ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΣΕ ΟΒΑΛ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ.

Γ.Τσίντσιφας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Στη Γεωμετρία των κυρτών σχημάτων εξετάζουμε τις ιδιότητες των Γεωμετρικών σχημάτων σε σχέση με τα κυρτά σχήματα, π.χ. ένα τρίγωνο περιγεγραμμένο περί κύκλο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι το ισόπλευρο. Τι γίνεται αν αντί του κύκλου είχαμε ένα κύρτο σχήμα;
Θα δούμε ότι με πολύ απλά Μαθηματικά μπορούμε να ανακαλύψουμε αξιόλογες Γεωμετρικές ιδιότητες.

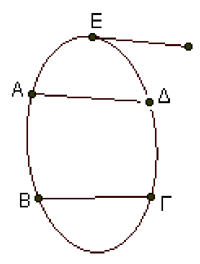
Ορίζουμε οβάλ (πεπερασμένο) κυρτό επίπεδο σχήμα χωρίς ευθύγραμμα τμήματα στη περίμετρο και με ακριβώς μία εφαπτομένη ευθεία σε κάθε σημείο της περιμέτρου του..

Εστω Κ οβάλ και Α, Β, Γ σημεία της περιμέτρου Τ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων Α,Β,Γ και είναι συνεχής συνάρτηση ως προς τις συντεταγμένες. Η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδον του τριγώνου ορισμένη σε συμπαγή τόπο είναι πεπερασμένη και φραγμένη , άρα έχει μέγιστο.

Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε οτι και η περίμετρος του εγγεγραμμένου τριγώνου έχει μέγιστο όπως και τα αντίστοιχα μεγέθη των περιγεγραμμένων τριγώνων (ελάχιστο).

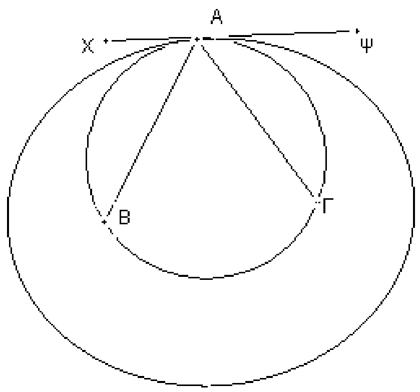
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Αν ΑΒΓ το τρίγωνο μεγίστου Εμβαδού εγγεγραμμενου στο οβαλ Κ, τότε οι εφαπτόμενες στις κορυφές είναι παράλληλες πρός τις απέναντι πλευρές.
Η απόδειξη δια της εις άτοπον απαγωγής. (είναι εύκολη)



ΘΕΩΡΗΜΑ 2.

Αν ΑΒΓ το τρίγωνο μεγίστης περιμέτρου εγγεγραμμένο στο οβάλ Κ, τότε οι εφαπτόμενες στις κορυφές σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις αντίστοιχες πλευρές. Δηλαδή αν ΧΨ η εφαπτομένη στο Α οι γωνίες ΧΑΒ και ΨΑΓ είναι ίσες, κ.λ.
Η απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής.
Θα πρέπει να θεωρήσουμε την οικογένεια (γ) των ελλείψεων με εστίες Β,Γ που περιέχουν το οβάλ Κ και να πάρουμε ως Α το σημείο επαφής μιάς έλλειψης γ* απο την οικογένεια (γ) με το οβάλ.

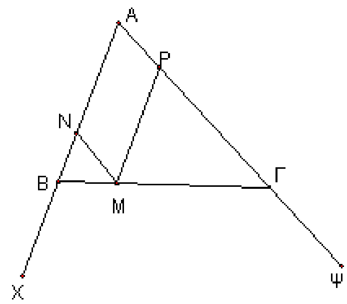


ΘΕΩΡΗΜΑ 3.

Αν ΑΒΓ είναι το τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού το περιγεγραμμένο περί το οβάλ Κ, τότε τα σημεία επαφής με το οβάλ Κ είναι τα μέσα των αντιστοίχων πλευρών.
Η απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής. Χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ.

Αν είναι Μ ένα εσωτερικό σημείο γωνίας ΧΑΨ τότε η ευθεία (ε) διά του σημείου Μ που αποκόπτει απο τη γωνία ΧΑΨ τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού είναι μοναδική και το αντίστοιχο τμήμα έχει μέσο το σημείο Μ. Παραθέτω μιά απλή απόδειξη.
Εστω (ε) τυχούσα ευθεία διά του σημείου Μ και Β,Γ τα σημεία τομής με τις πλευρές γωνίας ΧΑΨ. Φέρνουμε ΜΝ παράλληλο πρός ΑΨ και ΜΡ παράλληλο πρός ΑΧ.Εστω



ΜΝ=λ και ΜΡ=μ.

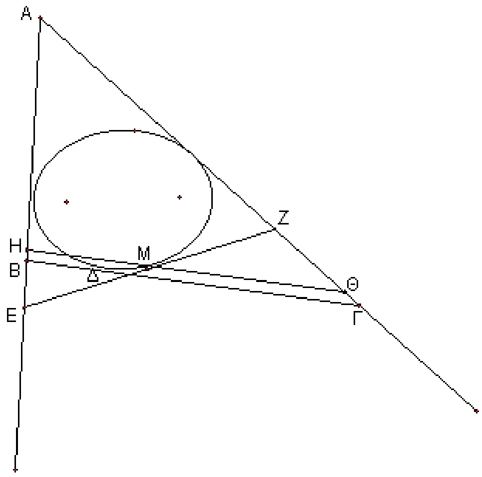
Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\mu}{AB}+\frac{\lambda}{A\Gamma}=1$

Και από την A.M-A.G ανισότητα έχουμε

$$1=\frac{\mu}{AB}+\frac{\lambda}{A\Gamma}\geq 2\sqrt{\frac{\lambda\mu}{AB.A\Gamma}}$$

προφανώς
$AB.A\Gamma \geq 4\lambda\mu$
η ισοδύναμα
$(AB\Gamma)\geq 2\lambda\mu\eta\mu A$
και τέλος
$\min(AB\Gamma)=2\lambda\mu\eta\mu A$
όταν $\frac{\lambda}{A\Gamma}=\frac{\mu}{AB}=\frac{1}{2}$
Δηλαδή το σημείο Μ το μέσο του τμήματος ΒΓ.

Ας έρθουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. Υποθέτουμε οτι το τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού, το περιγεγραμμένο στο οβάλ Κ είναι το ΑΒΓ ώστε αν Δ το σημείο επαφής στη πλευρά ΒΓ να είναι $B\Delta \neq \Delta\Gamma$.



Αποδεικνύεται οτι υπάρχει ευθεία ΕΖ εφαπτόμενη του Κ ώστε το σημείο επαφής Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΕΖ. Από το σημείο Μ φέρνουμε την ΗΘ παράλληλη πρός την ΒΓ. Σύμφωνα με το λήμμα είναι.

(ΕΑΖ)<(ΗΑΘ) και προφανώς (ΗΑΘ)<(ΒΑΓ).

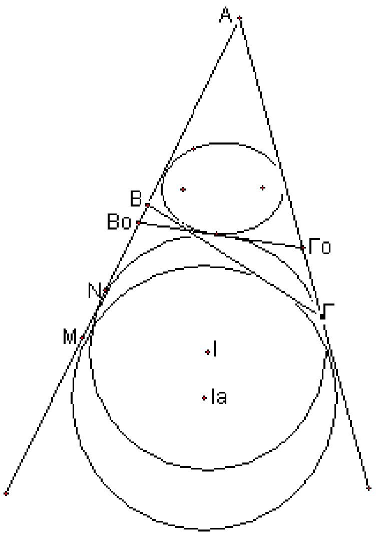
ΘΕΩΡΗΜΑ 4.

Αν είναι ΑΒΓ το περιγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου περί το οβάλ Κ τότε τα σημεία επαφής των πλευρών του τριγώνου είναι τα ίδια με τα σημεία επαφής των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τρίγωνου ΑΒΓ με τις πλευρές του αντίστοιχα.

Η απόδειξη γίνεται πάλι διά της εις άτοπον απαγωγής, χρειαζόμαστε όμως την εξής βοηθητική πρόταση.

Αν ΑΧ και ΑΨ εφαπτόμενες του οβάλ Κ τότε η εφαπτομένη ΒΓ που αποκόπτει απο τη γωνία τρίγωνο ΑΒΓ ελάχιστης περιμέτρου εφάπτεται στο Κ στο σημείο επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ επί της πλευράς ΒΓ.

Εστω ΑΒΓ ένα τυχαίο τρίγωνο περιγεγραμμένο στο οβάλ Κ και (Ια,Ρα) ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του ΑΒΓ, Μ το σημείο επαφής της πλευράς ΑΒ επί του (Ια,Ρα) . Είναι γνωστό οτι ΑΜ=τ όπου τ η ημιπερίμετρος του ΑΒΓ. Αν τώρα θεωρήσουμε την ομοιοθεσία του (Ια,Ρα) με κέντρο το Α και



λόγο Ρ/Ρα, ο κύκλος (Ια,Ρα) μετασχηματίζεται στο (Ι,Ρ). Στη θέση όπου ο (Ι,Ρ) γίνει ο εφάπτομενος κύκλος του Κ το τρίγωνο ΑΒοΓο, όπου ΒοΓο το ευθ. τμήμα που ορίζεται επί της κοινής εφαπτομένης του προηγουμένου κύκλου και του οβάλ Κ, θα έχει την μικρότερη περίμετρο.
Μετα τα παραπάνω η απόδειξη του θεωρήματος 4 διά της εις άτοπον απαγωγής είναι προφανής.

Παρατηρήσεις

Απ' όλα τα παραπάνω βγαίνουν ακόμη τα ακόλουθα συμπεράσματα.

1. Το ελαχίστου εμβαδού περιγεγραμμένο τρίγωνο σε οβάλ έχει σημεία επαφής τις κορυφές του τριγώνου μέγιστου εμβαδού του εγγεγραμμένου στο οβάλ. Τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των πλευρών του περιγεγραμμένου τριγώνου.
2. Εαν ΑΒΓ είναι το τρίγωνο μεγίστης περιμέτρου το εγγεγραμμένο στο οβάλ Κ τότε οι εφαπτόμενες ευθείες στα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑοΒοΓο του οποίου το ορθικό τρίγωνο είναι το ΑΒΓ.

Βιβλιογραφια.

1. G. D. Chakerian and L. H. Lange, Geometric Extremum Problems, Math.Magazine, vol44, No 2, pp 57-69.
2. M. M. Day, Polygons circumscribed about closed convex curves, Trans. Am. Soc. Vol 62, pp 315-319, 1957.
3. Crux, September 2005, KLAMKIN 13, submitted by George Tsintsifas.