \Sigma_{(O,2\pi,1)}$, δηλαδὴ μεταφορά. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ O εἶναι διπλὸ σημεῖο εἶναι ταυτότητα. Ἔχουμε λοιπὸν τώρα $M_2 = \Sigma_1[M_1]$, $M_3 = \Sigma_2[M_2]$ καὶ $M = \Sigma_3[M_3]$ ἢ $M = \Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1[M_1]$. Ἀλλὰ $\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1 = 1$, ἄρα $M \equiv M_1$.

Ἂν τώρα $M_1'\overset{\triangle}{M_2'}M_3'$ μιὰ ἄλλη θέση τοῦ $M_1\overset{\triangle}{M_2}M_3$ μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι τὸ $M_1'\overset{\triangle}{M_2'}M_3'$ προέρχεται ἀπ' τὸ $M_1\overset{\triangle}{M_2}M_3$ μὲ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,(\overline{OM_1},\overline{OM_1'}),\frac{OM_1'}{OM_1})}$.

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ἂν $M_1\overset{\triangle}{M_2}M_3 \sim A\overset{\triangle}{B}\Gamma$, οἱ AB, BΓ, ΓA θὰ εἶναι ἐφαπτόμενες τῶν ἀντίστοιχων περιφερειῶν καὶ τὸ σημεῖο O θὰ εἶναι τὸ σημεῖο Brogard τοῦ $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$. Ἂν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι τὰ A, B, Γ βρίσκονται σὲ εὐθεία, τὸ O θὰ βρίσκεται στὸν κύκλο $M_1M_2M_3$ καὶ ἡ εὐθεία ABΓ θὰ εἶναι ἡ γενικευμένη εὐθεία Simson τοῦ $M_1\overset{\triangle}{M_2}M_3$ γιὰ τὸ σημεῖο O.

18. Οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),\dots,(O_\nu,R_\nu)$ ἐφάπτονται διαδοχικά ἐξωτερικά στά σημεῖα $M_1,M_2,\dots,M_\nu$. Ἄν A_1 τυχαῖο σημεῖο τοῦ (O_1,R_1) φέρνουμε τήν εὐθεία A_1M_1 πού τέμνει τόν (O_2,R_2) στό A_2. Ἐπίσης τήν A_2M_2 πού τέμνει τόν (O_3,R_3) στό A_3. Ἄν συνεχίσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο θά πάρουμε τελικά στήν (O_1,R_1) τό σημεῖο $A_{\nu+1}$ ὅπου τέμνει ἡ εὐθεία $A_\nu M_\nu$ τόν κύκλο (O_1,R_1). Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν $\nu=$περιττός τά σημεῖα $A_1,A_{\nu+1}$ εἶναι ἀντιδιαμετρικά, ἐνῶ ἄν $\nu=$ἄρτιος τά σημεῖα $A_1,A_{\nu+1}$ συμπίπτουν

Ἀπόδειξη:



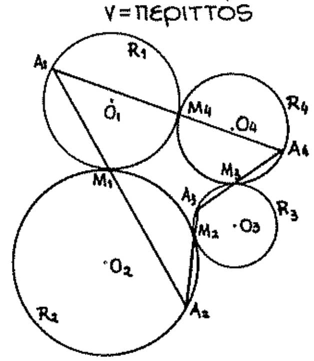
ν=περιττός

Θεωροῦμε τίς διαδοχικές ὁμοιοθεσίες $H_1=H_{(M_1,-\frac{R_2}{R_1})}$, $H_2=H_{(M_2,-\frac{R_3}{R_2})}$, $\dots$, $H_\nu=H_{(M_\nu,-\frac{R_1}{R_\nu})}$. Θά εἶναι:

$$A_{\nu+1}=H_\nu H_{\nu-1}\cdots H_1[A_1]=H[A],$$

ὅπου $H=H_{(O,\kappa=(-1)^\nu\frac{R_2}{R_1}\frac{R_3}{R_2}\cdots\frac{R_1}{R_\nu})}$.

(α) Ἄν $\nu=$περιττός, τότε $\kappa=-1$, δηλαδή H εἶναι ὁμοιοθεσία μέ λόγο -1. Ἐπειδή ὅμως ὁ κύκλος (O_1) μετασχηματίζεται στόν ἑαυτό του θά ἔχουμε $O\equiv O_1$. Ἄρα καί $A_{\nu+1}$ ἀντιδιαμετρικό τοῦ A_1.



ν=ἄρτιος

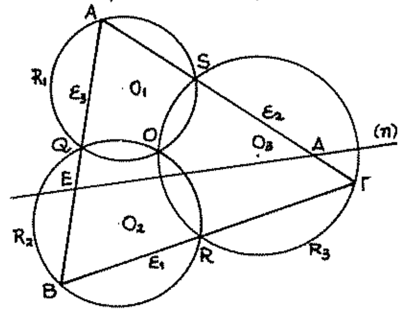
(β) Ἄν $\nu=$ἄρτιος, τότε $\kappa=1$ καί ἡ H εἶναι μεταφορά. Ἐπειδή ὅμως ὁ (O_1) μετασχηματίζεται στόν ἑαυτό του, θά εἶναι ἡ H ταυτότητα, δηλαδή $A_{\nu+1}\equiv A_1$.

Παρατήρηση: Ἄν $R_2\to\infty \Rightarrow (O_2,R_2)\to\varepsilon$ ὅπου ε μιά εὐθεία. Τό θεώρημα ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύη. Νά γίνη διατύπωση τῆς νέας μορφῆς του.

19. Πολύγωνο Π μεταβλητό κατά τήν θέση του παραμένει ὅμοιο μέ πολύγωνο P πού ἔχει δοθῆ, ἐνῶ τρεῖς εὐθεῖες του, πού δέν περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο, περνᾶν ἀπό τρία σταθερά σημεῖα R,S,Q. Θά ἀποδείξουμε ὅτι καί κάθε ἄλλη εὐθεία τοῦ πολυγώνου περνᾶ ἐπίσης ἀπό σταθερό σημεῖο.

Ἀπόδειξη:

Ἄς θεωρήσουμε τίς τρεῖς εὐθεῖες $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ πού τέμνονται στὰ Α,Β,Γ καὶ περνᾶν ἀπὸ τὰ R,S,Q ἀντίστοιχα. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ κρατᾶ τὶς γωνίες του σταθερές. Ἄρα τὰ σημεῖα Α,Β,Γ βρίσκονται σὲ τρία κυκλικὰ τόξα κύκλων $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ περνᾶνε ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο, ποὺ εἶναι κέντρο ὁμοιότητας γιὰ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.



Ἂς πάρουμε τώρα μιὰ εὐθεία (π) τοῦ Π καὶ ἂς εἶναι $E=(\pi)\cap AB$, $\Delta=(\pi)\cap A\Gamma$. Θὰ εἶναι $\frac{AE}{EB}=\kappa_1$ (σταθ.), $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\kappa_2$ (σταθ.). Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ΔΕ περνᾶ ἀπὸ σταθερὸ σημεῖο. Πραγματικά, οἱ κύκλοι OQE, OSΔ τέμνονται σὲ σημεῖο Μ τῆς ΕΔ. Οἱ κύκλοι ὅμως αὐτοὶ εἶναι σταθεροί, ἄρα καὶ τὸ σημεῖο Μ εἶναι σταθερό.

Παρατηρήσεις: (α) Μπορούσαμε ἀντὶ γιὰ τὸ πολύγωνο Π νὰ παίρναμε ἕνα τυχαῖο σχῆμα F, ποὺ κατὰ τὴν κίνησή του ἔμενε πάντα ὅμοιο μὲ τὸν ἑαυτό του.

(β) Ἂν Μ′ σημεῖο τοῦ Π καὶ x_1,x_2 δύο εὐθεῖες τοῦ σχήματος ποῦ περνᾶν ἀπ' τὸ σημεῖο Μ, τότε οἱ x_1,x_2 θὰ περνᾶν ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα M_1,M_2. Ἄρα τὸ Μ θὰ βρίσκεται σὲ τόξο κύκλου χορδῆς M_1M_2 ποὺ δέχεται γωνία $M_1\hat{M}M_2=$ σταθ.

20. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἕνα σχῆμα F καὶ τὴν ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,f(\varphi))}$, ὅπου $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$, $f(\varphi)$ συνάρτηση συνεχὴς πρὸς φ στὸ διάστημα $[f(\varphi_0),f(\varphi_1)]$. Θεωροῦμε τὴν συνεχῆ μεταβολὴ τοῦ F κατὰ τὴν ὁμοιότητα Σ καὶ ἂς εἶναι F_0,F_1 ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ θέση του ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς τιμὲς $\varphi=\varphi_0$ καὶ $\varphi=\varphi_1$. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἂν τυχαῖο σημεῖο $A\in F$ γράφει μιὰ γραμμὴ c, ὅταν τὸ F κινεῖται κατὰ τὴν ὁμοιότητα Σ, τότε καὶ κάθε ἄλλο σημεῖο $M\in F$ θὰ γράφη γραμμὴ ὅμοια μὲ τὴν c.

Ἀπόδειξη:

Ἂς εἶναι A',M' τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν Α,Μ ὅταν $\varphi=\varphi'$. Θὰ εἶναι $O\hat{A}M\sim O\hat{A'}M'$. Ἀκόμα θὰ εἶναι:

$$M'=\Sigma_{(O,\frac{OM}{OA},A\hat{O}M)}[A'].$$

Ἄρα τό M' θά γράφη τήν καμπύλη $c' = \Sigma_{(O, \frac{OM}{OA}, A\hat{O}M)}[c]$.

Παρατηρήσεις:

(α) Ἄν τό A γράφη κύκλο (O, OA) καί τό M θά γράφη τόν ὁμόκεντρο κύκλο (O, OM). Ἡ ὁμοιότητα θά εἶναι στροφή, δηλαδή $f(\varphi) = 1$

(β) Ἄν τό A γράφη εὐθεία πού περνᾶ ἀπ' τό O τό ἴδιο θά συμβαίνη καί μέ τό σημεῖο M. Ἡ ὁμοιότητα θά εἶναι ὁμοιοθεσία.

(γ) Ἡ καμπύλη c καθορίζει τήν συνάρτηση $f(\varphi)$.

(δ) Παρόμοια μπορεῖ νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν εὐθεία $\varepsilon \in F$ περιβάλλει καμπύλη c, τότε κάθε σταθερή εὐθεία $\eta \in F$ περιβάλλει σταθερή καμπύλη c' ὅμοια μέ τήν c.

21. Δύο κύκλοι (O, R) καί (O', R') τέμνονται στά A καί B. Ἄν Σ τό ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ $A\Sigma$ εἶναι ἐξωτερική διχοτόμος τῆς γωνίας OAO'.

22. Δίνονται τρεῖς κύκλοι $(O_1), (O_2), (O_3)$ πού ἐφάπτονται ἀνά δύο στά σημεῖα A, B, Γ ἀντίστοιχα (οἱ $(O_1), (O_2)$ στό Γ, οἱ $(O_1), (O_3)$ στό B κ.τ.λ.). Οἱ εὐθεῖες AB καί $A\Gamma$ τέμνουν τόν (O_1) στά E, Δ. Νά ἀποδεῖξτε ὅτι τά σημεῖα E, Δ εἶναι ἀντιδιαμετρικά καί ἀκόμα ὅτι ἡ $E\Delta$ εἶναι παράλληλη μέ τήν εὐθεία O_2O_3.

23. Ἐξετάστε τήν ὁμοιοθεσία τριῶν κύκλων τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου, πού τό λιγώτερο δυό ἀπ' αὐτούς εἶναι ἴσοι.

24. Δυό κύκλοι ἐφάπτονται στό A, ἀπ' ὅπου φέρνουμε μιά τυχαία εὐθεία πού τέμνει τούς κύκλους στά B καί Γ ἀντίστοιχα. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων στά B καί Γ εἶναι παράλληλες.

25. Θεωροῦμε τό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$. Ἄν προεκτείνουμε τίς πλευρές του $A\Delta$ καί $B\Gamma$ τέμνονται στό M. Ἄν N τό σημεῖο ὅπου τέμνονται οἱ διαγώνιες ἀποδεῖξτε ὅτι:

(α) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα $ABM, \Delta\Gamma M$ ἐφάπτονται.

(β) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα ΑΒΝ, ΔΓΝ ἐφάπτονται.

(γ) Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν δύο πρώτων κύκλων εἶναι ἴσος μέ τόν λόγο τῶν ἀκτίνων τῶν δύο ἄλλων κύκλων.

26. Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου περνᾶ ἀπ' τό σημεῖο τομῆς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν ὅπως καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων.

27. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος στό τρίγωνο ΑΒΓ ἐφάπτεται μέ τήν ΒΓ στό Δ. Ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος στήν γωνία Α ἐφάπτεται μέ τήν ΒΓ στό Δ'. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΔ' τέμνει τόν ἐγγεγραμμένο κύκλο σέ σημεῖο ἀντιδιαμετρικό τοῦ Δ. Κατόπιν ἀποδεῖξτε τήν ἄσκ. 1161 τοῦ πρώτου τεύχους τῆς Γεωμετρίας.

28. Ἄς εἶναι A_1, A_2, A_3, A_4 τέσσερα σημεῖα σ' ἕνα κύκλο καί O_1, O_2, O_3, O_4 τά κέντρα τῶν κύκλων Euler τῶν τριγώνων $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι τά τετράπλευρα $A_1A_2A_3A_4$ καί $O_1O_2O_3O_4$ εἶναι ὁμοιόθετα.

29. Ἄς εἶναι Ρ ἕνα τυχαῖο σημεῖο στό ἐπίπεδο τριγώνου ΑΒΓ καί P_1, P_2, P_3 τά συμμετρικά του πρός τά μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες AP_1, BP_2, ΓP_3 περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο Μ. Ἄν τό σημεῖο Ρ γράφη τήν καμπύλη c, ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ Μ;

30. Νά βρεθῆ τό γινόμενο τριῶν ὁμοιοθεσιῶν.

31. Θεωροῦμε τό τρίγωνο ΑΒΓ. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι:

(α) Οἱ τρεῖς εὐθεῖες πού συνδέουν τίς κορυφές μέ τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν μέ τούς ἀντίστοιχους παρεγγεγραμμένους κύκλους περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο Ν (σημεῖο τοῦ Nagel, ἄσκ. 1045, Α' τεῦχος).

(β) Τό ἔγκεντρον Ι τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$, τό βαρύκεντρο G τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$, τό ἔγκεντρον I_1 τοῦ μεσοτριγώνου τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$ καί τό σημεῖο Ν εἶναι σέ εὐθεία.

32. Ὁ κύκλος Euler πολύγωνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο.

(1) Κύκλος τοῦ Euler εὐθ. τμήματος AB εἶναι ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό μέσο τοῦ AB καί ἀκτίνα $\frac{AB}{2}$.

(2) Κύκλος τοῦ Euler τριγώνου $ΑΒΓ$ ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (O,R) εἶναι ὁ κύκλος πού περνᾶ ἀπό τά κέντρα τῶν κύκλων Euler τῶν εὐθ. τμημάτων $AB, ΒΓ, ΓΑ$. Ἡ ἀκτίνα του ὅπως εἶναι γνωστό εἶναι $\frac{R}{2}$.

(3) Ἄν $ΑΒΓΔ$ τετράπλευρο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (O,R) καί O_1, O_2, O_3, O_4 τά κέντρα τῶν κύκλων Euler τῶν τριγώνων $ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ$ ἀντίστοιχα, τότε τά σημεῖα O_1, O_2, O_3, O_4 βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο (O', R') πού ὀνομάζεται κύκλος Euler τοῦ τετράπλευρου καί εἶναι $R' = \frac{R}{2}$.

(4) Ἄν $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (O,R) τά κέντρα τῶν κύκλων Euler τῶν τετράπλευρων $ΑΒΓΔ, ΒΓΔΕ, ΓΔΕΑ, ΔΕΑΒ, ΕΑΒΓ$ ὁρίζουν πεντάγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (O', R') πού ὀνομάζεται κύκλος Euler τοῦ $ΑΒΓΔΕ$. Ἀποδεικνύεται πάλι ὅτι $R' = \frac{R}{2}$.

(5) Συνεχίζοντας ὁρίζουμε τόν κύκλο τοῦ Euler ν-γώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (O,R).

33. Κέντρο βάρους πολύγωνου.

(1) Κέντρο βάρους εὐθ. τμήματος ὁρίζουμε τό μέσο του.

(2) Τά κέντρα βάρους τῶν πλευρῶν σ' ἕνα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ὁρίζουν ἕνα τρίγωνο ὁμοιόθετο μέ τό $ΑΒΓ$ μέ λόγο $-\frac{1}{2}$. Τό κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν δύο τριγώνων εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ $\widehat{ΑΒΓ}$. Τό σημεῖο αὐτό τό ὀνομάζουμε κέντρο βάρους τοῦ $\widehat{ΑΒΓ}$.

(3) Ἄν $ΑΒΓΔ$ ἕνα τετράπλευρο, τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων $ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ$ εἶναι κορυφές τετράπλευρου ὁμοιόθετου μέ τό $ΑΒΓΔ$ μέ λόγο $-\frac{1}{3}$. Τό κέντρο αὐτῆς τῆς ὁμοιοθεσίας ὀνομάζουμε κέντρο βάρους τοῦ τετράπλευρου.

(4) Συνεχίζοντας ἔτσι, ἄν $A_1A_2\cdots A_\nu$ ἕνα ν-γωνο τά κέντρα βάρους τῶν $A_1A_2\cdots A_{\nu-1}, A_2A_3\cdots A_\nu, \cdots, A_1\cdots A_{\nu-2}A_\nu$ $(\nu-1)$-γώνων ὁρίζουν ν-γωνο ὁμοιόθετο μέ τό $A_1A_2\cdots A_\nu$ μέ λόγο $-\frac{1}{\nu-1}$. Τό σημεῖο αὐτό τό ὀνομάζουμε κέντρο βάρους τοῦ $A_1A_2\cdots A_\nu$.

Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ἀκόμα ὅτι τό κέντρο βάρους πολύγωνου, ὅπως τό ὁρίσαμε παραπάνω, συμπίπτει ἀπό φυσική ἄποψη μέ τό κέντρο βάρους συστήματος ν ὑλικῶν σημείων μάζας m πού βρίσκονται στίς κορυφές τοῦ πολύγωνου.

34. Νά βρεθῆ ὁ μετασχηματισμός T ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$R_{(O,\varphi)} \cdot H_{(\varrho,\kappa)} \cdot T = H_{(\varrho,\kappa)} \cdot R_{(O,\varphi)}.$$

Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ T εἶναι μεταφορά καί νά βρεθῆ τό διάνυσμά της.

35. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot R_{(O',\varphi')}$.

36. Νά βρεθῆ τό γινόμενο $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)} \cdot H_{(O',\kappa')}$.

37. Ἡ ὁμοιότητα $\Sigma_{(O,\varphi,\kappa)}$ μπορεῖ νά ἀναλυθῆ σέ γινόμενο μιᾶς ὁμοιοθεσίας ἐπί μιά στροφή (μέ ἄπειρους τρόπους) μέ κέντρα O, O', πού τό ἕνα ἀπ' αὐτά μποροῦμε νά τό διαλέξουμε αὐθαίρετα. Ἀποδεῖξτε ὅτι τά O, O' εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ὁμοιότητα. Προσδιορῖστε αὐτή τήν ὁμοιότητα.

38. Οἱ κύκλοι (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) τέμνονται στά σημεῖα A καί B. Ἀπό τό A φέρνουμε μιά μεταβλητή εὐθεία πού τέμνει τόν (O_1,R_1) στό Γ_1 καί τόν (O_2,R_2) στό Γ_2. Οἱ ἐφαπτόμενες τῶν (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) στά Γ_1 καί Γ_2 ἀντίστοιχα τέμνονται στό M. Ἀπό τά κέντρα O_1, O_2 φέρνουμε τίς παράλληλες πρός τίς ἐφαπτόμενες στά Γ_1, Γ_2 ἀντίστοιχα. Ἄν N τό σημεῖο τομῆς αὐτῶν τῶν παραλλήλων νά ἀποδειχτῆ ὅτι (α) ἡ εὐθεία MN περνᾶ ἀπό τό B καί (β) τό εὐθ. τμῆμα MN ἔχει σταθερό μῆκος.

39. Τέσσερες εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο καί σχηματίζουν τέσσερα τρίγωνα. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι αὐτῶν τῶν τριγώνων περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο. (Σημεῖο Miquel)

40. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ λέγονται προβολικά ὅταν οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τίς ὁμόλογες κορυφές περνᾶν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τότε, ὅπως εἶναι γνωστό, θά ἰσχύη τό θεώρημα τοῦ Dejark (Α' τεῦχος, 11.9), δηλαδή οἱ ὁμόλογες πλευρές θά τέμνωνται σέ σημεῖα πού βρίσκονται σέ εὐθεία.

Ἄς εἶναι λοιπόν x_β, x_γ οἱ ἀποστάσεις τοῦ Α' ἀπό τίς πλευρές β,γ· y_α, y_γ οἱ ἀποστάσεις τοῦ Β' ἀπό τίς α,γ καί z_α, z_β οἱ ἀποστάσεις τοῦ Γ' ἀπό τίς α,β. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι τά ΑΒΓ, Α'Β'Γ' προβολικά εἶναι $\frac{x_\gamma \cdot y_\alpha \cdot z_\beta}{x_\beta \cdot y_\gamma \cdot z_\alpha} = 1$.

41. Ἄν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ τρεῖς ὁμοιότητες μέ $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 = I$ καί $\varepsilon_1 = \Sigma_1\varepsilon$, $\varepsilon_2 = \Sigma_2\varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = \Sigma_3\varepsilon_2$, ὅπου ε τυχαία εὐθεία στό ἐπίπεδο, τότε: (α) Τά δύο τρίγωνα $O_1O_2O_3$, ὅπου O_i τό κέντρο τῆς Σ_i, $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2\ \varepsilon_2\cap\varepsilon_3\ \varepsilon_3\cap\varepsilon_1$ εἶναι προβολικά. (β) Οἱ εὐθεῖες $O_1\,\varepsilon_1\cap\varepsilon_3$, $O_2\,\varepsilon_2\cap\varepsilon_1$, $O_3\,\varepsilon_3\cap\varepsilon_2$ περνᾶν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Κ τοῦ κύκλου $O_1O_2O_3$, πού ὀνομάζεται κύκλος ὁμοιότητας τῶν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. (Χρησιμοποιεῖστε καί τό ὅτι $\theta = (\overline{O\,\varepsilon\cap\varepsilon_1}, \bar{\varepsilon})$ = σταθερή γιά κάθε ε ὅταν $\varepsilon_1 = \Sigma_{(O,\omega,\kappa)}[\varepsilon]$). (γ) Ἄν οἱ τρεῖς εὐθεῖες $h, \Sigma_1 h, \Sigma_2\Sigma_1 h$ τέμνωνται, τό σημεῖο τομῆς τους θά βρίσκεται στόν κύκλο ὁμοιότητας τῶν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ καί οἱ εὐθεῖες αὐτές θά περνᾶν ἀπό τρία σταθερά σημεῖα P_1, P_2, P_3 τοῦ κύκλου ὁμοιότητας

42. Ἄν $\alpha \nparallel \beta$ καί α, β, γ εὐθεῖες πού δέν περνᾶν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τότε:

$$(P\widehat{Q}R) \sim (\beta\cap\gamma\ \widehat{\gamma\cap\alpha}\ \alpha\cap\beta) \Longleftrightarrow S_R \cdot S_Q \cdot S_\alpha \cdot S_\gamma\, S_Q \cdot S_P \cdot S_\gamma \cdot S_\beta\, S_P \cdot S_R \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = I.$$

43. Ἕνα σχῆμα F κινεῖται ἔτσι πού νά μένη ὅμοιο μέ σχῆμα F' πού ἔχει δοθῆ καί ἀκόμα τρία σημεῖα του A_1, A_2, A_3 νά διαγράφουν τρεῖς ὅμοιες γραμμές c_1, c_2, c_3 ἀντίστοιχα. Νά ἀποδεῖξτε ὅτι καί κάθε ἄλλο σημεῖο τοῦ σχήματος F διαγράφει γραμμή ὅμοια μέ τήν c_1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

7.1. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο O καί p ἕνα θετικό ἤ ἀρνητικό τετράγωνο, δηλαδή $p=+h^2$ ἤ $p=-h^2$, ὅπου h εὐθύγραμμο τμῆμα. Σέ κάθε σημεῖο $M \neq O$ ἀντιστοιχοῦμε τό σημεῖο M′ τῆς εὐθείας OM ἀπό τή σχέση

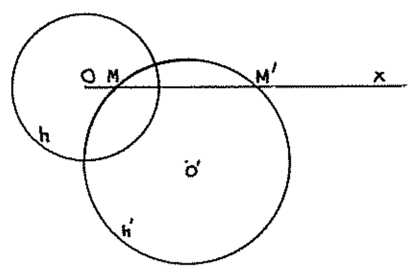
$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p.$$

Συμβολισμός: $M' = \mathcal{J}_{(O,p)}[M]$ ἤ $M' = \mathcal{J}_{(O,p)}M$.

Ὁ μετασχηματισμός $\mathcal{J}_{(O,p)}$ λέγεται ἀντιστροφή μέ πόλο (ἤ κέντρο) ἀντιστροφῆς O καί μέ δύναμη ἀντιστροφῆς p. Τό σημεῖο M′ ἀντίστροφο (ἤ ὁμόλογο) τοῦ M κατά τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,p)}$.

(1) Ἄν $p=+h^2$.

Τότε κάθε κύκλος πού περνᾶ ἀπό τά M, M′ τέμνει ὀρθογώνια τόν κύκλο (O,h).



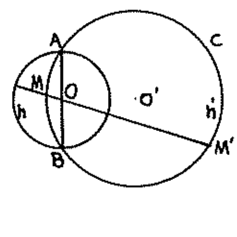
Ἀντίστροφα, ἄς πάρουμε ἕνα κύκλο c ἀπ' τό δίκτυο (O/h^2) (τεῦχος Α′, 10.1). Ὅποια εὐθεία περνᾶ ἀπ' τό O τέμνει τόν c σέ δύο σημεῖα M, M′, ὅπου

$$M' = \mathcal{J}_{(O,h^2)}[M].$$

$$h^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = OO'^2 - h'^2 \Rightarrow h^2 + h'^2 = OO'^2.$$

2) Ἄν $p=-h^2$.

Τότε κάθε κύκλος πού περνᾶ ἀπό τά M, M′ τέμνει τόν κύκλο (O,h) κατά διάμετρο.



Ἀντίστροφα, ἄν πάρουμε ἕνα κύκλο c πού τέμνει κατά διάμετρο τόν (O,h), ὅποια εὐθεία περνᾶ ἀπ' τό O τέμνει τόν c σέ δύο σημεῖα M, M', ὅπου

$$M' = \mathcal{J}_{(O,-h^2)}[M].$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{OM}\cdot\overline{OM'} &= -h^2 \\ \overline{OM}\cdot\overline{OM'} &= OO'^2 - h'^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h'^2 + (ih)^2 = OO'^2.$$

Ὁ κύκλος $(O, \sqrt{p})$ θά λέγεται ἀπό δῶ καί πέρα **κύκλος ἀντιστροφῆς**. Ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς εἶναι πραγματικός ἄν $p = +h^2$, φανταστικός ἄν $p = -h^2$.

7.2.

(1) Ἡ ἀντιστροφή εἶναι κανονικός μετασχηματισμός.

(2) Ἡ ἀντιστροφή εἶναι ἐνέλιξη, γιατί

$$M = \mathcal{J}^2_{(O,p)}[M] \Longrightarrow \mathcal{J}^2_{(O,p)} = I.$$

(3) Ἄν $p = +h^2$, τά διπλᾶ σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ εἶναι τά σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ἀντιστροφῆς (O,h).

Ἄν $p = -h^2$ ὁ μετασχηματισμός δέν ἔχει κανένα διπλό σημεῖο.

(4) Τό ζευγάρι $(\{\mathcal{J}\}, \cdot)$ ὅπου $\{\mathcal{J}\}$ τό σύνολο τῶν ἀντιστροφῶν καί "$\cdot$" τό γινόμενο δύο ἀντιστροφῶν δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα.

7.3. Βασικό θεώρημα τῆς ἀντιστροφῆς.

Ἄς εἶναι M', N' τά ἀντίστροφα δύο σημείων M, N κατά τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,p)}$. Τά M, N δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία μέ τό O θά εἶναι

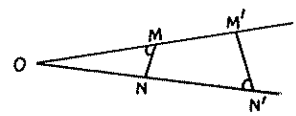
$$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = \overline{ON}\cdot\overline{ON'} = p.$$

Ἄρα τά σημεῖα M, M', N, N' εἶναι ὁμοκυκλικά.

Θεώρημα: Δύο σημεῖα M, N δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία μέ τόν πόλο ἀντιστροφῆς καί ἄς εἶναι M', N' τά ἀντίστροφά τους. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα $M'N'$ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$M'N' = \frac{|p|}{OM\cdot ON}\, MN.$$

Ἀπόδειξη:



Τά δύο τρίγωνα $OMN, ON'M'$ εἶναι ὅμοια, ἄρα

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON} = \frac{OM\cdot OM'}{OM\cdot ON} = \frac{|p|}{OM\cdot ON}.$$

Ἄν τά σημεῖα M, N βρίσκονται σέ εὐθεία μέ τό O θά ἔχουμε

$$\overline{M'N'} = \overline{ON'} - \overline{OM'} = \frac{p}{\overline{ON}} - \frac{p}{\overline{OM}} = \frac{-p\cdot\overline{MN}}{\overline{OM}\cdot\overline{ON}}$$

7.4. Ὁ μετασχηματισμὸς εὐθείας καὶ κύκλου.

(1) Τὸ ἀντίστροφο εὐθείας ποὺ περνᾶ ἀπ' τὸν πόλο ἀντιστροφῆς.

Ἡ ἀντιστροφὴ $\mathfrak{J}_{(O,p)}$ μετασχηματίζει κάθε σημεῖο Μ εὐθείας (ε) ποὺ περνᾶ ἀπ' τὸ Ο, σὲ σημεῖο Μ' τῆς (ε) καὶ ἀντίστροφα. Δηλαδή, τὸ ἀντίστροφο τῆς εὐθείας (ε) εἶναι ἡ ἴδια ἡ εὐθεία (ε). Τὸ ὁμόλογο τοῦ Ο εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖο τῆς εὐθείας, γιατί $\overline{OM'} = \frac{p}{\overline{OM}}$ καὶ ἂν $M \to O$, $\frac{p}{\overline{OM}} \to \infty$, δηλαδὴ $\overline{OM'} \to \infty$, $M' \to \infty$.

Ἂς πάρουμε τώρα στὴν (ε) τὴν τετράδα τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ μὲ τετμημένες Α(α), Β(β), Γ(γ), Δ(δ). Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ σημειοσειρὰ καὶ πάρουμε τὰ ἀντίστροφά τους Α'(α'), Β'(β'), Γ'(γ'), Δ'(δ') μὲ πόλο Ο ποὺ νὰ ἀνήκη στὴν (ε), τότε καὶ τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' θὰ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ σημειοσειρά. Γιατί, ὅπως εἶναι γνωστὸ (Α' τεῦχος γεωμετρίας, 8-2.2): ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἀποτελοῦν τὰ Α, Β, Γ, Δ ἁρμονικὴ διαίρεση εἶναι $2(\alpha\beta+\gamma\delta) = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$.

Ἀλλὰ $\alpha = \frac{p}{\alpha'}$, $\beta = \frac{p}{\beta'}$, $\gamma = \frac{p}{\gamma'}$, $\delta = \frac{p}{\delta'}$, ἄρα θὰ ἔχουμε

$$2\left(\frac{p^2}{\alpha'\beta'} + \frac{p^2}{\gamma'\delta'}\right) = \left(\frac{p}{\alpha'} + \frac{p}{\beta'}\right)\left(\frac{p}{\gamma'} + \frac{p}{\delta'}\right) \Rightarrow 2(\alpha'\beta'+\gamma'\delta') = (\alpha'+\beta')(\gamma'+\delta').$$

Ἂν $A \equiv O$ ἡ προηγούμενη ἀπόδειξη δὲν μπορεῖ νὰ γίνη, γιατί $\frac{p}{\alpha'}$ δὲν ἔχει πεπερασμένη τιμή. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ἡ ἀπόδειξη γίνεται μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Descartes (Α' τεῦχος, 8-3.4), ποὺ λέει ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ ἀποτελοῦν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἁρμονικὴ τετράδα εἶναι

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{A\Delta}.$$

Ἄρα θὰ πρέπη

$$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}.$$

Ἐπειδὴ ἀκόμα $\beta\beta' = \gamma\gamma' = \delta\delta' = p$, θὰ ἔχουμε τελικά

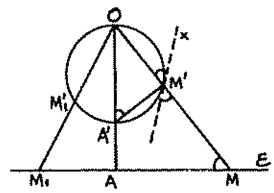
$$\beta' = \frac{\gamma'+\delta'}{2}.$$

Δηλαδὴ τὸ Β' εἶναι τὸ μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος Γ'Δ'. Ἄρα ἡ τετράδα (Ο, Β - Γ, Δ) ἀντιστοιχεῖ στὴν (∞, Β' - Γ', Δ') ποὺ εἶναι ἐπίσης ἁρμονική.

Ἄρα ἄν μιά τετράδα σημείων εὐθείας ε εἶναι ἁρμονική σημειοσειρά, ἡ ὁμόλογη τετράδα σέ ἀντιστροφή μέ πόλο στήν ε εἶναι ἐπίσης ἁρμονική.

(2) Τό ἀντίστροφο εὐθείας πού δέν περνᾶ ἀπ' τόν πόλο ἀντιστροφῆς.

Ἄς εἶναι (ε) μιά εὐθεία πού δέν περνᾶ ἀπ' τόν πόλο τῆς ἀντιστροφῆς $\mathcal{J}_{(O,p)}$. Φέρνουμε τήν ΟΑ κάθετη στήν (ε) καί ἄς εἶναι $A' = \mathcal{J}_{(O,p)}A$. Ἄν $M \in (\varepsilon)$ καί $M' = \mathcal{J}_{(O,p)}M$, τά σημεῖα A, A', M, M' εἶναι ὁμοκυκλικά, ἄρα $O\widehat{M'}A' = 1^{L}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό M' βρίσκεται σέ κύκλο μέ διάμετρο OA'.



Ἀντίστροφα: Ἄν $M_1' \neq O$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου μέ διάμετρο OA' καί πάρουμε $M_1 = OM_1' \cap (\varepsilon)$, θά εἶναι $M_1' = \mathcal{J}_{(O,p)}M_1$.

Τό σημεῖο Ο ἀντιστοιχεῖ στό ἐπ' ἄπειρον σημεῖο τῆς (ε). Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε ὅτι ἡ (ε) περιέχει καί τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖο της, τό ἀντίστροφο εὐθείας (ε) κατά τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μέ πόλο ἔξω ἀπό τήν (ε), εἶναι περιφέρεια πού περνᾶ ἀπ' τόν πόλο ἀντιστροφῆς.

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ἡ ἐφαπτόμενη τῆς περιφέρειας στό M' εἶναι ἰσοκλινής μέ τήν (ε) ὡς πρός τήν MM'.

(3) Τό ἀντίστροφο περιφέρειας πού περνᾶ ἀπ' τόν πόλο ἀντιστροφῆς.

Ἄς πάρουμε τήν περιφέρεια (K,R) καί ἕνα σημεῖο της τό Ο. Φέρνουμε τήν διάμετρο OA' καί ἄς εἶναι Α ἕνα σημεῖο τῆς OA' τέτοιο πού

$$A = \mathcal{J}_{(O,p)}A'.$$

Ἄν M' σημεῖο τῆς περιφέρειας καί $M = \mathcal{J}_{(O,p)}M'$, τά σημεῖα A, A', M, M' εἶναι ὁμοκυκλικά, ἄρα

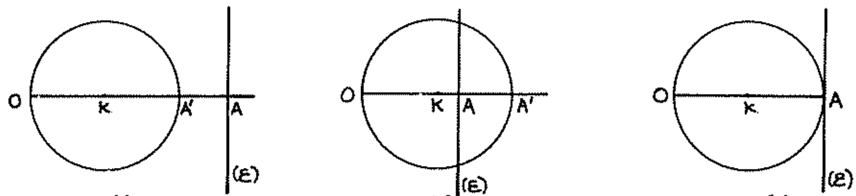
$$O\widehat{A}M = O\widehat{M'}A' = 1^{L}.$$

Δηλαδή τό Μ βρίσκεται σέ εὐθεία (ε) κάθετη στό Α ἐπί τήν OA'. Εὔκολα ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφο. Τό σημεῖο Ο ἀντιστοιχεῖ στό ἐπ' ἄπειρον σημεῖο τῆς εὐθείας.

Ἄρα τό ἀντίστροφο περιφέρειας πρός πόλο πού βρίσκεται σ' αὐτή τήν περιφέρεια εἶναι εὐθεία κάθετη στήν

διάμετρο πού περνᾶ ἀπό τόν πόλο ἀντιστροφῆς.

Οἱ προηγούμενες παράγραφοι (2) καί (3) ἀντιμετωπίζουν στήν οὐσία τό ἴδιο πρόβλημα ἀπό δύο ἀπόψεις. Μπορεῖ ὅμως τώρα νά ζητηθῆ ἀπάντηση καί σ' αὐτό τό πρόβλημα: Μιά εὐθεία καί ἕνας κύκλος μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν ἀντίστροφα σχήματα καί μέ ποιό τρόπο;



σχ. (1) σχ. (2) σχ. (3)

Αὐτά τά τρία σχήματα δίνουν τίς διάφορες περιπτώσεις. Στό σχ. (1) μποροῦμε νά ἔχουμε:

(α) $\varepsilon=\mathcal{J}_{(O,p)}[(K,R)]$, ὅπου $p=\overline{OA}\cdot\overline{OA'}$

(β) $\varepsilon=\mathcal{J}_{(A',p')}[(K,R)]$, ὅπου $p'=\overline{A'A}\cdot\overline{A'O}$.

Τά ἴδια στό σχ. (2).

Στό σχ. (3) μόνο σέ μιά ἀντιστροφή εἶναι ὁμόλογα ὁ κύκλος μέ τήν εὐθεία, στήν $\mathcal{J}_{(O,4R^2)}$.

(4) Τό ἀντίστροφο κύκλου πού δέν περνᾶ ἀπ' τό κέντρο ἀντιστροφῆς.

Ἄς θεωρήσουμε τόν κύκλο (K,R) καί τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,p)}$.

(α) Ἄν $O\equiv K$. Τότε εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι τό ἀντίστροφο τοῦ (K,R) θά εἶναι κύκλος ὁμόκεντρος μέ ἀκτῖνα R' πού δίνεται ἀπό τήν σχέση:

$$RR'=p.$$

(β) Ἄν τό O δέν ταυτίζεται μέ τό K καί οὔτε βρίσκεται στήν περιφέρεια (K,R), ἀλλά $p=\mathcal{D}_{(K,R)}(O)$. Στήν τελευταία περίπτωση $(K,R)=\mathcal{J}_{(O,p)}[(K,R)]$. Δηλαδή ὁ κύκλος (K,R) παραμένει ἀναλλοίωτος κατά τόν μετασχηματισμό. Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε ὅτι κάθε κύκλος τοῦ δίκτυου (O/p) παραμένει ἀναλλοίωτος στόν μετασχηματισμό $\mathcal{J}_{(O,p)}$.

(γ) Γενική περίπτωση:

Ἄς εἶναι M ἕνα σημεῖο τοῦ (K,R). Ἡ εὐθεία OM τέμνει τόν (K,R) στό μ. Θά ἔχουμε $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=p$, $\overline{OM}\cdot\overline{O\mu}=\mathcal{D}_{(K,R)}(O)$.
Ἄρα $\overline{OM'}=\frac{p\cdot\overline{O\mu}}{\mathcal{D}_{(K,R)}(O)}$ ἤ ἄν ὀνομάσουμε $\frac{p}{\mathcal{D}_{(K,R)}(O)}=\lambda$ (1) θἆναι

$$\overline{OM'} = \lambda \cdot \overline{O\mu}.$$

Δηλαδή τό M′ εἶναι ὁμόλογο τοῦ μ στήν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\lambda)}$.
Ἄρα

$$M' = H_{(O,\lambda)}[\mu].$$

Δηλαδή τό M′ θά βρίσκεται στό ὁμοιόθετο τοῦ (K,R) κατά τήν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\lambda)}$. Ἀλλά καί ἀντίστροφα, ἄν πάρουμε ἕνα σημεῖο $M' \in H_{(O,\lambda)}[(K,R)]$ καί θεωρήσουμε τό σημεῖο M, ὅπου ἡ εὐθεία $OH_{(O,\frac{1}{\lambda})}M'$ τέμνει τόν κύκλο (K,R) θά ἔχουμε

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p.$$

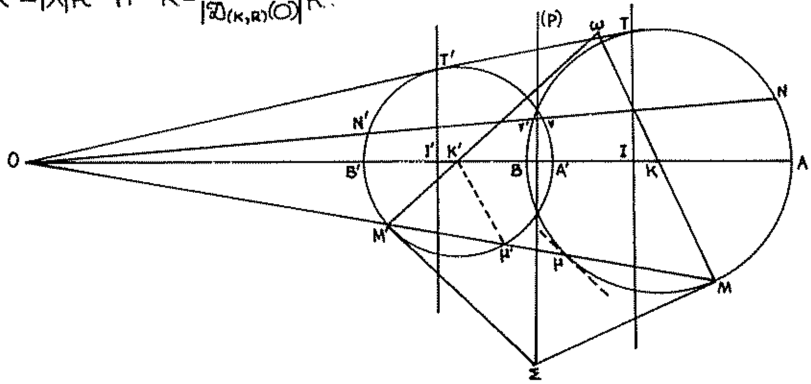
Ἄρα τό ἀντίστροφο κύκλου (K,R) κατά τήν ἀντιστροφή $\mathfrak{J}_{(O,p)}$ μέ πόλο O πού δέν ἀνήκει στήν (K,R) εἶναι τό ὁμοιόθετο τῆς (K,R) στήν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\lambda)}$, ὅπου τό λ δίνεται ἀπό τή σχέση (1).

Δηλαδή $\mathfrak{J}_{(O,p)}[(K,R)] = H_{(O,\lambda)}[(K,R)]$.

Ἄν $(K',R') = \mathfrak{J}_{(O,p)}[(K,R)]$ θά εἶναι $\overline{OK'} = \lambda \overline{OK}$ ἤ

$$\overline{OK'} = \frac{p}{\mathfrak{D}_{(K,R)}(O)} \overline{OK} \qquad (2)$$

καί $R' = |\lambda| R$ ἤ $R' = \frac{|p|}{|\mathfrak{D}_{(K,R)}(O)|} R$.



Μελέτη τοῦ σχήματος.

Τό σημεῖο O εἶναι ἐσωτερικό ἤ ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων (K,R), (K′,R′) ὅταν τό κλάσμα $\frac{p}{\mathfrak{D}_{(K,R)}(O)}$ ἔχη ἀρνητική ἤ θετική τιμή ἀντίστοιχα.

Ἄν μποροῦμε ἀπό τό O νά φέρουμε τήν κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων θά ἔχουμε

$$\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = p, \quad \frac{\overline{OT'}}{\overline{OT}} = \frac{p}{\mathfrak{D}_{(K,R)}(O)}$$

Δηλαδή $OT' = \frac{|p|}{\sqrt{\mathfrak{D}_{(K,R)}(O)}}$ (εἶναι φανερόν ὅτι $\mathfrak{D}_{(K,R)}(O) > 0$, $p = \mathfrak{D}_{(K,R)}(O)$).

Τά σημεῖα M, μ′ ὅπως καί τά μ, M′ λέγονται **ὁμόλογα** ἤ **ὁμοιόθετα**. Οἱ ἀκτῖνες $KM, K'\mu'$ ὅπως καὶ οἱ $K\mu, K'M'$ εἶναι παράλληλες.

Τὰ σημεῖα M, M' ὅπως καὶ τὰ μ, μ' λέγονται **ἀντιομόλογα** ἤ **ἀντίστροφα**. Γιὰ τὰ ἀντιομόλογα σημεῖα ἔχουμε

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = \overline{O\mu}\cdot\overline{O\mu'} = p = \overline{OT}\cdot\overline{OT'} = \frac{R'}{R}\,\mathcal{D}_{(K,R)}(O).$$

Ἄν καὶ τὰ σημεῖα N, N' εἶναι ἀντιομόλογα, θὰ ἔχουμε $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = \overline{ON}\cdot\overline{ON'}$. Αὐτο σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα M, M', N, N' εἶναι ὁμοκυκλικά. Τὸ σημεῖο $MN \cap M'N'$ ἔχει ἴσες δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους K, K'. Ἄρα βρίσκεται στὸν ριζικὸ ἄξονά τους. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι $(N \to M) \Rightarrow (N' \to M')$. Ἀπὸ δῶ μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων στὰ M, M' τέμνονται σὲ σημεῖο Σ τοῦ ριζικοῦ ἄξονα καὶ ἄρα $\Sigma M = \Sigma M'$.

Αὐτὸ ἀκόμα μπορεῖ νὰ ἀποδειχτῆ ἄν θεωρήσουμε τὶς ἐφαπτόμενες στὰ μ καὶ M' ποὺ σάν ὁμόλογες στὴν ὁμοιοθεσία $H(O, \frac{R'}{R})$ θὰ εἶναι παράλληλες. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἐφαπτόμενες στὰ ἄκρα τῆς χορδῆς $M\mu$ σχηματίζουν ἴσες γωνίες μὲ τὴν $M\mu$ συμπεραίνουμε ὅτι τὸ τρίγωνο $M'\Sigma M$ θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἄς εἶναι $\omega = KM \cap K'M'$. Ὁ κύκλος $(\omega, \omega M)$ ἐφάπτεται τῶν δύο κύκλων $(K,R), (K',R')$. Ἀντίστροφα, εὔκολα μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἄν M, M' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κύκλου (ω) μὲ τοὺς κύκλους $(K,R), (K',R')$, τὰ σημεῖα M, M' εἶναι ἀντιομόλογα.

Ἀκόμα παρατηροῦμε ὅτι ὁ κύκλος $(\Sigma, \Sigma M)$ τέμνει ὀρθογώνια τοὺς κύκλους (K,R) καὶ (K',R') στὰ M, M'. Ἀντίστροφα, ἄν ἕνας κύκλος (E) τέμνει ὀρθογώνια τοὺς κύκλους (K,R) καὶ (K',R') στὰ σημεῖα X, X', ψ, ψ' τὰ σημεῖα αὐτὰ θὰ εἶναι ἀντιομόλογα κατὰ ζεύγη.

Ἄν M, M' ἕνα ζευγάρι ἀπὸ ἀντιομόλογα σημεῖα καὶ c ἕνας κύκλος ποὺ περνᾶ ἀπ' τὰ M, M', τότε ὁ κύκλος c θὰ τέμνῃ τοὺς $(K,R), (K',R')$ στὰ σημεῖα N, N' ἐπίσης ἀντιομόλογα. Πραγματικὰ τὸ ὁμόλογο τοῦ N στὴν ἀντιστροφὴ $\mathfrak{J}_{(O,p)}$ θὰ βρίσκεται στὴν εὐθεία ON καθὼς καὶ στὸν κύκλο (K',R'). Δηλαδὴ θὰ ταυτίζεται μὲ τὸ N'.

Τὸ κέντρο τοῦ ἀντίστροφου κύκλου.

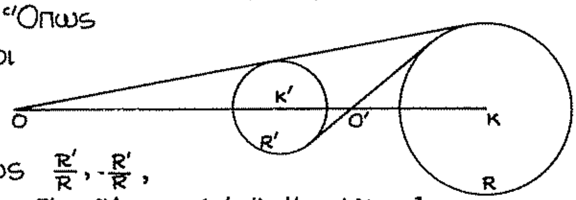
Τό σημεῖο K' εἶναι ἀντίστροφο κάποιου σημείου I. Κι ἐπειδή $2\overline{OK'} = \overline{OA'} + \overline{OB'}$ καί $\overline{OA}\,\overline{OB'} = \overline{OA'}\cdot\overline{OB} = \overline{OK'}\cdot\overline{OI} = p$ θἄχουμε:

$$\frac{2}{\overline{OI}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}.$$

Δηλαδή τό I εἶναι συζυγές ἁρμονικό τοῦ O πρός A,B.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι δίνονται δυό κύκλοι (K,R) καί (K',R'). Μπορεῖ νά προκύψη ὁ ἕνας ἀπ' τόν ἄλλον μέ ἀντιστροφή;

Ἡ ἀπάντηση εἶναι εὔκολη ἄν σκεφθοῦμε τήν σχετική θεωρία τῆς ὁμοιοθεσίας. Ὅπως εἶναι γνωστό δυό κύκλοι εἶναι ὁμόλογοι σέ δυό ὁμοιοθεσίες μέ κέντρα O,O' καί λόγους $\frac{R'}{R}, -\frac{R'}{R}$,



δηλαδή στίς $H_{(O,\frac{R'}{R})}$, $H_{(O,-\frac{R'}{R})}$. Ἄρα $(K',R') = H_{(O,\frac{R'}{R})}[(K,R)]$, ὁπότε $(K',R') = \mathcal{J}_{(O,p)}[(K,R)]$, ὅπου $p = \frac{R'}{R}|\mathcal{D}_{(K,R)}(O)|$ ἤ παρόμοια $(K',R') = \mathcal{J}_{(O',p')}[(K,R)]$, ὅπου $p' = -\frac{R'}{R}|\mathcal{D}_{(K,R)}(O')|$.

Δυό κύκλοι λοιπόν μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἀντίστροφοι κατά δυό τρόπους.

Κύκλοι ἀντιομοιότητας.

Κύκλος ἀντιομοιότητας δύο κύκλων (K,R) καί (K',R') λέγεται ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς τῆς ἀντιστροφῆς $\mathcal{J}_{(O,p)}$ πού μετασχηματίζει τούς (K,R), (K',R') μεταξύ τους.

Ἄν οἱ κύκλοι (K,R) καί (K',R') τέμνονται στά A,B, τότε ὁ κύκλος ἀντιομοιότητας περνᾶ ἀπ' τά A,B, γιατί τά A,B εἶναι διπλᾶ σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ ἄρα ἀνήκουν στόν κύκλο ἀντιστροφῆς. Ἄν οἱ κύκλοι (K,R), (K',R') δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί A,A' ἕνα ζευγάρι ἀπό ὁμόλογα σημεῖα τους ἀντίστοιχα, ἕνας κύκλος c πού περνᾶ ἀπ' τά A,A' θά τέμνη ὀρθογώνια τόν $(O,\sqrt{p})$, ἀλλά καί τούς (K,R), (K',R').

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε ὅτι ὁ κύκλος ἀντιομοιότητας δύο κύκλων (K,R) καί (K',R') ἔχει κέντρο τό κέντρο ὁμοιότητάς τους καί ἀνήκει στή δέσμη τους. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν οἱ κύκλοι (K,R), (K',R') τέμνωνται σέ δύο σημεῖα ὑπάρχουν δύο πραγματικοί κύκλοι ἀντιομοιότητας. Ἄν οἱ κύκλοι δέν τέμνωνται, μόνον ὁ ἕνας ἀπ' τούς δυό εἶναι πραγματικός. Ἀκόμα ἄν ὑπάρχουν δυό πραγματικοί κύκλοι ἀντιομοιότητας θά τέμνωνται ὀρθογώνια, γιατί οἱ δυό κύκλοι ἀντιομοιότητας καί ὁ κύκλος ὁμοιότητας ἀποτελοῦν δέσμη, ἄρα ὁ κύκλος ὁμοιότητας περνᾶ ἀπ' τά σημεῖα τομῆς A,B τῶν κύκλων ἀντιομοιότητας. Ἄν (O),(O') οἱ κύκλοι ἀντιομοιότητας εἶναι $O\hat{A}O' = 1^L$ (Α' τεῦχος, ἄσκ. 1004).

7.5. Διατήρηση τῶν γωνιῶν στήν ἀντιστροφή.

1) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μιά καμπύλη c βρίσκεται σ' ἕνα ἐπίπεδο καί σ' ἕνα σημεῖο της A ἡ ἐφαπτομένη της ε. Ἄς εἶναι O σημεῖο τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου καί ἡ ἀντιστροφή $\mathfrak{J}_{(O,p)}$. Ἀκόμα $A' = \mathfrak{J}_{(O,p)}A$, $c' = \mathfrak{J}_{(O,p)}c$.

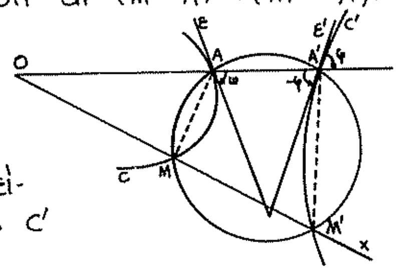
Ἡ c' στό σημεῖο A' δέχεται ἐφαπτόμενη;

Ἄς εἶναι $O \neq A$. Παίρνουμε στήν c τό σημεῖο M μέ τέτοιο τρόπο πού τό εὐθ. τμῆμα OM νά μή μηδενίζεται ὅταν $M \to A$

Τό εὐθ. τμῆμα A'M' ἀπό τή σχέση 7.3 εἶναι

$$A'M' = \frac{|p|}{OA \cdot OM} \cdot AM$$

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς λέει ὅτι ἄν $(M \to A) \Rightarrow (M' \to A')$. Ὅταν ὅμως $M \to A$ ἡ εὐθεία $AM \to ε$. Δηλαδή ἡ εὐθεία AM τείνει στήν ἐφαπτόμενη τῆς c στό A. Τότε ὅμως $M' \to A'$, δηλαδή ἡ εὐθεία A'M' τείνει πρός τήν ἐφαπτόμενη ε' τῆς c' στό A'.

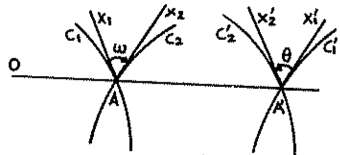


Ἀκόμα ἀπ' τό ἐγγράψιμο τετράπλευρο AMM'A' ἔχουμε $A'\hat{A}M = A'\hat{M'}x$. Ἄν $M \to A \Rightarrow A'\hat{A}M \to ω$, ὅπως καί $A'\hat{M'}x \to φ$.

Συμπέρασμα: $ω = φ$ ἤ $(\overline{AA'}, ε) = -(\overline{A'A}, ε')$.

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε ὅτι ἄν ἡ καμπύλη c ἔχη ἐφαπτομένη ε σ' ἕνα σημεῖο της A, ἡ ἀντίστροφη c' ἔχει στό ὁμόλογο σημεῖο της A' ἐφαπτόμενη ε'. Οἱ ε καί ε' σχηματίζουν μέ τήν AA' γωνίες ἀντίθετες. Δηλαδή οἱ ε, ε' εἶναι συμμετρικές πρός τήν μεσοκάθετη τοῦ εὐθ. τμήματος AA'.

2) Ἂς θεωρήσουμε τώρα δύο καμπύλες c_1, c_2 πού τέμνονται στό A, ὅπου δέχονται ἐφαπτόμενες Ax_1, Ax_2 ἀντίστοιχα. Κατά τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}(o,p)$ οἱ c_1, c_2 γίνονται c_1', c_2', A' τό ὁμόλογο τοῦ A καί $A'x_1', A'x_2'$ οἱ ἐφαπτόμενες στό A' τῶν c_1', c_2' ἀντίστοιχα.



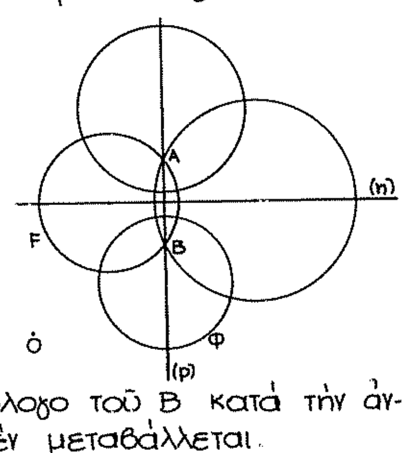
Οἱ $Ax_1, A'x_1'$ εἶναι συμμετρικές πρός τήν μεσοκάθετη τοῦ AA'. Παρόμοια καί οἱ $Ax_2, A'x_2'$. Αὐτό σημαίνει ὅτι $(Ax_1, Ax_2) = -(A'x_1', A'x_2')$ ἤ $\omega = -\theta$. Ὅπως εἶναι γνωστό ἡ γωνία (Ax_1, Ax_2) λέγεται γωνία τῶν καμπύλων c_1, c_2 στό A (Α' τεῦχος, 4-4.1), ἄρα λοιπόν **ἡ γωνία δύο καμπύλων c_1, c_2 σ' ἕνα σημεῖο τομῆς τους A ἀλλάζει πρόσημο κατά τήν ἀντιστροφή, δηλαδή διατηρεῖται ἡ ἀπόλυτη τιμή της.**

3) Ὁ μετασχηματισμός δέσμης κύκλων.

Ἂς θεωρήσουμε μιά δέσμη κύκλων F καί τήν συζυγή της Φ (Α' τεῦχος, §9.6).

(α) Ἡ F ἔχει σημεῖα βάσης A, B.

Ἂν O ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}(o,p)$ μετασχηματίζει τήν F σέ F' καί τήν Φ σέ $Φ'$. Τά σημεῖα A, B σέ A', B'. Ἄρα λοιπόν ἡ F' ἔχει σημεῖα βάσης τά A', B'. Ὁ κύκλος OAB γίνεται ὁ ριζικός ἄξονας τῆς F'. Ἡ εὐθεία (n) τῶν κέντρων τῆς δέσμης F γίνεται κύκλος τῆς F'.



Ὁ μετασχηματισμός τῆς Φ.

Ὅπως εἶναι γνωστό ἡ Φ ἔχει σημεῖα Poncelet τά A, B. Ἡ $Φ'$ θά ἔχη λοιπόν σημεῖα Poncelet τά A', B'. Ὁ κύκλος τῆς Φ πού περνᾶ ἀπ' τό O γίνεται ἡ εὐθεία τῶν κέντρων τῆς F'.

Ἂν τό O συμπίπτει μέ τό A.

Οἱ κύκλοι τῆς F γίνονται εὐθεῖες μέ σημεῖο τομῆς τό B' ὁμόλογο τοῦ B κατά τήν ἀντιστροφή. Ὁ ριζικός ἄξονας (p) δέν μεταβάλλεται.

Ἐπειδή οἱ κύκλοι τῆς Φ τέμνουν κάθετα τούς κύκλους τῆς F, οἱ κύκλοι τήν $Φ'$ θά τέμνουν κάθετα τήν δέσμη

F'. Δηλαδὴ θὰ εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρο B'.

(β) Ἡ δέσμη F ἔχει σημεῖα Poncelet K, Λ. Ἐναλλάσσοντας τὶς F, Φ ξαναβρισκόμαστε στὸ (α).

(γ) Ἡ δέσμη F περιέχει κύκλους ποὺ ἐφάπτονται στὸ σημεῖο A. Ἂν $O \neq A$ ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μετασχηματίζει τὴν δέσμη F στὴν F' ποὺ περιέχει κύκλους ποὺ ἐφάπτονται στὸ A' ἀντίστροφο τοῦ A. Τὸ ἴδιο γιὰ τὴν Φ'. Ἂν $O \equiv A$, τότε ἡ F' περιέχει εὐθεῖες παράλληλες καὶ ἡ Φ' εὐθεῖες κάθετες στὶς προηγούμενες.

7.6. Στοιχεῖα ἀπὸ τὴν ἀναλλαγματικὴ γεωμετρία.

Ἔχουμε δῆ ὅτι ἂν $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μιὰ ἀντιστροφὴ μὲ θετικὴ δύναμη $p = h^2$ καὶ (O,h) ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς, κάθε κύκλος c ποὺ περνᾶ ἀπὸ ἕνα ζευγάρι ἀπὸ ὁμόλογα σημεῖα M, M' ($M' = \mathcal{J}_{(O,p)}M$) θὰ τέμνῃ ὀρθογώνια τὸν (O,h). Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ἀκόμα ὅτι ἂν M, M' ἕνα ζευγάρι ἀπὸ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τέτοια ποὺ κάθε κύκλος ποὺ περνᾶ ἀπ' αὐτὰ νὰ τέμνῃ ὀρθογώνια τὸν (O,h), τὰ σημεῖα M, M' εἶναι ὁμόλογα στὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O,p)}$. (Στὴν πραγματικότητα δυὸ διαφορετικοὶ κύκλοι c_1, c_2 ποὺ περνᾶν ἀπ' τὰ M, M' καὶ τέμνουν ὀρθογώνια τὸν (O,h) φτάνουν). Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μπορεῖ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὸν ὁρισμὸ ποὺ ἔχει δοθῆ γιὰ τὴν δύναμη σημείου πρὸς κύκλο καὶ μάλιστα μὲ τέτοιο τρόπο ποὺ ἡ συμμετρία πρὸς εὐθεία νὰ περιλαμβάνεται στὴν ἀντιστροφή. Πραγματικά, ἂν φανταστοῦμε ὅτι ἡ εὐθεία x εἶναι περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα $R = \infty$, τότε δυὸ σημεῖα M, M' συμμετρικὰ πρὸς x εἶναι καὶ ἀντίστροφα πρὸς τὴν περιφέρεια x, γιατὶ ὁποιος κύκλος περνᾶ ἀπ' τὰ M, M' τέμνει ὀρθογώνια τὴν περιφέρεια x. Ἀντίστροφα, ἂν κάθε κύκλος ποὺ περνᾶ ἀπ' τὰ M, M' τέμνει ὀρθογώνια τὴν περιφέρεια x, τὰ σημεῖα M, M' θὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεία x. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ θεωρήσουμε τὴν συμμετρία πρὸς εὐθεία σὰν εἰδικὴ περίπτωση ἀντιστροφῆς.

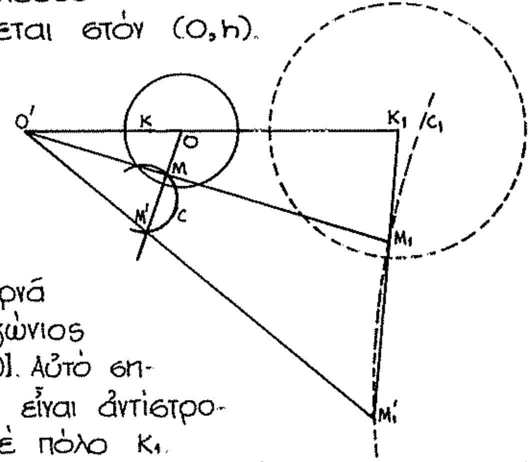
1) Transmuée θετικῆς ἀντιστροφῆς.

Ἂς εἶναι $\mathcal{J}_{(O,p)}$, ὅπου $p = +h^2$, μιὰ θετικὴ ἀντιστροφὴ μὲ κύκλο ἀντιστροφῆς (O,h). Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $M' = \mathcal{J}_{(O,p)}M$.

Ἐκτελοῦμε στὸ σύστημα τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}'=\mathcal{J}_{(O',p')}$ καὶ ἄς εἶναι $M_1=\mathcal{J}'M$, $M_1'=\mathcal{J}'M'$. Τότε θ' ἀποδείξουμε ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_1' εἶναι ὁμόλογα σὲ μιὰ καὶ τὴν ἴδια ἀντιστροφὴ γιὰ κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου.

(α) Ἄν τὸ O' δὲν βρίσκεται στὸν (O,h).

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κύκλο c ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ M, M'. Θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (O,h). Ἡ διατήρηση τῶν γωνιῶν στὴν ἀντιστροφὴ μᾶς λέει ὅτι κάθε κύκλος c_1 ποὺ περνᾶ ἀπ' τὰ M_1, M_1' θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλο $(K_1)=\mathcal{J}'[(O,h)]$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_1' εἶναι ἀντίστροφα κατὰ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_1$ μὲ πόλο K_1.



Τὸ σημεῖο K_1 μπορεῖ πολὺ εὔκολα νὰ προσδιορισθῆ μὲ τὸν παρακάτω τρόπο:

Ὁ κύκλος $MM'O'$ τέμνει τὴν εὐθεία OO' στὸ K. Τὸ ἀντίστροφο αὐτοῦ τοῦ κύκλου κατὰ τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}'$ εἶναι ἡ εὐθεία M_1M_1'. Ἄρα $K_1=\mathcal{J}'K$. Ἔχουμε ὅμως

$$\overline{OK}\cdot\overline{OO'}=h^2$$

$$\overline{O'K}\,\overline{O'K_1}=p'$$

Καὶ ἀπὸ δῶ $\overline{O'K_1}=\dfrac{p'\cdot\overline{O'O}}{\overline{OO'}^2-h^2}$ (1).

Ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου K_1 δίνεται ἀπὸ τὴν παράγραφο 7.4.4 καὶ εἶναι ἴση μὲ

$$h_1=\frac{|p'|}{|\wp_{(O,h)}(O')|}\cdot h \quad (2).$$

Ἄρα λοιπὸν ἡ $\mathcal{J}_1$ προσδιορίστηκε.

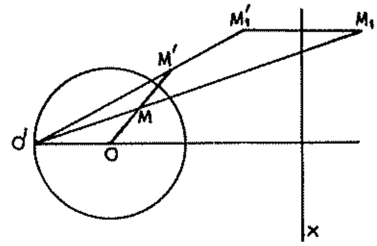
Ἄν θεωρήσουμε τοὺς διαδοχικοὺς μετασχηματισμοὺς τοῦ σημείου M θὰ ἔχουμε:

$$M'=\mathcal{J}M,\ M_1'=\mathcal{J}'M',\ M_1=\mathcal{J}_1M_1'$$

καὶ ἀκόμα $M_1=\mathcal{J}'M$.

Ἄρα $\mathcal{J}'=\mathcal{J}_1\mathcal{J}'\mathcal{J} \Leftrightarrow \mathcal{J}_1=\mathcal{J}'\mathcal{J}\mathcal{J}'$ καὶ ἐπειδὴ $(\mathcal{J}')^{-1}=\mathcal{J}'$ συμπεραίνουμε ὅτι ἡ $\mathcal{J}_1$ εἶναι ἡ transmuée τῆς $\mathcal{J}$ διὰ τῆς $\mathcal{J}'$ (ἄσκ. 1).

(β) Ἄν τὸ σημεῖο O' βρίσκεται στὴν περιφέρεια (O,h), τότε ὅπως εἶναι γνωστὸ ὁ κύκλος (K_1,h_1) γίνεται εὐθεία x κάθετη στὴν OO'.

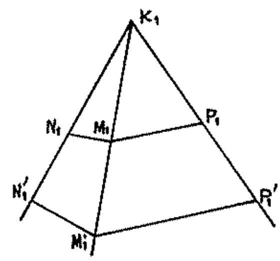


Ἀφοῦ κάθε κύκλος ποὺ περνᾶ ἀπ' τὰ σημεῖα M_1, M_1' τέμνει ὀρθογώνια τὴν εὐθεία x συμπεραίνουμε ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_1' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς x, δηλαδὴ ὁμόλογα στὴν ἀντιστροφὴ μὲ κύκλο ἀντιστροφῆς τὴν εὐθεία x. Ἄρα θὰ ἔχουμε $S_x = J'JJ'$.

2) Transmuée τυχαίας ἀντιστροφῆς.

Τὸ προηγούμενο θεώρημα ἀληθεύει ἀνεξάρτητα ἀπ' τὸ πρόσημο τοῦ p τῆς $J_{(O,p)}$. Μιὰ γενικὴ ἀπόδειξη μπορεῖ νὰ γίνη μὲ τὸν παρακάτω τρόπο (ἡ ἀπόδειξη ἰσχύει, ἂν $p=-h^2$):

Ἄς εἶναι M, N δυὸ σημεῖα καὶ $(M', N') = J(M,N)$ ὅπως καὶ $(M_1', N_1') = J'(M', N')$, $(M_1, N_1) = J'(M, N)$. Τὰ σημεῖα M, N, M', N' εἶναι ὁμοκυκλικὰ ἄρα καὶ τὰ σημεῖα M_1, N_1, M_1', N_1', δηλαδὴ ὑπάρχει ἀντιστροφὴ J_1 ὅπου $(M_1', N_1') = J_1(M_1, N_1)$.



Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα τυχαῖο σημεῖο P καὶ $P' = J(P)$, $P_1' = J'(P')$, $P_1 = J'(P)$ θὰ ἀποδείξουμε ὅτι $P_1' = J_1(P_1)$.

Πραγματικά, ἂν $K_1 = M_1'M_1 \cap N_1'N_1$ τὸ σημεῖο K_1 θὰ εἶναι τὸ ριζικὸ κέντρο τῶν κύκλων $M_1M_1'N_1'N_1$, $M_1M_1'P_1'P_1$, $N_1N_1'P_1'P_1$, δηλαδὴ ἡ εὐθεία P_1P_1' περνᾶ ἀπὸ τὸ K_1 καὶ ἀκόμα $\overline{K_1M_1} \cdot \overline{K_1M_1'} = \overline{K_1N_1} \cdot \overline{K_1N_1'} = \overline{K_1P_1} \cdot \overline{K_1P_1'}$.

3) Transmuée ἀρνητικῆς ἀντιστροφῆς.

Ἄς θεωρήσουμε τὴν ἀντιστροφὴ $J_{(O,p)}$, ὅπου $p=-h^2$ καὶ τὴν transmuée της διὰ τῆς $J' = J_{(O',p')}$ μὲ p' τυχαῖο θετικὸ ἢ ἀρνητικό. Ἄν M ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζουμε

$$M' = J_{(O,p)}M, \quad M_1 = J_{(O',p')}M = J'M, \quad M_1' = J_{(O',p')}M' = J'M'.$$

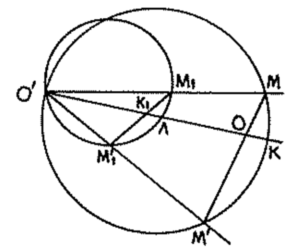
θὰ προσδιορίσουμε τὰ στοιχεῖα K_1, p_1 τῆς ἀντιστροφῆς $J_1 = J_{(K_1,p_1)}$ μὲ τέτοιο τρόπο ποὺ

$$M_1' = J_{(K_1,p_1)}M_1 = J_1M_1.$$

Ὁ κύκλος $O'MM'$ τέμνει τὴν εὐθεία OO' στὸ σημεῖο K

καὶ εἶναι $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = p = \overline{OO'}\cdot\overline{OK}$.

Ἄρα τὸ σημεῖο K εἶναι σταθερὸ (δηλαδὴ τὸ ἴδιο γιὰ κάθε M). Ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O',p)}$ μετασχηματίζει τὸν κύκλο $O'MM'$ στὴν εὐθεία M_1M_1' καὶ τὸ σημεῖο K στὸ σημεῖο K_1. Ἄρα θὰ ἔχουμε $\overline{O'K_1}\cdot\overline{O'K} = p'$, ἀλλὰ $\overline{O'K} = \overline{O'O} + \overline{OK} = \overline{O'O} + \frac{p}{\overline{OO'}} = \frac{\overline{O'O}^2 - p}{\overline{O'O}}$ καὶ τέλος



$$\overline{O'K_1} = \frac{p'\cdot\overline{O'O}}{\overline{O'O}^2 - p} \quad (1).$$

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ p_1 κατασκευάζουμε τὸν κύκλο $O'M_1M_1'$ ποὺ τέμνει τὴν εὐθεία $O'O$ στὸ Λ. Ἡ εὐθεία MM' στὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O',p')}$ ἔχει ἀντίστροφό της τὸν κύκλο $O'M_1M_1'$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $p' = \overline{O'O}\cdot\overline{O'\Lambda} \Rightarrow \overline{O'\Lambda} = \frac{p'}{\overline{O'O}}$ ἢ ἀκόμα

$$p_1 = \overline{K_1M_1}\cdot\overline{K_1M_1'} = \overline{K_1O'}\cdot\overline{K_1\Lambda} = -\frac{p'\cdot\overline{O'O}}{\overline{O'O}^2 - p}(\overline{O'\Lambda} - \overline{O'K_1}) = -\frac{p'\cdot\overline{O'O}}{\overline{O'O}^2 - p}\left(\frac{p'}{\overline{O'O}} - \frac{p'\cdot\overline{O'O}}{\overline{O'O}^2 - p}\right)$$

ἢ τελικὰ

$$p_1 = \frac{p\cdot p'^2}{(\overline{O'O}^2 - p)^2} \quad (2).$$

Δηλαδὴ ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_1$ προσδιορίστηκε. Οἱ τύποι (1),(2) εἶναι ἴδιοι μὲ τοὺς τύπους (1),(2) τῆς 7.6.1.

Ἀκόμα μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη τῆς 7.6.2 τὸ προηγούμενο ἀποδεικνύει καὶ τὴν 7.6.2 ἂν παρατηρήσουμε ὅτι τὸ σημεῖο Λ εἶναι σταθερό.

4. Γινόμενα ἀντιστροφῶν καὶ ὁμοιοθεσιῶν μὲ τὸ ἴδιο κέντρο.

Ἂς εἶναι $\mathcal{J}_{(O,p)}$ καὶ $\mathcal{J}' = \mathcal{J}_{(O,p')}$ ἀντιστροφὲς μὲ πόλο O. Ἂν M ἕνα σημεῖο θὰ ἔχουμε

$$M' = \mathcal{J}M,\ M_1 = \mathcal{J}'M'.$$

Δηλαδὴ $M_1 = \mathcal{J}'\mathcal{J}M$ ἢ $\overline{OM'}\cdot\overline{OM} = p$, $\overline{OM'}\cdot\overline{OM_1} = p'$. Διαιροῦμε τὶς δύο σχέσεις κατὰ μέλη καὶ ἔχουμε:

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = \frac{p'}{p}.$$

Ἄρα $M_1 = H(O,\frac{p'}{p})$. Δηλαδὴ $H(O,\frac{p'}{p}) = \mathcal{J}_{(O,p')}\mathcal{J}_{(O,p)}$.

Τὸ γινόμενο λοιπὸν δύο ἀντιστροφῶν μὲ τὸ ἴδιο κέντρο εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ τὸ ἴδιο κέντρο καὶ λόγο ἴσο μὲ τὸν λόγο τῆς δύναμης τῆς δεύτερης ἀντιστροφῆς πρὸς τὴν δύναμη τῆς πρώτης.

Ἂς θεωρήσουμε τώρα τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O,p)}$ καὶ τὴν ὁμοιοθεσία $H_{(O,\kappa)}$. Γιὰ κάθε σημεῖο $M \neq O$ θὰ ἔχουμε:

$$M' = \mathcal{J}M \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p,$$

$$M_1 = HM' \Longrightarrow \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM'}} = \kappa .$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη ἔχουμε:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = \kappa p$$

Δηλαδὴ $M_1 = \mathcal{J}_{(O,\kappa p)}M = H_{(O,\kappa)} \cdot \mathcal{J}_{(O,p)}(M)$. Ἄρα $\mathcal{J}_{(O,\kappa p)} = H_{(O,\kappa)} \mathcal{J}_{(O,p)}$

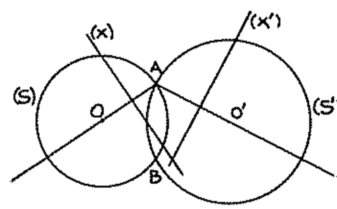
Τὸ γινόμενο λοιπὸν ἀντιστροφῆς ἐπὶ ὁμοιοθεσία μὲ τὸ ἴδιο κέντρο εἶναι ἴσο μὲ ἀντιστροφὴ μὲ τὸ ἴδιο κέντρο καὶ μὲ δύναμη τὸ γινόμενο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιοθεσίας ἐπὶ τὴ δύναμη τῆς ἀντιστροφῆς (πρῶτα γίνεται ἡ ἀντιστροφή).

Παρόμοια διαπιστώνουμε ὅτι $\mathcal{J}_{(O,\frac{p}{\kappa})} = \mathcal{J}_{(O,p)} \cdot H_{(O,\kappa)}$.

5. Τὸ γινόμενο δύο ἢ περισσοτέρων ἀντιστροφῶν μὲ διαφορετικοὺς πόλους.

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι σ' ἕνα ἐπίπεδο Π δίνονται δύο ἀντιστροφές $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(O,p)}$, $\mathcal{J}' = \mathcal{J}_{(O',p')}$. Ὀνομάζουμε (S) καὶ (S') ἀντίστοιχα τοὺς κύκλους ἀντιστροφῆς $(O,\sqrt{p})$, $(O',\sqrt{p'})$. Ἂν $p, p' > 0$ οἱ κύκλοι ἀντιστροφῆς εἶναι πραγματικοὶ καὶ ἀποτελοῦν τοὺς κύκλους βάσης μιᾶς δέσμης F. Σὲ κάθε κύκλο (Σ) τῆς δέσμης F ἀντιστοιχοῦμε τὴν ἀντιστροφὴ μὲ κύκλο ἀντιστροφῆς τὸν (Σ). Τὸ πρόβλημά μας εἶναι νὰ βροῦμε μιὰ πιὸ ἁπλὴ ἀναγωγικὴ μορφὴ γιὰ τὸ γινόμενο $\mathcal{J}\mathcal{J}'$.

(α) Ἂς ὑποθέσουμε πρῶτα ὅτι ἡ δέσμη F ἔχει σημεῖα βάσης A, B καὶ $I = \mathcal{J}_{(A,\kappa^2)}$ (ἡ ἀντιστροφὴ πρὸς A μὲ δύναμη κ^2).



Παίρνουμε τὶς transmuée τῶν $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$ διὰ τῆς I. Ὅπως εἶναι γνωστὸ εἶναι συμμετρίες $S_x, S_{x'}$, ὅπου x, x' εὐθεῖες κάθετες στὶς διαμέτρους τῶν (S), (S') ποὺ περνᾶν ἀπ' τὸ A. Ἄρα $S_x = I\mathcal{J}I$, $S_{x'} = I\mathcal{J}'I$, ὁπότε

$$S_{x'} \cdot S_x = (I\mathcal{J}'I)(I\mathcal{J}I) = I(\mathcal{J}'\mathcal{J})I.$$

Ἂν τώρα φ ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων, βλέπουμε ὅτι:

$$\mathcal{R}_{(A,2\varphi)} = S_{x'} \cdot S_x$$

Παίρνουμε τοὺς κύκλους (S_1), (S_1') τῆς δέσμης, τέτοιους ποὺ νὰ σχηματίζουν γωνία φ. Ἂν $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1'$ ἀντίστοιχα οἱ ἀντιστροφές καί x_1, x_1' οἱ ἀντίστοιχες εὐθεῖες τῶν x, x' θά ἔχουμε $R_{(A,2\varphi)} = S_{x_1'} S_{x_1} = I(\mathcal{J}_1'\mathcal{J}_1)I$. Δηλαδή

$$I(\mathcal{J}'\mathcal{J})I = I(\mathcal{J}_1'\mathcal{J}_1)I.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση βλέπουμε ἀμέσως ὅτι:

$$\mathcal{J}'\mathcal{J} = \mathcal{J}_1'\mathcal{J}_1.$$

Δηλαδή τό γινόμενο δύο θετικῶν ἀντιστροφῶν, μέ κύκλους ἀντιστροφῆς πού τέμνονται, εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο δύο ἄλλων θετικῶν ἀντιστροφῶν, μέ τυχαίους κύκλους ἀπό τήν ἴδια δέσμη, πού νά σχηματίζουν ὅμως τήν ἴδια γωνία.

Ἄν θεωρήσουμε ὅτι ὁ ἕνας ἀπ' τούς κύκλους εἶναι ἡ εὐθεία AB, δηλαδή ὁ ριζικός ἄξονας τῶν κύκλων, ὁ ἄλλος κύκλος (S_0) εἶναι καθορισμένος γιατί σχηματίζει γωνία φ μέ τήν εὐθεία AB. Ἄρα

$$\mathcal{J}'\mathcal{J} = S_{AB}\mathcal{J}_0$$

ἤ τό ἴδιο

$$\mathcal{J}'\mathcal{J} = \mathcal{J}_0' S_{AB}$$

ἄν πάρουμε τόν κύκλο S_0'.

Ἄρα τό γινόμενο δύο θετικῶν ἀντιστροφῶν μέ κύκλους ἀντιστροφῆς πού τέμνονται εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο συμμετρίας πρός τήν κοινή χορδή ἐπί ἀντιστροφή πρός κύκλο πού σχηματίζει μέ τήν εὐθεία τήν ἴδια γωνία πού σχηματίζουν οἱ δύο κύκλοι τῶν ἀρχικῶν ἀντιστροφῶν καί μέ τήν ἴδια τάξη. (Ἤ ἀντίστροφα, εἶναι ἴσο μέ ἀντιστροφή ἐπί συμμετρία).

(β) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ δέσμη F ἔχει ὁριακά σημεῖα τά σημεῖα K, Λ (σημεῖα Poncelet) καί $I = \mathcal{J}_{(\Lambda,\kappa^2)}$ ἀντιστροφή πρός Λ μέ δύναμη κ^2. Ὅπως εἶναι γνωστό ἡ ἀντιστροφή I μετασχηματίζει τήν δέσμη F σέ σύνολο ὁμόκεντρων κύκλων. Ἄρα οἱ $I\mathcal{J}I, I\mathcal{J}'I$ εἶναι ἀντιστροφές πρός ὁμόκεντρους κύκλους, δηλαδή τό γινόμενό τους εἶναι ὁμοιοθεσία. Αὐτή ἡ ὁμοιοθεσία μπορεῖ νά ἀναλυθῆ μέ ἄπειρους τρόπους σέ γινόμενο δύο ἀντιστροφῶν μέ λόγο τῶν δυνάμεων ἀντιστροφῆς σταθερό (καί ἴσο μέ τόν λόγο ὁμοιοθεσίας). Ἄν συμβολίσουμε $S = \mathcal{J}_{(\omega,p^2)}$, $S' = \mathcal{J}_{(\omega,p'^2)}$ αὐτές τίς ὁμόκεντρες ἀντιστροφές μέ κύκλους ἀντιστροφῆς (ω, p), (ω, p') θά ἔχουμε:

$$H_{(\omega,\frac{p'}{p})} = S'S = (I\mathcal{J}I)(I\mathcal{J}'I) = I(\mathcal{J}\mathcal{J}')I.$$

Εἶναι φανερὸ ὅμως ὅτι μποροῦμε νὰ ἔχουμε ἀκόμα:

$$H(\omega, \tfrac{R'}{P_1}=\tfrac{P'}{P}) = S_1' \cdot S_1 = (I \cdot J_1 \cdot I)(I \cdot J_1' \cdot I) = I \cdot (J_1 J_1') \cdot I.$$

Δηλαδὴ

$$J J' = J_1 J_1'.$$

Τὸ γινόμενο λοιπὸν δυὸ θετικῶν ἀντιστροφῶν μὲ κύκλους ἀντιστροφῆς ποὺ δὲν τέμνονται εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο δυὸ ἄλλων ἀντιστροφῶν τῆς ἴδιας δέσμης (τῆς δέσμης F τῶν κύκλων ἀντιστροφῆς).

Ἂν τώρα ἕνας ἀπ' τοὺς κύκλους ἀντιστροφῆς γίνη ὁ ριζικὸς ἄξονας Δ τῆς δέσμης ἡ ἀντίστοιχη ἀντιστροφὴ γίνεται συμμετρία, δηλαδὴ

$$J J' = S_\Delta \cdot J_0 \quad ἤ$$

$$J J' = J_0' \cdot S_\Delta.$$

(γ) Ἂν ἡ δέσμη F περιέχει κύκλους ποὺ ἐφάπτονται στὸ A, δηλαδὴ (S),(S') ἐφάπτονται στὸ A, οἱ ἀντιστροφὲς $I \cdot J \cdot I$, $I \cdot J' \cdot I$ εἶναι συμμετρίες πρὸς ἄξονες παράλληλους, ὁπότε τὸ γινόμενό τους εἶναι μεταφορά. Δηλαδὴ $S_x = I \cdot J \cdot I$, $S_{x'} = I \cdot J' \cdot I$, ἢ $\tau_{2\vec{v}} = S_{x'} \cdot S_x = I \cdot (J' J) \cdot I$, ὅπου $x \parallel x'$ ($x \perp OO'$) καὶ v ἡ ἀπόσταση τῶν x, x'.

Ἂν $x_1 \parallel x_1'$ καὶ σὲ ἀπόσταση $v_1 = v$, ὅπως εἶναι γνωστὸ θὰ ἔχουμε $\tau_{2\vec{v}_1} = \tau_{2\vec{v}} = S_{x'} \cdot S_x = S_{x_1'} \cdot S_{x_1} = I \cdot (J_1' J_1) \cdot I$. Τελικὰ

$$J' J = J_1' J_1.$$

Δηλαδὴ καὶ στὴν περίπτωση αὐτὴ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἀντιστροφῶν μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῆ μὲ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων ἀντιστροφῶν, κι ἂν ὀνομάσουμε Δ τὴν κοινὴ ἐφαπτομένη θὰ ἔχουμε τελικά:

$$J' J = S_\Delta \cdot J_0 = J_0' \cdot S_\Delta.$$

Γενικὸ συμπέρασμα:

Τὸ γινόμενο δύο θετικῶν ἀντιστροφῶν εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο δύο ἄλλων θετικῶν ἀντιστροφῶν ποὺ ἐκλέγονται κατάλληλα ἢ μὲ τὸ γινόμενο μιᾶς συμμετρίας ἐπὶ ἀντιστροφὴ ποὺ πάλι ἐκλέγεται κατάλληλα (ἢ ἀντιστροφῆς ἐπὶ συμμετρία).

Ἂν μιὰ ἀπ' τὶς ἀντιστροφὲς εἶναι ἀρνητικὴ ἢ ἀκόμα ἂν καὶ οἱ δυὸ ἀντιστροφὲς εἶναι ἀρνητικὲς ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς δὲν ὑπάρχει μὲ τὴν καθιερωμένη ἔννοια. Μπορεῖ ὅμως νά ἐπεκταθῆ ἡ ἔννοια τοῦ κύκλου ἀντιστροφῆς καί στήν περίπτωση ἀρνητικῆς ἀντιστροφῆς μέ τέτοιο τρόπο, πού ἀκολουθῶντας τήν ἴδια διαδικασία νά ἀποδείξουμε τό ἴδιο θεώρημα ἀνεξάρτητα ἀπ' τό πρόσημο τῶν ἀντιστροφῶν.

Τό γινόμενο n ἀντιστροφῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄς θεωρήσουμε τίς ἀντιστροφές $J_1 = J_{(O_1, P_1)}, J_2 = J_{(O_2, P_2)}, \dots, J_n = J_{(O_n, P_n)}$ καί τό γινόμενό τους $I = J_n J_{n-1} \cdots J_2 J_1$. Ὅπως εἴδαμε καί στά προηγούμενα μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό γινόμενο $J_2 J_1$ μέ τό γινόμενο συμμετρίας ἐπί ἀντιστροφή, δηλαδή $J_2 J_1 = J_2' S_{x_1}$. Ἄρα $I = J_n J_{n-1} \cdots J_3 J_2' S_{x_1}$. Παρόμοια $J_3 J_2' = J_3' S_{x_2}$ κ.τ.λ. Ἄρα

$$I = J_n' S_{x_{n-1}} S_{x_{n-2}} \cdots S_{x_1}.$$

Δηλαδή τό I εἶναι ἴσο μέ μετατόπιση ἐπί ἀντιστροφή ὅταν n = περιττός ἤ ἀντιμετατόπιση ἐπί ἀντιστροφή ὅταν n = = ἄρτιος.

Ἄν στίς διαδοχικές ἀντικαταστάσεις τῶν ἀντιστροφῶν τύχη δύο διαδοχικές ἀντιστροφές J_k', J_{k+1} νά ἔχουν τόν ἴδιο πόλο O, τότε τό γινόμενό τους ὅπως εἶναι γνωστό εἶναι ὁμοιοθεσία H καί ἄς εἶναι λ ὁ λόγος της. Γράφουμε τότε:

$$J_{k+2} J_{k+1} = J_{k+2} H_1' H_1 J_{k+1},$$

ὅπου $H_1' = H_{(O_{k+2}, \lambda)}$, $H_1 = H_{(O_{k+2}, \frac{1}{\lambda})}$ θά ἔχουμε λοιπόν:

$$J_n \cdots J_{k+2} H_1' H_1 \underbrace{J_{k+1} J_k'}_{H} S_{x_{k-1}} \cdots S_{x_1} = J_n \cdots J_{k+2} H_1' H_1 H S_{x_{k-1}} \cdots S_{x_1} = I$$

Ἀλλά $H_1 H$ = μεταφορά, γιατί οἱ H_1, H ἔχουν διαφορετικά κέντρα καί τό γινόμενο τῶν λόγων τους εἶναι ἡ μονάδα. Ἡ μεταφορά ὅμως εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο δύο συμμετριῶν καί ἄς εἶναι $S_{x_{k+1}} S_{x_k}$. Τό γινόμενο $J_{k+2} H_1'$ εἶναι ἴσο μέ ἀντιστροφή J_{k+2}' ἄρα $I = J_n \cdots J_{k+2}' S_{x_{k+1}} S_{x_k} \cdots S_{x_1}$.

Ἄν ἡ J_{k+1}' ἦταν ἡ τελευταία ἀντιστροφή τότε τό γινόμενο I θά ἦταν ὁμόρροπη ὁμοιότητα ἄν n ἄρτιος καί ἀντίρροπη ἄν n περιττός.

Ἄρα μποροῦμε νά ποῦμε τελικά ὅτι:

Τό γινόμενο n διαδοχικῶν ἀντιστροφῶν εἶναι ἴσο μέ γινόμενο μετατόπισης (ἄν n περιττός) ἤ ἀντιμετατόπισης (ἄν n ἄρτιος) ἐπί ἀντιστροφή. Ἀκόμα σάν ἐξαίρεση, μέ

τό γινόμενο μετατόπισης (ἄν n ἄρτιος) ἤ ἀντιμετατόπισης (ἄν n περιττός) ἐπί ὁμοιοθεσία.

"Αν n=περιττός ὁ μετασχηματισμός θά λέγεται περιττός καί θά διατηρῆ τό μέτρο τῶν γωνιῶν, ἀλλά θά ἀλλάξη τή διεύθυνση.

Εἶναι φανερό, ὅτι τό σύνολο τῶν ἄρτιων μετασχηματισμῶν τῆς κυκλικῆς ὁμάδας μέ τόν πολλαπλασιασμό "·" δύο μετασχηματισμῶν ὅπως τόν ἔχουμε ὁρίσει ἔχει δομή ὁμάδας.

Ἀναλλαγματική γεωμετρία.

Ὀνομάζεται ἡ γεωμετρία πού ἔχει βασική ὁμάδα τήν κυκλική ὁμάδα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἀναλλαγματική γεωμετρία περιέχει:

(α) τήν γεωμετρία τῶν στερεῶν κινήσεων μέ βασική ὁμάδα τήν ὁμάδα τῶν ἰσομετριῶν καί (β) τήν Εὐκλείδια γεωμετρία μέ βασική ὁμάδα τήν ὁμάδα τῶν ὁμοιοτήτων.

Κυκλικοί μετασχηματισμοί.

Τό σύνολο τῶν ἀντιστροφῶν τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν πράξη γινόμενο πού ὁρίσαμε δέν ἔχει δομή ὁμάδας. Μποροῦμε ὅμως νά χρησιμοποιήσουμε τό σύνολο τῶν ἀντιστροφῶν μέσα σ' ἕνα πιό γενικό σύνολο μετασχηματισμῶν πού νά περιέχη ὅλους τούς προηγούμενους μετασχηματισμούς (ἐκτός ἀπ' τόν ὁμοπαραλληλικό μετασχηματισμό) καί νά πάρουμε ἔτσι μιά πιό πλατειά ὁμάδα, τήν κυκλική ὁμάδα τοῦ ἐπιπέδου.

"Ας εἶναι λοιπόν c τό σύνολο τῶν μετασχηματισμῶν: μεταφορῶν, στροφῶν, συμμετριῶν, ὁμοιοθεσιῶν, ὁμοιοτήτων, ἀντιστροφῶν. Ὀνομάζουμε V τυχαῖο γινόμενο ἀπό τό c.

Τό ζευγάρι ({c},·) μ' αὐτή τήν πρᾶξη γινόμενο πού ὁρίσαμε ἀποτελεῖ ὁμάδα, τήν κυκλική ὁμάδα τοῦ ἐπιπέδου. Αὐτό τό συμπέρασμα βγαίνει ἀπό τήν μέχρι τώρα ἀνάλυση τῶν προηγούμενων μετασχηματισμῶν.

Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς κυκλικῆς ὁμάδας εἶναι ὅτι οἱ μετασχηματισμοί της διατηροῦν τόν κύκλο μέ τήν πλατειά ἔννοιά του (δηλαδή ἡ εὐθεία θεωρεῖται κύκλος μὲ ἀκτῖνα ∞).

Τὸ ἀναγκαῖο τῆς ἰδιότητας εἶναι φανερό. Τὸ ἱκανὸ μπορεῖ νὰ ἀποδειχτῆ μὲ τὸν παρακάτω τρόπο:

Ἂς εἶναι u ἕνας μετασχηματισμὸς ποὺ μετασχηματίζει τοὺς κύκλους σὲ κύκλους (μὲ τὴν πλατειὰ ἔννοια). Ὀνομάζουμε O' τὸ ὁμόλογο ἑνὸς σημείου O τοῦ ἐπιπέδου καὶ τ τὴν μεταφορὰ $\tau_{\vec{OO'}}$. Ὁ μετασχηματισμὸς u θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τῆς μεταφορᾶς τ ἐπὶ ἕναν μετασχηματισμὸ V ποὺ ἀφήνει τὸ σημεῖο O' ἀμετάβλητο καὶ μετασχηματίζει κύκλο σὲ κύκλο ἐπίσης (μὲ τὴν πλατειὰ ἔννοια).

Ἂς εἶναι τώρα J ἀντιστροφὴ μὲ πόλο O'. Ὁ μετασχηματισμὸς $\Sigma = J \cdot V \cdot J$ μετασχηματίζει ἕνα κύκλο (μὲ τὴν συνηθισμένη ἔννοια) σὲ κύκλο καὶ μιὰ εὐθεία σὲ εὐθεία καὶ διατηρεῖ τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τῶν εὐθειῶν. Ἄρα ἀφοῦ ὁ Σ διατηρεῖ τὶς εὐθεῖες καὶ τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τους θὰ εἶναι ὁμοπαραλληλία. Μιὰ ὅμως ὁμοπαραλληλία ποὺ διατηρεῖ τοὺς κύκλους εἶναι ὁμοιότητα, ἄρα Σ εἶναι ὁμοιότητα καὶ τελικὰ

$$u = V \cdot \tau = J \cdot \Sigma \cdot J \cdot \tau$$

καὶ ἔτσι ἀποδείχτηκε καὶ τὸ ἱκανό.

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ἀκόμα ὅτι κάθε μετασχηματισμὸς τῆς κυκλικῆς ὁμάδας μπορεῖ νὰ γραφτῆ σὰν γινόμενο πεπερασμένου πλήθους ἀντιστροφῶν.

Πραγματικά, κάθε μετατόπιση γράφεται σὰν γινόμενο δυὸ συμμετριῶν πρὸς εὐθεῖες, δηλαδὴ δύο ἀντιστροφῶν ἀφοῦ ἡ συμμετρία πρὸς εὐθεῖαν εἶναι εἰδικὴ περίπτωση τῆς ἀντιστροφῆς. Κάθε ἀντιμετατόπιση γράφεται σὰν γινόμενο τριῶν συμμετριῶν πρὸς εὐθεῖες, δηλαδὴ τριῶν ἀντιστροφῶν. Ἀκόμα κάθε ὁμοιοθεσία σὰν γινόμενο δυὸ ἀντιστροφῶν. Ἄρα κάθε μετασχηματισμὸς τῆς κυκλικῆς ὁμάδας μπορεῖ νὰ γραφτῆ σὰν γινόμενο n ἀντιστροφῶν. Ἀκόμα τοὺς μετασχηματισμοὺς τῆς κυκλικῆς ὁμάδας μποροῦμε νὰ τοὺς διακρίνουμε σὲ περιττοὺς ἢ ἄρτιους ἀνάλογα μὲ τὸν δείκτη n. Ἂν n = ἄρτιος ὁ μετασχηματισμὸς θὰ λέγεται ἄρτιος καὶ εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι διατηρεῖ τὶς γωνίες κατὰ μέτρο καὶ διεύθυνση.

7.7. Ἀσκήσεις.

1. Τά ἀντίστροφα δύο τυχαίων κύκλων (K,R), (K',R') κατά τήν ἀντιστροφή μέ πόλο τυχαῖο σημεῖο τοῦ κύκλου ἀντιομοιότητας εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξη:

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $(K',R') = \mathcal{J}_{(O,p)}[(K,R)]$ καί $O_1 \in (O,\sqrt{p})$, δηλαδή O_1 τυχαῖο σημεῖο τοῦ κύκλου ἀντιομοιότητας. Παίρνουμε τήν transmuée τῆς $\mathcal{J}_{(O,p)}$ πρός $\mathcal{J}_{(O_1,p_1)}$, ὅπου p_1 τυχαῖο. Εἶναι γνωστό (7.6.1) ὅτι τά $(\alpha) = \mathcal{J}_{(O_1,p_1)}[(K',R')]$ καί $(\beta) = \mathcal{J}_{(O_1,p_1)}[(K,R)]$ εἶναι ἀντίστροφα κατά τήν ἀντιστροφή μέ κύκλο ἀντιστροφῆς τόν $(\varepsilon) = \mathcal{J}_{(O_1,p_1)}[(O,\sqrt{p})]$. Ἐπειδή ὅμως $O_1 \in (O,\sqrt{p})$ συνεπάγεται ὅτι (ε) εἶναι εὐθεία καί ἄρα τά (α), (β) συμμετρικά πρός (ε).

2. Σ' ἕνα ἐπίπεδο δίνονται 4 σημεῖα A, B, Γ, Δ. Ὀνομάζουμε

$$\alpha = \Delta A \cdot B\Gamma,\ \beta = \Delta B \cdot \Gamma A,\ \gamma = \Delta\Gamma \cdot AB. \qquad (1)$$

θά ἀποδείξουμε ὅτι (α) $\alpha+\beta \geqslant \gamma$, $\beta+\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma+\alpha \geqslant \beta$, (β) ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι τά A, B, Γ, Δ ὁμοκυκλικά εἶναι μία τό λιγότερο ἀπ' τίς προηγούμενες σχέσεις (α) νά εἶναι ἰσότητα, (γ) Ἄν $\beta = \alpha+\gamma$ τότε τά σημεῖα βρίσκονται στήν περιφέρεια κύκλου μέ τήν σειρά A, B, Γ, Δ.

Ἀπόδειξη:

Θεωροῦμε τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(\Delta,p)}$ καί ἄς εἶναι A', B', Γ' τά ἀντίστροφα τῶν A, B, Γ. Γνωρίζουμε ὅτι:

$$B'\Gamma' = \frac{|p| \cdot B\Gamma}{\Delta B \cdot \Delta\Gamma} = \frac{|p|}{\Delta A \cdot \Delta B \cdot \Delta\Gamma} \cdot \Delta A \cdot B\Gamma.$$

Ἀνάλογοι τύποι δίνουν τά $\Gamma'A'$, $A'B'$, ὁπότε ἀντικαθιστῶντας ἀπό τήν (1) θά ἔχουμε

$$\frac{B'\Gamma'}{\alpha} = \frac{\Gamma'A'}{\beta} = \frac{A'B'}{\gamma}.$$

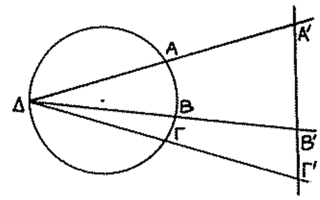
Μποροῦμε τώρα νά θεωρήσουμε τά A', B', Γ' σάν κορυφές τριγώνου, ὁπότε θά ἰσχύη ἡ τριγωνική ἀνισότητα μεταξύ τῶν $A'B'$, $B'\Gamma'$, $\Gamma'A'$. Ἄρα καί οἱ σχέσεις:

$$\alpha+\beta > \gamma,\ \beta+\gamma > \alpha,\ \gamma+\alpha > \beta.$$

Ἄν τά σημεῖα A', B', Γ' βρίσκονται σέ εὐθεία, ὁπότε τά A, B, Γ, Δ θά βρίσκονται σέ περιφέρεια, θά ἰσχύη μία ἀπό τίς σχέσεις:

$$a=\beta+\gamma,\ \beta=\gamma+a,\ \gamma=a+\beta.$$

Τέλος, ἄν $\beta=a+\gamma$, θά εἶναι καί $A'\Gamma'=A'B'+B'\Gamma'$, δηλαδή ἡ διαδοχή τῶν A', B', Γ' θά εἶναι: A', B', Γ' ἤ Γ', B', A'. Αὐτό σημαίνει ὅτι καί ἡ διαδοχή τῶν A, B, Γ, Δ στόν κύκλο εἶναι ἡ ἴδια.



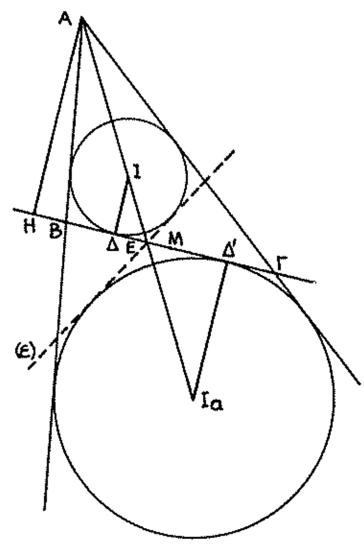
Ἄν $AB\Gamma\Delta$ κυρτόν καί $A\Gamma \cap B\Delta \neq \emptyset$, τότε ξαναβρίσκουμε τό γνωστό θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου (Α' τεῦχος, 11.6).

3. Τό θεώρημα τοῦ Feuerbach.

Ἡ περιφέρεια Euler τριγώνου ἐφάπτεται τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξη:

Ἡ BI εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας B τοῦ τριγώνου $AB E$. Παρόμοια ἡ BI_a εἶναι ἡ ἐξωτερική διχοτόμος τῆς ἴδιας γωνίας. Ἄρα τά σημεῖα $A, E-I, I_a$ ἀποτελοῦν ἁρμονική τετράδα. Τό ἴδιο θά συμβαίνη μέ τίς προβολές τους στήν $B\Gamma$. Δηλαδή τά $H, E-\Delta, \Delta'$ εἶναι ἁρμονική τετράδα. Ὅπως εἶναι γνωστό τό μέσον M τῆς $B\Gamma$ εἶναι καί μέσον τοῦ τμήματος $\Delta\Delta'$. Κατά τό θεώρημα τοῦ Newton (Α' τεῦχος, 3.3.3) ἔχουμε $\overline{M\Delta}^2=\overline{M\Delta'}^2=\overline{ME}\cdot\overline{MH}$.



Θεωροῦμε τώρα τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(M, M\Delta^2)}$. Οἱ κύκλοι (I), (I_a) παραμένουν ἀμετάβλητοι καί ὁ κύκλος τοῦ Euler μετασχηματίζεται σέ εὐθεία (ε) κάθετη ἀπ' τό E στήν MO_1, ὅπου (O_1) ὁ κύκλος Euler. Ὅπως εἶναι γνωστό (Α' τεῦχος, 11.2) $MO_1 \parallel AO$, ὅπου O τό περίκεντρο τοῦ $AB\Gamma$. Ἡ ἐφαπτόμενη τοῦ (O) στό A σχηματίζει μέ τήν $A\Gamma$ γωνία ἴση μέ B. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ (ε) εἶναι ἡ συμμετρική τῆς $B\Gamma$ πρός AE, δηλαδή ἡ κοινή ἐφαπτόμενη τῶν $(I), (I_a)$. Ἄρα λοιπόν τά ἀντίστροφα τῶν $(I), (I_a), (O_1)$ ἐφάπτονται. Αὐτό σημαίνει ὅτι καὶ οἱ κύκλοι $(I), (I_\alpha), (O_1)$ ἐφάπτονται.

4. Θεωροῦμε τοὺς κύκλους $(O_1), (O_2), (O_3)$ ποὺ ἐφάπτονται ἐξωτερικὰ μὲ δυὸ ἀπ' τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους τριγώνου καὶ ἐσωτερικὰ μὲ τὸν τρίτο. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ $(O_1), (O_2), (O_3)$ ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο.

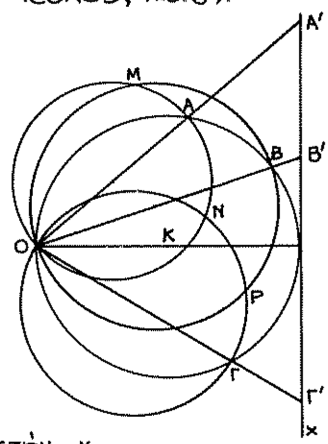
Ἀπόδειξη:

Ὀνομάζουμε $(I_\alpha), (I_\beta), (I_\gamma)$ τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους καὶ ἂς εἶναι P τὸ ριζικὸ κέντρο τους. Ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}(P, p)$, ὅπου p ἡ δύναμη τοῦ P πρὸς τοὺς $(I_\alpha), (I_\beta), (I_\gamma)$, ἀφήνει ἀμετάβλητους τοὺς κύκλους $(I_\alpha), (I_\beta), (I_\gamma)$ καὶ μετασχηματίζει τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στοὺς κύκλους $(O_1), (O_2), (O_3)$ ἀντίστοιχα. Ὅπως εἶναι γνωστὸ τὰ ἀντίστροφα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ θὰ περνᾶν ἀπὸ τὸν πόλο ἀντιστροφῆς P.

5. Τὸ θεώρημα τοῦ Salmon.

Σὲ περιφέρεια (K, R) παίρνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Ο καὶ φέρνουμε τρεῖς τυχαῖες χορδὲς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τέμνονται ἀνὰ δύο σὲ τρία σημεῖα ποὺ βρίσκονται σὲ εὐθεία (Α' τεῦχος, 11.3.6).

Ἀπόδειξη:



Θεωροῦμε τὸ ἀντίστροφο τοῦ σχήματος κατὰ τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}(O, 4R^2)$. Ἡ περιφέρεια (K, R) γίνεται ἡ εὐθεία x. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ γίνονται τὰ Α', Β', Γ' καὶ οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τρεῖς εὐθεῖες κάθετες στὶς ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' στὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντίστοιχα. Τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ τομῆς τῶν κύκλων μετασχηματίζονται στὰ Μ', Ν', Ρ'. Οἱ πόδες στὴν x τῶν καθέτων ἀπ' τὸ Ο στὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου Μ'Ν'Ρ' εἶναι τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Ἄρα τὸ Ο, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Simson (Α' τεῦχος, 11.3), βρίσκεται στὸν περιγεγραμμένο κύκλο περὶ τὸ τρίγωνο Μ'Ν'Ρ'. Δηλαδὴ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ βρίσκονται στὸ ἀντίστροφο πρὸς $\mathcal{J}(O, 4R^2)$ τοῦ κύκλου ΟΜ'Ν'Ρ'. Δηλαδὴ σὲ εὐθεία.

6. Δυό κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό σημεῖο Α. Φέρνουμε τυχαία εὐθεία (ε), πού τέμνει τούς κύκλους διαδοχικά στά σημεῖα Β,Γ,Δ,Ε. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι $B\hat{A}\Gamma=\Delta\hat{A}E$. (Α' τεῦχος, ἄσκ. 152).

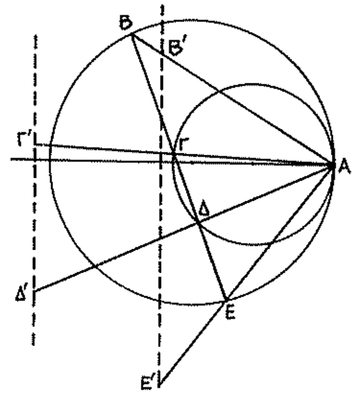
Ἀπόδειξη:

Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(A,\rho)}$, ὅπου ρ τυχαῖο, μετασχηματίζει τούς κύκλους πού ἔχουν δοθῆ σέ δύο εὐθεῖες παράλληλες καί τήν εὐθεία (ε) στόν κύκλο ΑΒ'Γ'Δ'Ε'. Σ' αὐτόν τόν κύκλο εἶναι φανερό ὅτι

$$\widehat{B'\Gamma'}=\widehat{E'\Delta'}$$

Δηλαδή τελικά

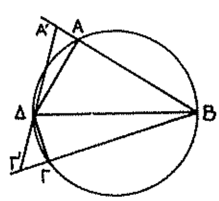
$$B'\hat{A}\Gamma'=\Delta'\hat{A}E'$$



7. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο). Ἀπό τό Δ φέρνουμε μιά τυχαία εὐθεία πού τέμνει τίς ΒΑ, ΒΓ στά Α', Γ' ἀντίστοιχα. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ κύκλοι ΔΑΑ', ΔΓΓ' ἐφάπτονται.

Ἀπόδειξη:

Εἶναι εὔκολο νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ γωνία τῶν κύκλων ΒΓΔ καί Γ'ΓΔ εἶναι ἴση μέ $B\hat{\Delta}\Gamma'$. Ἐπίσης ἡ γωνία τῶν κύκλων ΒΑΔ, Α'ΑΔ εἶναι ἴση μέ $B\hat{\Delta}A'$. Εἶναι ὅμως φανερό ὅτι $B\hat{\Delta}\Gamma'+B\hat{\Delta}A'=\pi$.



Ἄν τώρα ἀντιστρέψουμε τούς τρεῖς κύκλους (Ο),(ΓΓ'Δ),(ΑΑ'Δ) μέ πόλο Δ καί δύναμη ἀντιστροφῆς τυχαία, θά πάρουμε ἀντίστοιχα τίς εὐθεῖες $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2$. Θά ἰσχύη ἡ γνωστή σχέση τοῦ Chasles (Α' τεῦχος, §8.2):

$$(\varepsilon,\varepsilon_1)+(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(\varepsilon_2,\varepsilon)=\kappa\pi$$

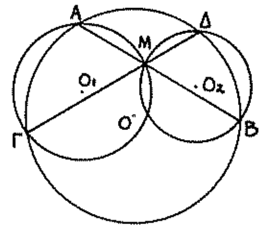
ἤ $\pi+(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\kappa\pi$. Ἄρα $\varepsilon_1\parallel\varepsilon_2$.

Παρατήρηση:

Ἡ σχέση τοῦ Chasles μέ ἀντιστροφή τῶν n εὐθειῶν παίρνει τήν ἴδια μορφή καί γιά περιφέρειες.

8. Θεωροῦμε ἕνα κύκλο (Ο) καί δυό χορδές ΑΒ καί ΓΔ πού τέμνονται στό σημεῖο Μ. Ἄν O_1,O_2 τά κέντρα τῶν κύκλων ΑΜΓ καὶ ΒΜΔ ἀντίστοιχα τὸ τετράπλευρο O_1MO_2O εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀπόδειξη:



Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(M,p)}$, ὅπου $p=\mathcal{D}_0(M)$, μετασχηματίζει τὴν εὐθεία ΒΔ στὸν κύκλο ΑΜΓ. Ἄρα $O_1M \perp B\Delta$. Εἶναι ὅμως καὶ $OO_2 \perp B\Delta$ (OO_2 διάκεντρος), ἄρα $O_1M \parallel OO_2$.

Παρόμοια $O_2M \parallel OO_1$.

Ἄρα O_1MO_2O παραλληλόγραμμο.

9. Σ' ἕνα ἐπίπεδο δίνονται 5 σημεῖα Ρ, Α, Β, Γ, Δ. Ἄν οἱ κύκλοι ΡΑΒ, ΡΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, ὅπως καὶ οἱ κύκλοι ΡΑΓ καὶ ΡΒΔ τότε οἱ κύκλοι ΡΑΔ, ΡΒΓ θὰ εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιοι.

Ἀπόδειξη:

Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(P,p)}$ μετασχηματίζει κάθε σημεῖο στὸ ἀντίστοιχο μὲ τόνο, δηλαδή τὸ Α στὸ Α' κ.τ.λ. Ὁ κύκλος ΡΑΒ γίνεται ἡ εὐθεία Α'Β' κ.τ.λ.

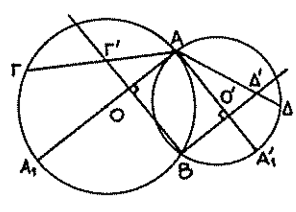
Ἄρα τὸ πρόβλημα τελικὰ γίνεται:

$$\left.\begin{matrix} A'B' \perp \Gamma'\Delta' \\ A'\Gamma' \perp B'\Delta' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A'\Delta' \perp B'\Gamma'$$

Αὐτὸ ὅμως εἶναι φανερὸ γιατὶ στὸ τρίγωνο Α'Γ'Δ' τὸ Β' εἶναι ὀρθόκεντρο.

10. Τέσσερα σημεῖα ὁρίζουν ἀνὰ τρία 4 κύκλους. Ἄν οἱ δυὸ ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ὀρθογώνιοι τότε καὶ οἱ ἄλλοι δύο θὰ εἶναι ὀρθογώνιοι.

Ἀπόδειξη:



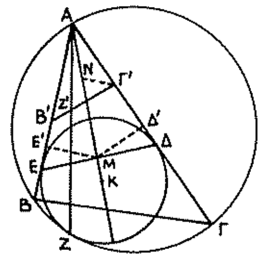
Ἄς εἶναι Α, Β, Γ, Δ τὰ σημεῖα. Ἄν οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι καὶ οἱ κύκλοι ΓΑΔ, ΓΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(A,AB^2)}$ μετασχηματίζει τὸν κύκλο (Ο) σὲ εὐθεία κάθετη ἀπ' τὸ Β στὴν διάμετρο AA_1. Παρόμοια ὁ (Ο') μετασχηματίζεται σὲ εὐθεία κάθετη ἀπ' τὸ Β στὴν διάμετρο AA_1'. Ὁ κύκλος ΓΑΔ γίνεται ἡ εὐθεία Γ'Δ' καὶ ὁ κύκλος ΓΒΔ γίνεται ὁ κύκλος

Γ'ΒΔ'. Ἐπειδὴ ὅμως $O\hat{A}O'=1^{\llcorner}$, θὰ εἶναι καὶ $Γ'\hat{B}Δ'=1^{\llcorner}$. Δηλαδὴ ἡ Γ'Δ' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Γ'ΒΔ'. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἀντίστροφο τοῦ κύκλου ΓΑΔ καὶ τὸ ἀντίστροφο τοῦ κύκλου ΓΒΔ τέμνονται ὀρθογώνια, ἄρα καὶ οἱ κύκλοι ΓΑΔ, ΓΒΔ τέμνονται ὀρθογώνια.

11. Ἂν ὁ κύκλος (Κ) ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, καθὼς καὶ ἐσωτερικὰ τοῦ τόξου ΒΓ τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας τοῦ $\widehat{ΑΒΓ}$, νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ (Κ) μὲ τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ περνᾶ ἀπὸ τὸ ἔγκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀπόδειξη:



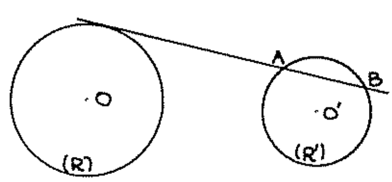
Θεωροῦμε τὴν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(A,AM^2)}$. Τὰ σημεῖα Β,Ζ,Γ ἀντιστρέφονται στὰ Β',Ζ',Γ'. Ὁ κύκλος ΑΒΓ στὴν εὐθεία Β'Γ'. Τὰ σημεῖα Ε,Δ στὰ Ε',Δ'. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΕ καὶ ΑΜΔ βλέπουμε εὔκολα ὅτι $ΜΕ'\perp ΑΕ$, $ΜΔ'\perp ΑΔ$ καὶ $ΜΕ'=ΜΔ'$. Ὁ κύκλος (Κ) ἀντιστρέφεται λοιπὸν κατὰ τὸν κύκλο Ε'Ζ'Δ', ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὶς Β'Γ', ΑΒ', ΑΓ'. Δηλαδὴ γίνεται ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος τοῦ $\widehat{ΑΒ'Γ'}$. Ἀλλὰ τότε εὔκολα βρίσκουμε ὅτι $Β'\hat{Μ}Α=\frac{\hat{Γ}'}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως $ΑΜ^2=ΑΒ'\cdot ΑΒ$, θὰ εἶναι $Β'\hat{Μ}Α=Α\hat{Β}Μ$, δηλαδὴ $Α\hat{Β}Μ=\frac{\hat{Γ}'}{2}$. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἐγγράψιμο Β'Γ'ΓΒ ἔχουμε $\hat{Γ}'=\hat{Β}$, ἄρα λοιπὸν $Α\hat{Β}Μ=\frac{\hat{Β}}{2}$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ ἔγκεντρο τοῦ $\widehat{ΑΒΓ}$.

Παρατήρηση:

Τὸ ἴδιο πρόβλημα μπορεῖ νὰ ἀποδειχτῆ ἂν ὁ κύκλος (Κ) ἐφάπτεται ἐξωτερικά, ὁπότε ἡ ΕΔ θὰ περνᾶ ἀπ' τὸ παράκεντρο I_a τοῦ $\widehat{ΑΒΓ}$.

12. Δίνονται δύο κύκλοι (O,R), (O',R'). Μεταβλητὴ ἐφαπτομένη τοῦ (O) τέμνει τὸν (O') στὰ Α,Β. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ μεταβλητὸς κύκλος Ο'ΑΒ ἐφάπτεται σταθεροῦ κύκλου.

Ἀπόδειξη:



Θεωροῦμε τὴν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O',R'^2)}$. Ὁ κύκλος Ο'ΑΒ μετασχηματίζεται στὴν εὐθεία ΑΒ, ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὸν (O). Ἄρα ὁ κύκλος $O'AB$ ἐφάπτεται μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ (O,R) κατὰ τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O',R'^2)}$.

13. Σ' ἕνα ἐπίπεδο δίνονται 4 σημεῖα A,B,Γ,Δ. Κάθε ὁμάδα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία σημεῖα ἀντιστρέφεται μὲ πόλο τὸ τέταρτο σημεῖο. Προκύπτουν ἔτσι 4 τρίγωνα. Νὰ ἀποδειχτῇ ὅτι εἶναι ὅμοια μεταξύ τους.

Ἀπόδειξη:

Ἂς εἶναι $\mathcal{J}_{(\Delta,p)}$ ἡ ἀντιστροφὴ ποὺ ἀντιστρέφει τὰ A,B,Γ καὶ A',B',Γ' τὰ ἀντίστροφά τους ἀντίστοιχα. Ὅπως εἶναι γνωστό, θὰ ἔχουμε:

$$A'B'=\frac{p}{\Delta A\cdot\Delta B}\cdot AB,\ B'\Gamma'=\frac{p}{\Delta B\cdot\Delta\Gamma}\cdot B\Gamma,\ A'\Gamma'=\frac{p}{\Delta A\cdot\Delta\Gamma}\cdot A\Gamma$$

Ἄρα $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}\cdot\frac{BA}{B\Gamma}$ καὶ $\frac{A'B'}{A'\Gamma'}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}\cdot\frac{AB}{A\Gamma}$.

Ἂν τώρα ἀντιστρέψουμε μὲ πόλο B θὰ ἔχουμε παρόμοια $\frac{\Delta_1\Gamma_1}{A_1\Delta_1}=\frac{AB}{B\Gamma}\cdot\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$ καὶ $\frac{\Delta_1\Gamma_1}{A_1\Gamma_1}=\frac{AB}{B\Gamma}\cdot\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$. Δηλαδὴ $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{\Delta_1\Gamma_1}{A_1\Gamma_1}$, $\frac{A'B'}{A'\Gamma'}=\frac{\Delta_1\Gamma_1}{A_1\Delta_1}$ καὶ τέλος

$$\frac{A'B'}{\Delta_1\Gamma_1}=\frac{B'\Gamma'}{A_1\Gamma_1}=\frac{A'\Gamma'}{A_1\Delta_1}\iff A'\hat{B'}\Gamma'\sim\Delta_1\hat{\Gamma_1}A_1.$$

Παρόμοια καὶ γιὰ τὰ ὑπόλοιπα τρίγωνα.

14. Νὰ βρεθῇ τὸ σύνολο τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν μὲ γνωστὴ δύναμη p, ποὺ μετασχηματίζουν δυὸ περιφέρειες ποὺ τέμνονται στὰ A,B σὲ δυὸ ἴσες περιφέρειες.

Λύση:

Ἂς εἶναι $(K,R),(K',R')$ οἱ κύκλοι ποὺ τέμνονται στὰ A,B καὶ $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μιὰ ἀντιστροφὴ ποὺ τοὺς μετασχηματίζει στοὺς ἴσους κύκλους $(K_1,\rho),(K_1',\rho')$. Ὁ κύκλος OAB θὰ μετασχηματίζεται στὴν κοινὴ χορδὴ τῶν $(K_1),(K_1')$, ποὺ θὰ σχηματίζῃ μὲ αὐτοὺς τοὺς κύκλους ἴσες γωνίες ἀφοῦ εἶναι ἴσοι οἱ κύκλοι. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ κύκλος OAB σχηματίζει ἴσες γωνίες μὲ τοὺς κύκλους (K) καὶ (K'). Αὐτὸ ὅμως συμβαίνει μόνο ἂν ὁ κύκλος OAB εἶναι ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς ποὺ μετασχηματίζει τοὺς (K) καὶ (K') μεταξύ τους.

15. Δίνονται δυὸ κύκλοι (K,R) καὶ (K',R'). Νὰ βρεθῇ τὸ σύνολο G τῶν σημείων M, ποὺ οἱ ἀντιστροφὲς $\mathcal{J}_{(M,q)}$, ὅπου q τυχαῖο, νὰ μετασχηματίζουν τοὺς κύκλους $(K,R),(K',R')$ σὲ ἴσους κύκλους

1η λύση:

Ἄς εἶναι $(K_1,R_1)=\mathcal{J}_{(M,q)}[(K,R)]$ καί $(K_1',R_1')=\mathcal{J}_{(M,q)}[(K',R')]$. Ὅπως εἶναι γνωστό

$$R_1=\left|\frac{q}{\mathcal{D}_K(M)}\right|R \text{ καί } R_1'=\left|\frac{q}{\mathcal{D}_{K'}(M)}\right|R'.$$

θά πρέπη $R_1=R_1'$ ἤ

$$\frac{|\mathcal{D}_K(M)|}{|\mathcal{D}_{K'}(M')|}=\frac{R}{R'}.$$

Σύμφωνα μέ τήν ἄσκ. 1001 (Α' τεῦχος Γεωμ.) τό σύνολο G ἀποτελεῖται ἀπό κύκλους τῆς δέσμης τῶν $(K,R),(K',R')$, πραγματικούς ἄν τό M βρίσκεται ἐντός ἤ ἐκτός τῶν δύο κύκλων καί φανταστικούς στίς ὑπόλοιπες περιπτώσεις. Ἄν οἱ κύκλοι (K,R) καί (K',R') τέμνονται, τό G ἀποτελεῖται ἀπό δύο πραγματικούς κύκλους, πού τέμνονται ὀρθογώνια στά σημεῖα τομῆς τῶν $(K,R),(K',R')$ καί ἔχουν κέντρα τά κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων (K,R) καί (K',R'). Ἄν οἱ $(K,R),(K',R')$ δέν ἔχουν κοινά σημεῖα, τό G ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πραγματικό κύκλο τῆς δέσμης τῶν $(K,R),(K',R')$ μέ κέντρο τό ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας ἄν οἱ κύκλοι εἶναι ὁ ἕνας ἐκτός τοῦ ἄλλου ἤ τό ἐσωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας ἄν ὁ ἕνας κύκλος εἶναι ἐντός τοῦ ἄλλου.

2η λύση:

Ἄς εἶναι $(K_1),(K_1')$ τά ἀντίστροφα τῶν $(K),(K')$ ἀντίστοιχα. καί (ε) ὁ ἄξονας συμμετρίας πού μετασχηματίζει τόν κύκλο (K_1) στόν (K_1'). Ἄν ἐφαρμόσουμε στό σχῆμα τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(M,q)}$, τότε $\mathcal{J}_{(M,q)}[\varepsilon]$ εἶναι ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς πού μετασχηματίζει τούς $(K),(K')$ μεταξύ τους, σύμφωνα μέ τήν παράγραφο 7.6.

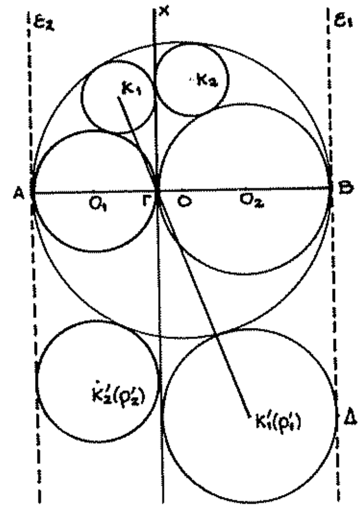
Παρατήρηση:

Συγκρίνετέ την μέ τήν ἄσκ.

16. Δίνεται κύκλος (O,R) μέ διάμετρο AB. Σέ τυχαῖο σημεῖο Γ τῆς AB φέρνουμε τήν κάθετη Γx ἐπί τήν AB. Θεωροῦμε τούς δύο κύκλους (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΓΒ ἀντίστοιχα. Ἄν (K_1,ρ_1) ὁ κύκλος πού ἐφάπτεται μέ τόν (O,R) ἐσωτερικά, μέ τόν (O_1,R_1) ἐξωτερικά καί μέ τήν εὐθεία Γx καί (K_2,ρ_2) ὁ κύκλος πού ἐφάπτεται μέ τόν (O,R) ἐσωτερικά, μέ τόν (O_2,R_2) ἐξωτερικά καί μέ τὴν Γx, νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι $\rho_1=\rho_2$.

Ἀπόδειξη:

Ἐφαρμόζουμε στὸ σχῆμα τὴν ἀντιστροφή $\mathcal{J}(\Gamma, -4R_1R_2)$. Ἐπειδὴ $\mathcal{D}_O(\Gamma)=-4R_1R_2$, ὁ κύκλος (O) μένει ἀμετάβλητος. Ὁ (O_1) γίνεται ἡ εὐθεία ε_1 καὶ ὁ (O_2) ἡ εὐθεία ε_2. Ὁ κύκλος (K_1,ρ_1) γίνεται ὁ (K_1',ρ_1') καὶ ὁ (K_2,ρ_2) γίνεται ὁ (K_2',ρ_2'). Εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ ἔχουμε $\rho_1'=R_2$, $\rho_2'=R_1$ καὶ $R_1+R_2=R$.



Ὅπως εἶναι γνωστὸ

$$\rho_1=\left|\frac{4R_1R_2}{\mathcal{D}_{K_1'}(\Gamma)}\right|\rho_1'$$

Ἀλλὰ

$$\mathcal{D}_{K_1'}(\Gamma)=K_1'\Gamma^2-\rho_1'^2=B\Delta^2=4RR_2$$

(ἄσκ. 263, Α' τεῦχος). Ἄρα

$$\rho_1=\frac{4R_1R_2}{4RR_2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

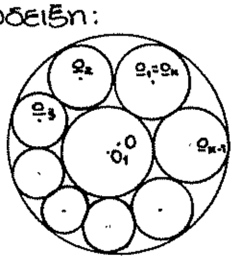
Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι συμμετρική, θὰ ἔχουμε καὶ $\rho_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Ἄρα $\rho_1=\rho_2$.

(Δέστε καὶ τὴν ἄσκ. 325, Α' τεῦχος).

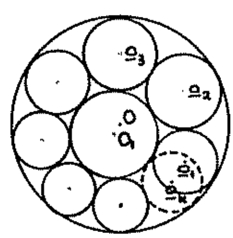
17. Ἡ ἀλυσσίδα τοῦ Steiner.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ κύκλος (O_1,R_1) βρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου (O,R). Θεωροῦμε μιὰ σειρὰ κύκλων ποὺ ἐφάπτονται μὲ τοὺς (O,R), (O_1,R_1) καὶ μεταξύ τους διαδοχικὰ καὶ ἄς εἶναι $(\Omega_1),(\Omega_2),\dots,(\Omega_\kappa)$. Ἄν γιὰ κάποιο δείκτη κ εἶναι $(\Omega_\kappa)=(\Omega_1)$, τότε ὅπως κι ἄν κατασκευαστῆ (δηλαδὴ σὲ ὁποιο σημεῖο) ὁ πρῶτος κύκλος (Ω_1) ἡ ἀλυσσίδα τῶν κύκλων $(\Omega_1),(\Omega_2),\dots,(\Omega_\kappa)$ θὰ κλείνη, δηλαδὴ $(\Omega_\kappa)=(\Omega_1)$.

Ἀπόδειξη:



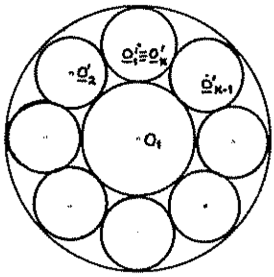
σχ. (1)



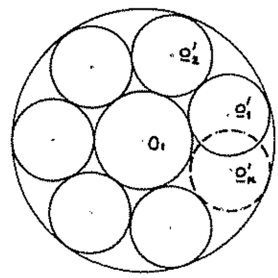
σχ. (2)

Στό σχῆμα (1) ἡ ἀλυσσίδα κλείνει, δηλαδή $(\varrho_1)=(\varrho_\kappa)$. Στό σχῆμα (2) ἡ ἀλυσσίδα δέν κλείνει, δηλαδή $(\varrho_1)\neq(\varrho_\kappa)$. Εἶναι δυνατόν ἡ ἀλυσσίδα νά κλείνη, ἀφοῦ ἔχουν γίνει m κύκλοι. Δηλαδή ἀφοῦ ἡ ἀλυσσίδα τῶν $(\varrho_1),(\varrho_2),\dots,(\varrho_\kappa)$ "τύλιξε" m φορές τόν (O_1). Φυσικά εἶναι δυνατόν νά μή κλείνη ποτέ.

Ἄν κάνουμε μιά ἀντιστροφή ἔτσι πού οἱ $(O),(O_1)$ νά γίνουν ὁμόκεντροι, οἱ κύκλοι τῆς ἀλυσσίδας θά γίνουν ὅλοι ἴσοι.



σχ. $(1)'$



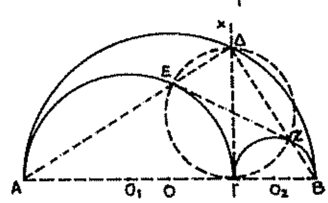
σχ. $(2)'$

Τό σχ. (1) γίνεται σχ. $(1)'$, τό σχ. (2) γίνεται σχ. $(2)'$.

Τό σχ. $(1)'$ μᾶς δείχνει ὅτι ἄν ἡ ἀλυσσίδα κλείνη, ἀκόμα καί ἄν τυλίξη τόν (O_1) m φορές, ὅπου κι ἄν κατασκευαστῆ ὁ (ϱ_1') θά κλείνη πάντοτε μετά m τυλίγματα, ἀφοῦ $(\varrho_1'),(\varrho_2'),\dots,(\varrho_\kappa')$ εἶναι ἴσοι καί φυσικά (σχ. $(2)'$) ἄν δέν κλείνη ἡ ἀλυσσίδα, ὅπου κι ἄν κατασκευαστῆ ὁ (ϱ_i'), ἀφοῦ οἱ (ϱ_i') εἶναι ἴσοι, ἡ ἀλυσσίδα δέν θά κλείνη.

18. Ἡ ἄρβυλος.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί μελέτησαν τό παρακάτω σχῆμα:



Ἡμικύκλιο (O,R) μέ διάμετρο AB. Γ τυχαῖο σημεῖο τοῦ τμήματος AB καί (O_1,R_1), (O_2,R_2) τά ἡμικύκλια μέ διαμέτρους ΑΓ, ΓΒ στό ἐσωτερικό τοῦ ἡμικυκλίου. Τό σχῆμα μέ τήν τονισμένη γραμμή τό ἀποκάλεσαν ἄρβυλο καί μελέτησαν διάφορες ἰδιότητές του:

(1) τόξο $\widehat{A\Delta B}$ = τόξο $\widehat{AE\Gamma}$ + τόξο $\widehat{\Gamma ZB}$,

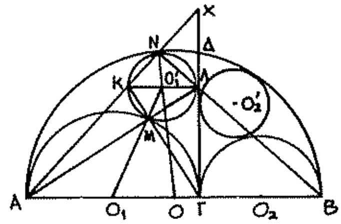
(2) $\Gamma\Delta^2 = EZ^2 = 4R_1R_2$,

(3) ΓΕΔΖ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ ΕΖ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν $(O_1),(O_2)$,

(4) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀρβύλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου μὲ διάμετρο ΓΔ,

(5) οἱ εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΒΔ περνᾶν ἀπ' τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου μὲ διάμετρο ΓΔ μὲ τὶς $(O_1),(O_2)$,

(6) οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι στὰ καμπυλόγραμμα τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσοι.



(Γιὰ τὴ λύση δέστε καὶ ἄσκ. 16)

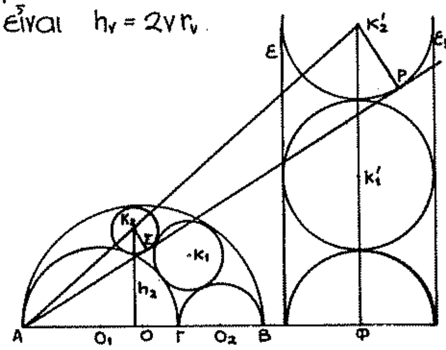
Ἀκόμα μία ἁπλῆ λύση ἡ παρακάτω:

Ἄς εἶναι (O_1') ὁ ἕνας κύκλος καὶ Λ, Μ, Ν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὴν ΓΔ, τὸν (O_1) καὶ τὸν (O) ἀντίστοιχα. Ἡ ΑΛ περνᾶ ἀπ' τὸ Μ καὶ ἡ ΓΜ τέμνει τὸν (O_1') στὸ Κ ἀντιδιαμετρικὸ τοῦ Λ. Ἡ ΑΝ περνᾶ ἀπ' τὸ Κ καὶ ἡ ΒΝ ἀπὸ τὸ Λ. Εὔκολα μποροῦμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι

$$\frac{K\Lambda}{A\Gamma} = \frac{KX}{AX} = \frac{B\Gamma}{AB},$$

ποὺ ὁδηγεῖ ἀμέσως στὴ λύση.

(7) Ἄν πάρουμε τοὺς διαδοχικοὺς κύκλους $(K_1,r_1),(K_2,r_2),\ldots,(K_\nu,r_\nu),\ldots$ ὅπως φαίνεται στὸ παρακάτω σχῆμα καὶ h_ν ἡ ἀπόσταση τοῦ K_ν ἀπὸ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι $h_\nu = 2\nu r_\nu$.



Πραγματικά, ἂν ἀντιστρέψουμε μὲ πόλο Α οἱ κύκλοι $(O_1),(O)$ γίνονται εὐθεῖες $\varepsilon_1, \varepsilon$ ἀντίστοιχα κάθετες στὴν ΑΒ καὶ οἱ κύκλοι $(K_1),(K_2),\ldots,(K_\nu)$ γίνονται οἱ ἴσοι κύκλοι (K_1'), $(K_2'),\ldots,(K_\nu')$.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα βλέπουμε ὅτι ἔχουμε ἂν πάρουμε τὸν (K_2):

$$\widehat{A\Sigma K_2} \sim \widehat{APK_2'} \Longrightarrow \frac{r_2}{r_2'} = \frac{AK_2}{AK_2'} = \frac{h_2}{K_2'\Phi}.$$

Ἀλλὰ $K_2'\Phi = 4r_2'$, ἄρα $r_2 = \frac{h_2}{4}$ καὶ τελικὰ $h_2 = 2\cdot 2\cdot r_2$.

Παρόμοια ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ γενικὰ $h_\nu = 2\nu r_\nu$.

Παρατήρηση:

Ἡ ἰδιότητα (7) ἀποδείχτηκε ἀπ' τὸν Πάππο χωρὶς ἀντιστροφή.

(8) Ὁ μικρότερος κύκλος πού περιέχει τούς κύκλους τοῦ (6) ἔχει ἐμβαδόν ἴσο μέ τό ἐμβαδόν τῆς ἀρβύλου.

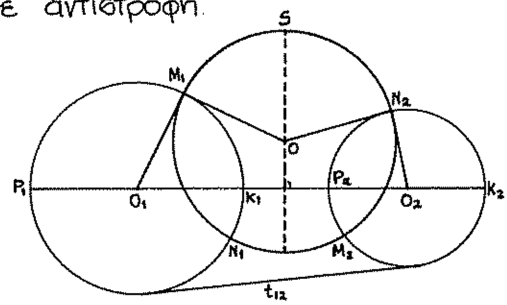
19. Δύο κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ ἔχουν κοινή ἐξωτερική ἤ ἐσωτερική ἐφαπτομενική ἀπόσταση ἴση μέ t_{12}. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι τό κλάσμα

$$\frac{t_{12}^2}{R_1\cdot R_2}$$

παραμένει ἀμετάβλητο σέ κάθε ἀντιστροφή.

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι t_{12} ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν (O_1,R_1), (O_2,R_2).



Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι $t_{12}^2=d^2-(R_1-R_2)^2$, ὅπου $d=O_1O_2$ καί ἀκόμα

$$\frac{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{K_1K_2}}{\overline{P_1K_1}\cdot\overline{P_2K_2}}=\frac{(d+R_1-R_2)(d-R_1+R_2)}{4R_1R_2}=\frac{d^2-(R_1-R_2)^2}{4R_1R_2}=\frac{t_{12}^2}{4R_1R_2}$$

Θεωροῦμε τώρα ἕνα κύκλο (O) πού τέμνει ὀρθογώνια τούς $(O_1),(O_2)$ καί S τό σημεῖο τομῆς τοῦ (O) μέ τόν ριζικό ἄξονα τῶν $(O_1),(O_2)$. Ἄς εἶναι M_1,N_1,M_2,N_2 διαδοχικά τά σημεῖα τομῆς τοῦ (O) μέ τούς (O_1) καί (O_2) ἀντίστοιχα. Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(S,p)}$, ὅπου $p=\mathcal{D}_{(O_1)}(S)$, μετασχηματίζει τόν κύκλο (O) στήν εὐθεία O_1O_2 καί ἀφήνει ἀμετάβλητους τούς κύκλους (O_1), (O_2). Ἐπίσης τό σημεῖο M_1 στό P_1, τό N_1 στό K_1, τό M_2 στό P_2 καί τό N_2 στό K_2. Ἄρα θά ἔχουμε ἀπό τήν ἄσκ.

$$\frac{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{K_1K_2}}{\overline{P_1K_1}\cdot\overline{P_2K_2}}=\frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{N_1N_2}}{\overline{M_1N_1}\cdot\overline{M_2N_2}}.$$

Ἄν λοιπόν τώρα ἀντιστραφοῦν οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2)$ πρός μιά τυχαία ἀντιστροφή ὅλο τό παραπάνω σχῆμα θά μετασχηματιστῆ σ' ἕνα ἄλλο μέ τόνους, δηλαδή $(O_1'),(O_2'),P_1'$ κ.τ.λ. Ἐπειδή ὅμως διατηρεῖται ὁ λόγος θά ἔχουμε

$$\frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{N_1N_2}}{\overline{M_1N_1}\cdot\overline{M_2N_2}}=\frac{\overline{M_1'M_2'}\cdot\overline{N_1'N_2'}}{\overline{M_1'N_1'}\cdot\overline{M_2'N_2'}}.$$

Ἀλλά

$$\frac{\overline{P_1'P_2'}\cdot\overline{K_1'K_2'}}{\overline{P_1'K_1'}\cdot\overline{P_2'K_2'}}=\frac{\overline{M_1'M_2'}\cdot\overline{N_1'N_2'}}{\overline{M_1'N_1'}\cdot\overline{M_2'N_2'}}.$$

Ἄρα

$$\frac{t_{12}^2}{4R_1R_2}=\frac{t_{12}'^2}{4R_1'\cdot R_2'}.$$

Τό ἴδιο ἀκριβῶς θά εἴχαμε ἄν παίρναμε τίς ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες.

20. Θεώρημα τοῦ Casey.

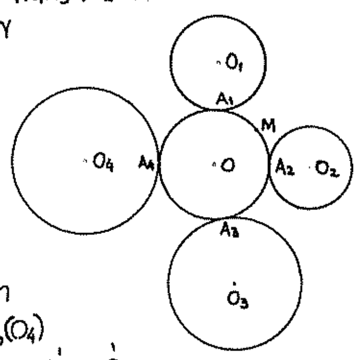
Τέσσερις κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3),(O_4,R_4)$ ἐφάπτονται μ' ἕναν ἄλλον κύκλο (O). Ὀνομάζουμε t_{12} τὸ κοινὸ ἐφαπτομενικὸ τμῆμα τῶν $(O_1),(O_2)$, t_{13} τῶν $(O_1),(O_3)$ κ.τ.λ. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι:

$$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24}. \qquad (1)$$

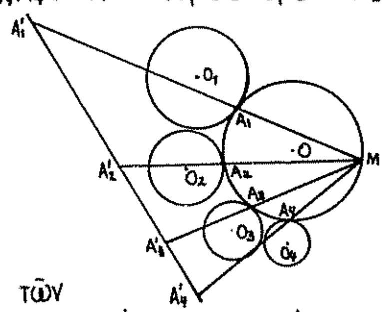
Ἀπόδειξη:

Ἡ σχέση ποὺ θέλουμε νὰ ἀποδείξουμε γράφεται:

$$\frac{t_{12}}{\sqrt{R_1R_2}}\cdot\frac{t_{34}}{\sqrt{R_3R_4}}+\frac{t_{14}}{\sqrt{R_1R_4}}\cdot\frac{t_{23}}{\sqrt{R_2R_3}}=\frac{t_{13}}{\sqrt{R_1R_3}}\cdot\frac{t_{24}}{\sqrt{R_2R_4}}. \qquad (2)$$



Κάθε κλάσμα μένει ἀμετάβλητο στὴν τυχαία ἀντιστροφή, ἄρα καὶ ὅλη ἡ σχέση (2). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι εἶναι ἀρκετὸ νὰ τὴν ἀποδείξουμε σὲ μιὰ πιὸ ἁπλῆ μορφή. Παίρνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο M τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A_1A_2}$ καὶ ἀντιστρέφουμε μὲ πόλο M. Ὁ κύκλος (O) θὰ γίνη εὐθεία (ε), οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3),(O_4)$ ἀντίστοιχα θὰ γίνουν $(O_1'),(O_2'),(O_3'),(O_4')$ καὶ τὰ σημεῖα A_1,A_2,A_3,A_4 ἀντίστοιχα A_1',A_2',A_3',A_4'. Ἂν ὀνομάσουμε $\overline{A_1'A_2'}=A_{12}$, $\overline{A_1'A_3'}=A_{13}$ κ.τ.λ. θὰ ἔχουμε



$$A_{12}A_{43}+A_{14}A_{32}=(A_{13}+A_{32})(A_{42}-A_{32})+$$
$$+A_{14}A_{32}=A_{13}A_{42}+A_{32}(A_{42}+A_{14}-A_{13}-A_{32})=$$
$$=A_{13}A_{42}.$$

Ἂν ἡ τελευταία σχέση διαιρεθῆ μὲ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου τῶν ἀκτίνων τῶν ἀντιστρόφων κύκλων ἔχουμε τὴ σχέση ποὺ ζητᾶμε.

21. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ νὰ εἶναι ἀντιστροφὴ τὸ γινόμενο τριῶν θετικῶν ἀντιστροφῶν εἶναι οἱ κύκλοι ἀντιστροφῆς αὐτῶν τῶν τριῶν ἀντιστροφῶν νὰ ἀποτελοῦν δέσμη.

Ἀπόδειξη:

Ἄς εἶναι $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}$, $\mathcal{J}_2=\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}$, $\mathcal{J}_3=\mathcal{J}_{(O_3,R_3^2)}$ οἱ τρεῖς ἀντιστροφές. Ἀκόμα οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ ἀποτελοῦν δέσμη. Τότε ὅπως εἶναι γνωστό (7.5) ὑπάρχει κύκλος (O,R) τῆς δέσμης τέτοιος πού

$$\mathcal{J}_3\mathcal{J}_2=\mathcal{J}\mathcal{J}_1,$$

ὅπου $\mathcal{J}=\mathcal{J}_{(O,R^2)}$.

Ἀπό τήν παραπάνω σχέση βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι

$$\mathcal{J}_3\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1=\mathcal{J}.$$

Ἀντίστροφα, ἄς εἶναι

$$\mathcal{J}_3\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_{(O,R^2)}.$$

Διαλέγουμε τόν κύκλο (O',R') τῆς δέσμης τῶν $(O_2,R_2),(O_3,R_3)$, ἔτσι πού

$$\mathcal{J}_3\mathcal{J}_2=S_x\mathcal{J}_{(O',R'^2)}.$$

Μετά τόν κύκλο (O'',R'') τῆς δέσμης τῶν $(O',R'),(O_1,R_1)$, ἔτσι πού

$$\mathcal{J}_{(O',R'^2)}\mathcal{J}_1=S_{x'}\mathcal{J}_{(O'',R''^2)}.$$

Ἄρα $\mathcal{J}_3\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1=S_xS_{x'}\mathcal{J}_{(O'',R''^2)}$. Ἀλλά ὁ μετασχηματισμός αὐτός δέν μπορεῖ νά ἔχη ἄπειρα διπλᾶ σημεῖα. Αὐτό σημαίνει ὅτι

$$S_xS_{x'}=I.$$

Ἀπ' αὐτό βλέπουμε ὅτι $x\equiv x'$ καί $O''\equiv O$, $R''=R$. Τότε ὅμως οἱ κύκλοι $(O',R'),(O_1,R_1),(O,R)$ ἀνήκουν στήν ἴδια δέσμη καί ἡ εὐθεία x' ὅπου βρίσκεται ἡ κοινή χορδή τῶν $(O',R'),(O_1,R_1)$ ταυτίζεται μέ τήν εὐθεία x ὅπου βρίσκεται ἡ κοινή χορδή τῶν $(O',R'),(O_2,R_2)$. Ἄρα οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3),(O,R)$ ἀνήκουν στήν ἴδια δέσμη.

22. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ἔχουμε

$$\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}=\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}$$

εἶναι νά τέμνωνται ὀρθογώνια οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$.

Ἀπόδειξη:

Ἄν $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ ὀρθογώνιοι, τότε ὑπάρχει κύκλος (O,R) τῆς δέσμης τους, τέτοιος πού

$$\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}=\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}\mathcal{J}_{(O,R^2)}.$$

Ἀλλά, ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ γωνία τῶν $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ εἶναι ἴση μέ τή γωνία τῶν $(O_2,R_2),(O,R)$. Οἱ κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ τέμνονται ὀρθογώνια. Ἡ δέσμη τους περιέχει ἕνα καί μόνο κύκλο πού τέμνει ὀρθογώνια τόν (O_2,R_2). Ἄρα $(O_1,R_1)=(O,R)$.

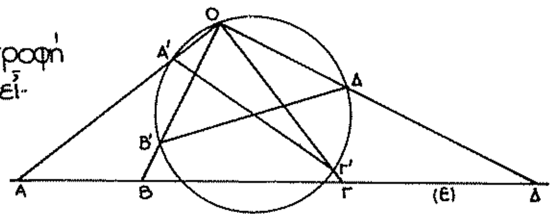
Ἀντίστροφα, ἂς εἶναι

$$\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}=\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}.$$

Ἂν φ ἡ γωνία τῶν $(O_1),(O_2)$, ἡ γωνία τῶν $(O_2),(O_1)$ εἶναι $\pi-\varphi$. Ἄρα $\varphi=\pi-\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$.

23. Νά ἀντιστραφοῦν τέσσερα σημεῖα A,B,Γ,Δ πού βρίσκονται σέ εὐθεία (ε) μέ τή σειρά πού ἀναφέρονται, ἔτσι πού τά ἀντίστροφά τους A',B',Γ',Δ' ἀντίστοιχα, νά εἶναι οἱ διαδοχικές κορυφές ὀρθογωνίου μέ τήν ἴδια σειρά. Πότε τό $A'B'\Gamma'\Delta'$ θά εἶναι τετράγωνο;

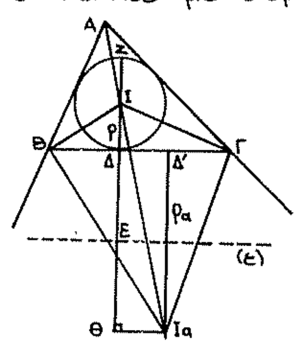
Λύση:



Ἂς εἶναι $\mathcal{J}_{(O,p)}$ ἡ ἀντιστροφή πού ζητᾶμε. Οἱ $A'\Gamma', B'\Delta'$ θά εἶναι διάμετροι τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο $A'B'\Gamma'\Delta'$. Ἄρα $A\hat{O}\Gamma=A'\hat{O}\Gamma'=1^{\llcorner}$ καί $B\hat{O}\Delta=B'\hat{O}\Delta'=1^{\llcorner}$. Δηλαδή τό O προσδιορίζεται σάν τομή τῶν κύκλων μέ διαμέτρους $A\Gamma$ καί $B\Delta$. Ἡ δύναμη p εἶναι τυχαία.

Ἂν $A'B'\Gamma'\Delta'$ τετράγωνο θά εἶναι $A'\Gamma' \perp B'\Delta'$. Ἄρα καί τά ἀντίστροφα τῶν εὐθειῶν $A'\Gamma', B'\Delta'$ θά τέμνωνται ὀρθογώνια. Δηλαδή οἱ κύκλοι $AO\Gamma, BO\Delta$ θά πρέπη νά τέμνωνται ὀρθογώνια. Ἀλλά ἡ $A\Gamma$ εἶναι διάμετρος τοῦ $AO\Gamma$ καί ἄρα θά τέμνεται ἁρμονικά ἀπό τόν κύκλο $BO\Delta$. Δηλαδή $A,\Gamma-B,\Delta$ ἁρμονική τετράδα.

24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Νά βρεθῆ ἡ συνθήκη μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου ἔτσι πού ὁ κύκλος μέ διάμετρο $B\Gamma$ νά ἐφάπτεται μέ τόν ἐγγεγραμμένο κύκλο στό τρίγωνο.



Λύση:

Φέρνουμε τήν $I_a\Theta \perp I\Delta$. Τά σημεῖα B,I,Γ,I_a,Θ εἶναι ὁμοκυκλικά καί τό $\Delta\Delta'I_a\Theta$ εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Θά ἔχουμε

$$\overline{B\Delta}\cdot\overline{\Delta\Gamma}=-\rho\rho_a$$

(ἄσκ. 545, Α' τεῦχος Γεωμετρίας)

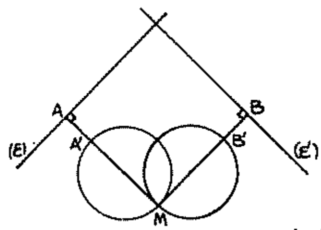
Ἀντιστρέφουμε λοιπὸν μὲ πόλο Δ καὶ δύναμη $-\rho\rho_a$. Ὁ κύκλος μὲ διάμετρο ΒΓ μένει ἀμετάβλητος. Ὁ κύκλος (Ι) γίνεται εὐθεία $(\varepsilon)\perp I\Delta$ σὲ σημεῖο Ε τέτοιο ποὺ

$$\overline{\Delta Z}\cdot\overline{\Delta E} = -\rho\rho_a \Rightarrow \Delta E = \frac{\rho_a}{2}.$$

Δηλαδὴ θὰ πρέπη ὁ κύκλος μὲ διάμετρο ΒΓ νὰ ἐφάπτεται μὲ τὴν εὐθεία (ε) ποὺ εἶναι παράλληλη μὲ τὴν ΒΓ καὶ σὲ ἀπόσταση $\frac{\rho_a}{2}$. Ἄρα $\frac{a}{2}=\frac{\rho_a}{2}$ καὶ ἡ συνθήκη $\rho_a = a$.

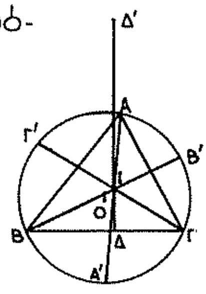
25. Νὰ βρεθῆ τὸ σύνολο τῶν πόλων ἀντιστροφῆς ποὺ μετασχηματίζουν δυὸ εὐθεῖες ποὺ τέμνονται, σὲ δυὸ ἴσους κύκλους. Μετὰ νὰ βρεθοῦν οἱ πόλοι ἀντιστροφῆς ποὺ μετασχηματίζουν τὶς εὐθεῖες ὅπου βρίσκονται οἱ πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου σὲ ἴσους κύκλους. Στὴν τελευταία περίπτωση ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ κύκλος (Ο,R), ὁ περιγεγραμμένος στὸ τρίγωνο ΑΒΓ μετασχηματίζεται σὲ κύκλο ἴσο μὲ τοὺς προηγούμενους. Τέλος, ἂν (Ι,ρ) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος στὸ $\widehat{AB\Gamma}$, νὰ βρεθῆ ὁ τύπος τοῦ Euler: $IO^2 = R^2 - 2R\rho$.

Λύση:



Ἂς εἶναι (ε),(ε') δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται καὶ ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(M,p)}$ μετασχηματίζει τὶς εὐθεῖες σὲ ἴσους κύκλους. Θὰ ἔχουμε $\overline{MA}\cdot\overline{MA'} = \overline{MB}\cdot\overline{MB'} = p$ (1) $(MA\perp\varepsilon, MB\perp\varepsilon')$. Ἀλλὰ $MA' = MB'$, ἄρα καὶ $MA = MB$. Δηλαδὴ τὸ σημεῖο Μ βρίσκεται στὴν διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν δύο εὐθειῶν. Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο.

Ἀπ' τὸ προηγούμενο βλέπουμε ὅτι ἂν ἀντιστρέψουμε τὶς πλευρὲς ἑνὸς τριγώνου μὲ πόλο τὸ ἔγκεντρο ἢ ἕνα παράκεντρο καὶ δύναμη τυχαία, τὰ ἀντίστροφα θὰ εἶναι κύκλοι ἴσοι ποὺ θὰ περνᾶν ἀπ' τὸν πόλο, ποὺ ἂς εἶναι Ι καὶ Α',Β',Γ' τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῶν τῶν κύκλων ἀνὰ δύο. Τὸ Ι εἶναι ὀρθόκεντρο τοῦ $\widehat{A'B'\Gamma'}$ (ἄσκ. 195, Α' τεῦχος). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ κύκλος Α'Β'Γ' εἶναι ἴσος μὲ τοὺς κύκλους Β'ΙΓ', Γ'ΙΑ', Α'ΙΒ' γιατὶ εἶναι συμμετρικὸς τους πρὸς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντίστοιχα. Ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφο τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι ὁ κύκλος Α'Β'Γ'.



Ἀντιστρέφουμε τώρα τὸ σχῆμα μὲ πόλο Ι καὶ δύναμη $\mathcal{D}_o(I) = IO^2 - R^2$. Ὁ κύκλος (Ο,R) μένει ἀμετάβλητος καὶ ἡ εὐθεία ΒΓ γίνεται κύκλος μὲ διάμετρο $I\Delta' = 2R$. Ἄρα $\overline{I\Delta}\cdot\overline{I\Delta'} = -\rho\cdot 2R = IO^2 - R^2 \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2R\rho$.

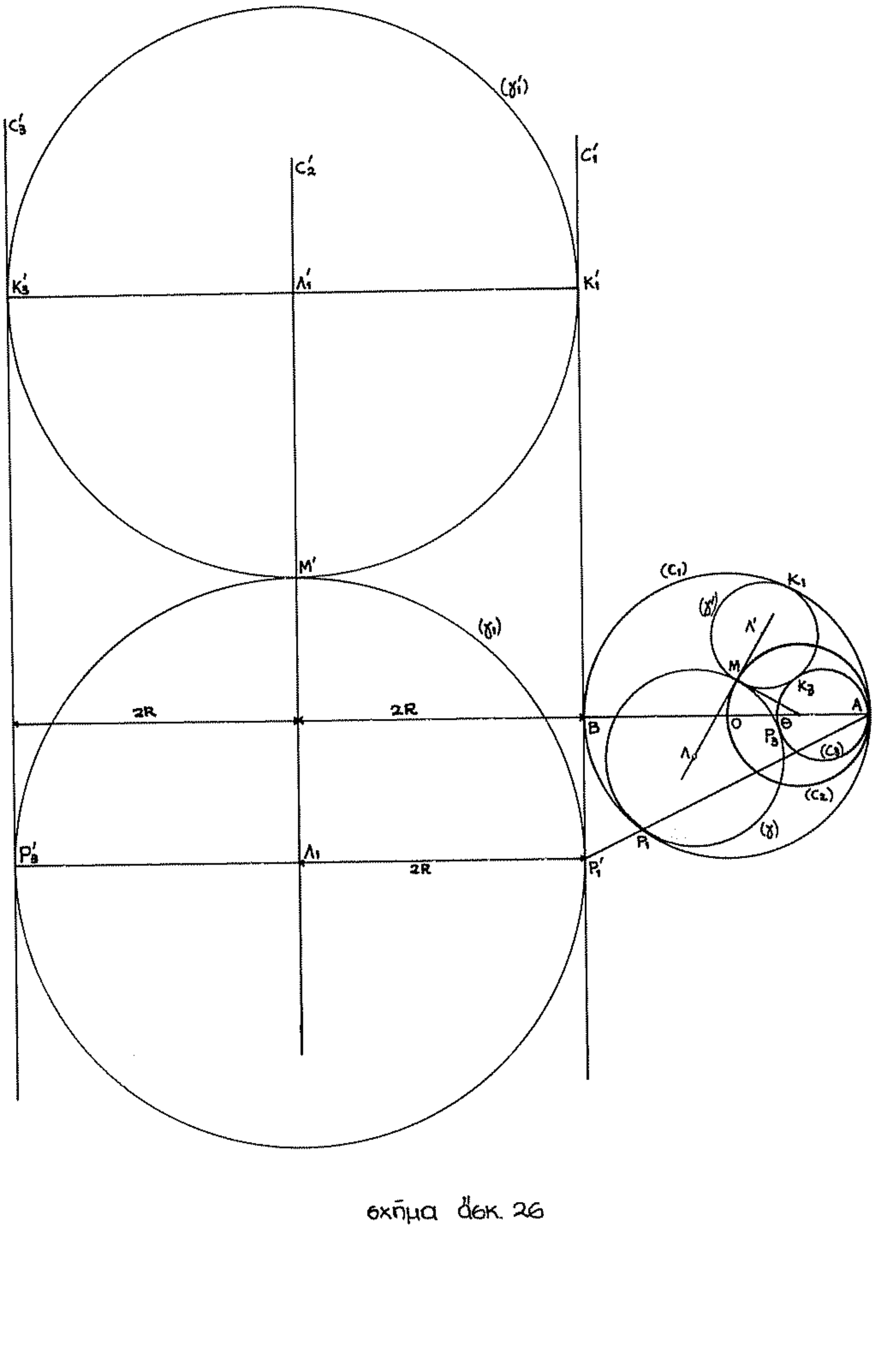
26. Δίνεται κύκλος $(c_1) = (O,R)$ μὲ διάμετρο ΑΒ. Ἄς εἶναι (c_2) ὁ κύκλος μὲ διάμετρο ΟΑ καὶ (γ) μιὰ μεταβλητὴ περιφέρεια ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὸν (c_1) καὶ τέμνει ὀρθογώνια τὸν (c_2). 1ον Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ (γ) ἐφάπτεται καὶ μὲ ἄλλο σταθερὸ κύκλο (c_3), ἐκτὸς ἀπ' τὸν (c_1). 2ον Θεωροῦμε δύο περιφέρειες μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς (γ), τὶς (γ) καὶ (γ') ποὺ ἐφάπτονται μεταξύ τους στὸ Μ. Ἡ (γ) ἐφάπτεται μὲ τὴν (c_1) στὸ P_1 καὶ μὲ τὴν (c_3) στὸ P_3, ἡ (γ') ἐφάπτεται μὲ τὴν (c_1) στὸ K_1 καὶ μὲ τὴν (c_3) στὸ K_3. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι τὰ σημεῖα A, P_1, M, K_3 εἶναι ὁμοκυκλικὰ ὅπως καὶ τὰ σημεῖα A, P_3, M, K_1 καὶ οἱ κύκλοι ποὺ περιέχουν τὰ προηγούμενα σημεῖα τέμνονται ὀρθογώνια. 3ον Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν δύο περιφέρειες (γ) καὶ (γ') πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τῆς ΑΒ, τέτοιες ποὺ τὰ σημεῖα A, P_1, M, K_3 νὰ βρίσκονται σὲ εὐθεία καὶ ὅτι τότε τὰ A, P_1, M, K_3 ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ τετράδα. Νὰ ὑπολογίστε σὰν συνάρτηση τοῦ R τὶς ἀκτῖνες αὐτῶν τῶν δύο κύκλων (γ) καὶ (γ').

Ἀπόδειξη:

1ον Θεωροῦμε τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(A,4R^2)}$. Ὁ κύκλος (c_1) μετασχηματίζεται στὴν εὐθεία (c_1') ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὴν (c_1) στὸ Β. Ὁ κύκλος (c_2) στὴν εὐθεία (c_2') κάθετη στὴν ΑΒ καὶ σὲ ἀπόσταση 4R ἀπ' τὸ Α. Ἡ περιφέρεια (γ) στὴν (γ_1) ποὺ ἐφάπτεται μὲ τὴν (c_1') στὸ (P_1') καὶ ἔχει τὸ κέντρο της στὴν (c_2'). Ἄρα ἡ (γ_1) ἐφάπτεται μὲ τὴν εὐθεία (c_3') συμμετρικὴ τῆς (c_1') πρὸς τὴν (c_2'). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ (γ) ἐφάπτεται μὲ σταθερὴ περιφέρεια (c_3) ἀντίστροφο τῆς (c_3') κατὰ τὴν ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(A,4R^2)}$. Ἄν ὀνομάσουμε ΑΘ τὴν διάμετρο τῆς (c_3) θὰ ἔχουμε $A\Theta\cdot 6R = 4R^2$, δηλαδὴ

$$A\Theta = \frac{2}{3}R.$$

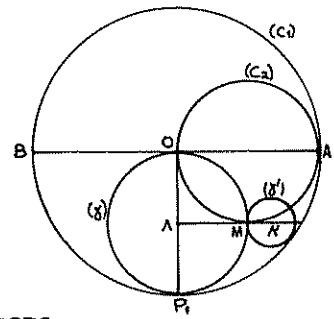
2ον Ἄν πάρουμε τὰ ἀντίστροφα τῶν (γ) καὶ (γ') παρατηροῦμε ὅτι τὸ σημεῖο ἐπαφῆς τους θὰ βρίσκεται στὴν (c_2'). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖο ἐπαφῆς τῶν $(\gamma), (\gamma')$ βρίσκεται στὸν κύκλο (c_2). Τὰ ἀντίστροφα τῶν P_1, M, K_3, δηλαδὴ τὰ σημεῖα P_1', M', K_3', εἶναι φανερὸ ὅτι εἶναι σὲ εὐθεία. Ἄρα


(γ'₁)
C'₃
C'₂
C'₁
K'₃
Λ'₁
K'₁
M'
(γ₁)
2R
2R
B
P'₃
Λ₁
2R
P'₁
(C₁)
K₁
(γ')
Λ'
M
K₃
A
O
Θ
P₃
(C₃)
Λ
(C₂)
P₁
(γ)

σχῆμα ἄσκ. 26

τὰ σημεῖα A, P_1, M, K_3 εἶναι ὁμοκυκλικά. Τὸ ἴδιο γιὰ τὰ A, P_3, M, K_1. Ἐπειδὴ οἱ εὐθεῖες $P_1'MK_3'$ καὶ $K_1'MP_3'$ τέμνονται κάθετα, οἱ κύκλοι AP_1MK_3 καὶ AP_3MK_1 θὰ τέμνωνται ὀρθογώνια.

3ον Ἀρκεῖ τὰ σημεῖα P_1', M', K_3' νὰ βρίσκωνται σὲ εὐθεία (ε). Γι' αὐτὸ φτάνει νὰ πάρουμε σὰν P_1 τὸ μέσο τοῦ ἡμικύκλιου AB, ὁπότε ἡ εὐθεία (ε) εἶναι ἡ εὐθεία AP_1. Στὴν τελευταία περίπτωση $M'P_1' = M'K_3'$. Δηλαδὴ τὰ σημεῖα $\infty, M' - K_3', P_1'$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ τετράδα, ἄρα ἂν ἀντιστρέψουμε μὲ τὴν $\mathcal{J}(A, 4R^2)$, τὰ σημεῖα ποὺ θὰ πάρουμε $A, M - K_3, P_1$ θὰ ἐξακολουθοῦν ν' ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ τετράδα. Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση οἱ ἀκτῖνες τῶν (γ) καὶ (γ') ὑπολογίζονται εὔκολα μὲ τὸν παρακάτω τρόπο:



Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἀκτῖνα τοῦ (γ) εἶναι $\frac{R}{2}$ καὶ κέντρο του τὸ μέσο τοῦ OP_1. Τὸ κέντρο τοῦ (γ') βρίσκεται στὴν μεσοκάθετη τοῦ OP_1 καὶ ἡ ἀκτῖνα του βρίσκεται ἀπ' τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $O\Lambda\Lambda'$. Ἄς εἶναι $\Lambda'M = x$. Θὰ ἔχουμε

$$O\Lambda'^2 = O\Lambda^2 + \Lambda\Lambda'^2 \Leftrightarrow (R-x)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}+x\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{6}.$$

27. Δυὸ κύκλοι $(O,R), (O',R')$ εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἀντίστροφο τοῦ κέντρου τοῦ ἑνὸς ὡς πρὸς τὸν ἄλλο κύκλο εἶναι τὸ μέσο τῆς κοινῆς χορδῆς.

28. Τρεῖς κύκλοι τέμνονται ἀνὰ δύο στὰ ζευγάρια τῶν σημείων $A, A' - B, B' - \Gamma, \Gamma'$. Ἄν O τυχαῖο σημεῖο στὸ ἐπίπεδό τους νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ κύκλοι OAA', OBB' καὶ $O\Gamma\Gamma'$ περνᾶν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

29. Δυὸ ὀρθογώνιοι κύκλοι ἀντιστρέφονται μὲ πόλο σημεῖο τοῦ ἑνὸς κύκλου. Νὰ βρῆτε τὸ σχῆμα ποὺ προκύπτει. Ἐξετᾶστε ἀκόμα τὴν περίπτωση ποὺ ἡ ἀντιστροφὴ γίνεται μὲ πόλο ἕνα ἀπ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο κύκλων.

30. Τρία σημεῖα A, B, Γ βρίσκονται σὲ εὐθεία (ε). Παίρνουμε ἕνα σημεῖο P ἔτσι ποὺ $A\hat{P}B = B\hat{P}\Gamma = 60°$. Νὰ ἀποδειχτῆ ὅτι $\frac{1}{PB}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{P\Gamma}$.

31. Δίνεται κύκλος (O,R) καὶ τὰ σημεῖα A καὶ I. Μεταβλητὴ εὐθεία ἀπ' τὸ I τέμνει τὸν κύκλο στὰ σημεῖα B,Γ. Φέρνουμε τὶς AB καὶ $A\Gamma$ ποὺ τέμνουν τὸν κύκλο στὰ B' καὶ Γ' ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ κύκλος $AB'\Gamma'$ περνᾶ κι ἀπὸ ἄλλο σταθερὸ σημεῖο.

32. Ἄν $A=\mathcal{J}_{(O,p)}A$, $M'=\mathcal{J}_{(O,p)}M$ ἀποδεῖξτε ὅτι $\frac{MA^2}{OM}=\frac{M'A^2}{OM'}$.

33. Μιὰ ἀντιστροφὴ μὲ πόλο O διατηρεῖ (μὲ πλατειὰ ἔννοια) τὸν κύκλο (K,R) καὶ μετασχηματίζει τὸ σημεῖο M στὸ M'. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$\frac{\mathcal{D}_{(K)}(M)}{OM}=\frac{\mathcal{D}_{(K)}(M')}{OM'}.$$

34. Ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μετασχηματίζει τὰ σημεῖα P,M,N στὰ P',M',N' ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$P\hat{M}N+P'\hat{M'}N'=P\hat{O}N.$$

35. Ἡ ἀντιστροφὴ $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μετασχηματίζει τὰ σημεῖα P,M,N,Σ στὰ P',M',N',Σ'. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$P\hat{M}N+N\hat{\Sigma}P=P'\hat{M'}N'+N'\hat{\Sigma'}P'.$$

36. Ἂς εἶναι O ἕνα τυχαῖο σημεῖο στὸ ἐπίπεδο τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}=\mathcal{J}_{(O,p)}[AB\Gamma]$, ὅπου p τυχαῖο. Ἄν $\Delta E Z$ τὸ ποδικὸ τρίγωνο τοῦ O πρὸς $A\hat{B}\Gamma$, ἀποδεῖξτε ὅτι $A'\hat{B'}\Gamma'\sim\Delta\hat{E}Z$. Μετὰ ἀπ' αὐτὸ ἀποδεῖξτε τὸ θεώρημα τοῦ Simson.

37. Ἄν A',B',Γ',Δ' τὰ ἀντίστροφα τῶν A,B,Γ,Δ σὲ μιὰ τυχαία ἀντιστροφή, τότε θὰ εἶναι:

$$\frac{\overline{A'B'}\cdot\overline{\Gamma'\Delta'}}{\overline{A'\Delta'}\cdot\overline{B'\Gamma'}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{A\Delta}\cdot\overline{B\Gamma}}.$$

Δηλαδὴ ἡ παράσταση

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{A\Delta}\cdot\overline{B\Gamma}}$$

εἶναι ἀναλλοίωτη τῆς ἀντιστροφῆς.

38. Σὲ μιὰ εὐθεία (x) δίνονται τρία σημεῖα O,A,A'. Θεωροῦμε τὸν κύκλο (c) μὲ διάμετρο ΟΑ καὶ στὸ σημεῖο Α' φέρνουμε τὴν κάθετη (ε) στὴν (x). Ἀπ' τὸ Α' φέρνουμε τυχαία εὐθεία ποὺ τέμνει τὸν κύκλο στὰ Ρ, Μ. Οἱ εὐθεῖες ΟΡ, ΟΜ τέμνουν τὴν (ε) στὰ Ρ', Μ'. Δεῖξτε ὅτι

$$\overline{A'P'} \cdot \overline{A'M'} = \text{σταθ.}$$

39. Μὲ αὐτὰ ποὺ δόθηκαν στὴν προηγούμενη ἄσκηση καὶ ἀκόμα θεωροῦμε ὅτι τὰ Ρ', Μ' βρίσκονται πάνω στὴν (ε) μὲ τέτοιο τρόπο, ποὺ

$$\overline{A'P'} \cdot \overline{A'M'} + \lambda(\overline{A'P'} + \overline{A'M'}) + \mu = 0,$$

μὲ λ, μ σταθερές. Νὰ ἀποδεῖξτε τότε ὅτι ἡ ΡΜ περνᾶ ἀπὸ σταθερὸ σημεῖο.

40. Θεωροῦμε τὸν κύκλο (Ο) κι ἕνα σημεῖο Α στὸ ἐπίπεδό του. Ἀπὸ τὸ Α φέρνουμε τυχαία εὐθεία ποὺ τέμνει τὸν κύκλο στὰ Ρ, Κ. Ὁ κύκλος μὲ διάμετρο ΑΡ τέμνει τὸν (Ο) στὸ Ρ' καὶ ὁ κύκλος μὲ διάμετρο ΑΚ τέμνει τὸν (Ο) στὸ Κ'. Ἀποδεῖξτε ὅτι (α) ὁ κύκλος ΑΡ'Κ' περνᾶ κι ἀπὸ ἄλλο σταθερὸ σημεῖο, (β) οἱ εὐθεῖες ΡΚ, Ρ'Κ' τέμνονται σὲ σταθερὴ εὐθεία.

41. Νὰ βρεθῆ ἡ ἀντιστροφὴ ποὺ ἀφήνει ἀμετάβλητους τρεῖς κύκλους ποὺ ἔχουν δοθῆ.

42. Δίνονται τρεῖς κύκλοι ποὺ τὰ κέντρα τους δὲν βρίσκονται σὲ εὐθεία. Νὰ βρεθῆ ἡ ἀντιστροφὴ ποὺ τοὺς μετασχηματίζει σὲ τρεῖς κύκλους μὲ κέντρα σὲ εὐθεία.

43. Ἀποδεῖξτε ὅτι δύο ἀντίστροφοι κύκλοι καὶ ὁ κύκλος ἀντιστροφῆς ἀποτελοῦν δέσμη.

44. Ἂν Η τὸ ὀρθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΔ τὸ ὕψος ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α, ὀνομάζουμε **πολικὸ κύκλο** τοῦ $\widehat{ABΓ}$ τὸν κύκλο $(H, r = \sqrt{HA \cdot HΔ})$.

Ἂν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο, τότε εἶναι συζυγὲς πρὸς τὸν πολικὸ κύκλο (Α' τεῦχος, 8.49).

Ἀκόμα ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ $\widehat{ABΓ}$ κύκλος, ὁ κύκλος Euler, ὁ πολικὸς κύκλος καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περί τό τρίγωνο πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου ΑΒΓ στά Α,Β,Γ ἀποτελοῦν δέσμη.

45. Θεωροῦμε τήν ἀντιστροφή μέ κύκλο ἀντιστροφῆς τόν ἐγγεγραμμένο κύκλο (I) τριγώνου ΑΒΓ. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι (α) ὁ περιγεγραμμένος κύκλος στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ἀντίστροφο τόν κύκλο Euler τοῦ τριγώνου ἐπαφῆς (μέ κορυφές τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μέ τίς πλευρές). (β) Μετά ἀπ' αὐτό ν' ἀποδειχτῆ μέ ἀντιστροφή ὁ τύπος τοῦ Euler $OI^2 = R^2 - 2R\rho$. (γ) Τό ἴδιο γιά τά παράκεντρα. (Δηλαδή $OI_a^2 = R^2 + 2R\rho_a$).

46. Ἡ ἐφαπτομένη ἀπ' τόν πόλο ἀντιστροφῆς πρός μιά καμπύλη πού ἔχει δοθῆ παραμένει ἐφαπτομένη καί γιά τό ἀντίστροφο τῆς καμπύλης.

47. Δυό κύκλοι ἀντιστρέφονται μέ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,P)}$. Πῶς μετασχηματίζεται ἡ διάκεντρός τους;

48. Σημεῖο Μ μεταβάλλεται στήν εὐθεία ΑΒ. Ἄν Ρ σημεῖο ἔξω ἀπ' τήν ΑΒ, ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ κύκλοι ΡΑΜ, ΡΒΜ τέμνονται κατά σταθερή γωνία (ὅταν τό Μ μεταβάλλεται).

49. Θεωροῦμε κύκλο (Ο) μέ διάμετρο ΑΒ καί Ρ ἕνα τυχαῖο σημεῖο στό ἐπίπεδό του. Οἱ εὐθεῖες ΡΑ καί ΡΒ τέμνουν τόν κύκλο στά Α' καί Β'. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ κύκλοι ΡΑ'Β' καί (Ο) εἶναι ὀρθογώνιοι.

50. Δυό κύκλοι (Ο) καί (Ο') τέμνονται στά σημεῖα Α,Β. Ἄν Μ τυχαῖο σημεῖο τοῦ (Ο), φέρνουμε τίς ΜΑ,ΜΒ πού τέμνουν τόν (Ο') στά Α',Β'. Ἀποδεῖξτε ὅτι ΟΜ⊥Α'Β'.

51. Δίνεται εὐθεία (ε) καί σταθερό σημεῖο Α ἔξω ἀπό τήν (ε). Γωνία μέ σταθερό μέτρο ω στρέφεται γύρω ἀπό τό Α. Ἄν οἱ πλευρές τῆς γωνίας τέμνουν τήν (ε) στά Β,Γ νά ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ κύκλος ΑΒΓ ἐφάπτεται μέ σταθερό κύκλο.

52. Ὁ κύκλος (Ο',R') περνᾶ ἀπ' τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου

(O,R). Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ὁ ριζικός ἄξονας τῶν δύο κύκλων εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ (O′) κατά τήν ἀντιστροφή $\mathcal{J}(O,R^2)$.

53. Δίνεται μιά γραμμή Γ (κύκλος ἤ εὐθεία) καί μιά ἄλλη γραμμή Γ′ (ἐπίσης κύκλος ἤ εὐθεία), τέτοιες πού νά ὑπάρχουν δυό θετικές ἀντιστροφές πού νά μετασχηματίζουν τόν Γ στόν Γ′. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ κύκλοι ἀντιστροφῆς αὐτῶν τῶν ἀντιστροφῶν εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἄν οἱ Γ, Γ′ ἔχουν δυό κοινά σημεῖα Α, Β, τότε οἱ κύκλοι ἀντιστροφῆς περνᾶν ἀπ' τά Α, Β καί σχηματίζουν ἀντίστοιχα ἴσες γωνίες μέ τίς Γ καί Γ′. (Γι' αὐτό τό λόγο λέγονται καί διχοτόμοι κύκλοι).

54. Ἄν μιά θετική ἀντιστροφή μέ κύκλο ἀντιστροφῆς (c) μετασχηματίζει μιά γραμμή Γ (κύκλος ἤ εὐθεία) στήν γραμμή Γ′, τότε ὁ κύκλος (c) ἀνήκει στήν δέσμη τῶν Γ, Γ′.

55. Δίνεται κύκλος (K,R) καί εὐθεία (ε) σέ ἀπόσταση d ἀπ' τό K. Ἄν O σημεῖο τῆς περιφέρειας (K), ἡ ἀντιστροφή μέ κέντρο O μετασχηματίζει τήν εὐθεία (ε) σέ κύκλο (Λ,ρ), τόν κύκλο (K,R) σέ εὐθεία (η) σέ ἀπόσταση d′ ἀπ' τό Λ. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\frac{d}{R}=\frac{d'}{\rho}$.

56. Τέσσερις κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3),(O_4,R_4)$ εἶναι μεταξύ τους ἀνά δύο ὀρθογώνιοι. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$\mathcal{J}(O_1,R_1^2)\cdot\mathcal{J}(O_2,R_2^2)\cdot\mathcal{J}(O_3,R_3^2)\cdot\mathcal{J}(O_4,R_4^2)=I.$$

57. Δίνεται κύκλος (O) μέ διάμετρο AB καί (ε) ἡ ἐφαπτομένη στό A. Στήν (ε) παίρνουμε τά σημεῖα P, P′ τέτοια πού $\overline{AP}\cdot\overline{AP'}=$ σταθ. Φέρνουμε τίς BP, BP′ πού τέμνουν τόν κύκλο στά σημεῖα M, M′. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι (α) ἡ εὐθεία MM′ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο. (β) Ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες PT, P′T′ τοῦ (O), νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ εὐθεία TT′ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο.

58. Δυό ἴσοι κύκλοι (O,R), (O′,R′) ἔχουν δυό κοινά σημεῖα A, B. Μεταβλητός κύκλος ἐφάπτεται μέ τήν AB στό A καί τέμνει τούς (O), (O′) στά P, P′ ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία PP′ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο. Τί μποροῦμε νά ποῦμε γιά τόν κύκλο BPP′;

59. Δίνεται κύκλος (O) καί δυό σημεῖα A καί B ἐσωτερικά ἤ ἐξωτερικά καί τά δύο. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ κύκλοι οἱ ἀντίστροφοι τοῦ (O) κατά μιά ἀντιστροφή πού μετασχηματίζει τά σημεῖα A,B μεταξύ τους, ἐφάπτονται μέ δύο σταθερές περιφέρειες καί εἶναι ὀρθογώνιοι μέ τρίτο σταθερό κύκλο.

60. Ἡ ἀντιστροφή $\mathcal{J}_{(O,p)}$ μετασχηματίζει τόν κύκλο (K,R) στόν (K′,R′) καί τά σημεῖα A,B στά A′,B′. Ἄν τά A,B εἶναι ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τοῦ (K,R) ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία A′B′ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο.

61. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτῖνα R καί περιγεγραμμένο περί κύκλο μέ ἀκτῖνα ρ. Ἄν ἡ ἀπόσταση τῶν δύο κέντρων εἶναι d, ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{\rho^2}.$$

(Κοιτᾶξτε ἀκόμα καί τήν ἄσκ. 512, Α′ τεῦχος).

62. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά περνᾶ ἀπό τό κέντρο O τοῦ κύκλου (O,R) ἡ εὐθεία (ε) εἶναι:

$$\mathcal{J}_{(O,R)}\cdot S_\varepsilon=S_\varepsilon\cdot\mathcal{J}_{(O,R)}.$$

63. Νά ἀποδειχτῆ ὅτι κάθε ὁμόρροπη ὁμοιότητα μπορεῖ νά γραφτῆ σάν γινόμενο δύο ἀντιστροφῶν.

64. Ἄν γιά δυό κύκλους $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$, ὁ κύκλος (O,R) ὁρίζεται $(O_2,R_2)=\mathcal{J}_{(O,R^2)}[(O_1,R_1)]$, τότε: (α) ὁ κύκλος (O,R) ἀνήκει στήν δέσμη τῶν $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$, (β) ἰσχύει:

$$\mathcal{J}_{(O_2,R_2^2)}\cdot\mathcal{J}_{(O,R^2)}\cdot\mathcal{J}_{(O_1,R_1^2)}\cdot\mathcal{J}_{(O,R^2)}=I.$$

65. Ἄν $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ τρεῖς κύκλοι πού περνᾶν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο A καί δέν ἀποτελοῦν δέσμη καί ὀνομάσουμε

$\mathcal{J}_{O_i}=\mathcal{J}_{(O_i,R_i^2)}$, τότε ἡ σχέση

$$\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_K\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_K\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}=I,$$

ἀληθεύει μόνο ἄν (K) ὁ κύκλος πού περνᾶ ἀπ' τό Λ, τό ἄλλο σημεῖο τομῆς τῶν $(O_2),(O_3)$, καί πού εἶναι ὀρθογώνιος μέ τόν (O_1).

66. Θεωροῦμε 6 σημεῖα A_i, B_i $(i=1,2,3)$. Ἄν οἱ τρεῖς κύκλοι (A_1,A_2,B_3), (A_1,B_2,A_3), (B_1,A_2,A_3) περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο P, τότε οἱ κύκλοι (B_1,B_2,A_3), (B_1,A_2,B_3), (A_1,B_2,B_3) θά περνᾶν ἐπίσης ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο M.

67. Ἄν γιά τά 6 σημεῖα $A_1,B_1,\Gamma_1,A_2,B_2,\Gamma_2$ οἱ κύκλοι (A_1,B_1,Γ_1), (A_1,B_2,Γ_2), (A_2,B_1,Γ_2), (A_2,B_2,Γ_1) περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο O, τότε οἱ κύκλοι (A_2,B_2,Γ_2), (A_2,B_1,Γ_1), (A_1,B_2,Γ_1), (A_1,B_1,Γ_2) θά περνᾶν ἐπίσης ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο M.

68. Τρεῖς κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$ περνᾶν ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι ὁμόκεντροι ὅταν καί μόνον ὅταν

$$\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}=I$$

ὅπου $\mathcal{J}_{O_i}=\mathcal{J}_{(O_i,R_i^2)}$.

69. Ἄν οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$ περνᾶν ἀπό σημεῖο A καί γιά τό σημεῖο P ἰσχύη ἡ σχέση:

$$\mathcal{J}_{O_1}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_3}S_{AP}\mathcal{J}_{O_3}\mathcal{J}_{O_2}\mathcal{J}_{O_1}S_{PA}=I,$$

τότε οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$ ἀποτελοῦν δέσμη.

70. Ἄν τά σημεῖα A, B, Γ, Δ δέν βρίσκονται σέ μιά περιφέρεια οὔτε σέ μιά εὐθεία, νά ἀποδειχτῆ ὅτι οἱ κύκλοι (A,B,Γ), (A,B,Δ) τέμνονται μέ τήν ἴδια γωνία πού τέμνονται οἱ (A,Γ,Δ), (B,Γ,Δ).

71. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθῆ ὁ πόλος ἀντιστροφῆς πού μετασχηματίζει τό τρίγωνο ΑΒΓ σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο Α'Β'Γ'.

72. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθῆ ὁ πόλος τῆς ἀντιστροφῆς πού μετασχηματίζει τό τρίγωνο ΑΒΓ σέ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ ὅμοιο πρός τρίγωνο πού ἔχει δοθῆ.

73. Μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τήν ἀντιστροφή $\mathfrak{J}_{(O,\rho)}$ πού μετασχηματίζει τό τρίγωνο ΑΒΓ σέ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ ἴσο μέ τό τρίγωνο Τ πού ἔχει δοθῆ;

74. Δίνονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι. Νά βρεθῆ τό σύνολο τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν πού τούς μετασχηματίζουν σέ δυό κύκλους ἴσους.

75. Δίνονται τρεῖς κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$. Συμβολίζουμε $\mathfrak{J}_{O_i}=\mathfrak{J}_{(O_i,R_i^2)}$. Ἄν $(O_3,R_3)=\mathfrak{J}_{O_2}[(O_1,R_1)] \wedge (O_1,R_1)=\mathfrak{J}_{O_3}[(O_2,R_2)]$, τότε $(O_2,R_2)=\mathfrak{J}_{O_1}[(O_3,R_3)]$.

76. Οἱ κύκλοι ὁμοιότητας τριῶν κύκλων $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$, (O_3,R_3) ἄν τούς πάρουμε ἀνά δύο τέμνουν ὀρθογώνια τόν κύκλο $O_1O_2O_3$.

77. Δυό κύκλοι τέμνονται στό Α καί ἐφάπτονται μέ τήν εὐθεία ε_1 στά Ρ,Κ καί μέ τήν εὐθεία ε_2 στά Μ,Σ ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ κύκλοι ΡΑΚ, ΜΑΣ ἐφάπτονται στό Α.

78. Ἀπό σημεῖο Ρ στό ἐξωτερικό κύκλου (O,R) φέρνουμε δύο εὐθεῖες συμμετρικές πρός τήν ΟΡ, πού τέμνουν τόν κύκλο στά Α,Β καί Γ,Δ ἀντίστοιχα. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΓ περνᾶν ἀπό σταθερό σημεῖο.

79. Δίνεται κύκλος (O,R) καί σημεῖο Α. Μέ κέντρο τυχαῖο σημεῖο Κ τοῦ (O,R) γράφουμε κύκλο (Κ,ΚΑ). Νά ἀποδειχτῆ ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν κοινή χορδή τῶν δύο κύκλων εἶναι σταθερή.