ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Τσίντσιφας Γιώργος

Ο εικοστός αιώνας ήταν ιδιαίτερα γόνιμος και σημαντικός για τα Μαθηματικά. Σε μιά απλή αναδρομή βλέπουμε νέους κλάδους και νέες κατευθύνσεις, Τοπολογία, Συνδιαστική Γεωμετρία, πολύεδρα και κυρτά σχήματα, Αλγεβρική θεωρία των αριθμών, Αλγεβρική Γεωμετρία, Γεωμετρία των Αριθμών, Συνολοθεωρία, Ερευνα στις βάσεις των Μαθηματικών, μή Ευκλείδιες Γεωμετρίες, Νορμικοί χώροι και ακόμη διάφοροι άλλοι κλάδοι μέ ειδικότερες εφαρμογές. Στο Παρίσι ο D.Hilbert στο Διεθνές συνέδριο των Μαθηματικών το 1900 έθεσε τα 23 προβλήματα του, πού κατεύθυναν την έρευνα στον είκοστο αιώνα βλ [18]. Το πολύ σημαντικό είναι ότι μέσα στον αιώνα λύθηκαν σχεδόν όλα. Τα τελευταία 35 χρόνια λύθηκαν προβλήματα ανοιχτά για αιώνες. Τα σημαντικότερα είναι.

Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων.
Το πρόβλημα αυτό λέει οτι τέσσερα χρώματα επαρκούν γιά τη κατασκευή ενός χάρτη, έτσι ώστε δύο γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα. Το πρόβλημα ξεκίνησε το 1852 από τον Francis Guthrie και από απλή παρατήρηση χωρίς κάποια υπόνοια Μαθηματικού προβλήματος. Ο Francis το έστειλε στον αδελφό του Frederick ο οποίος το έδοσε στον πολύ γνωστό Μαθηματικό της εποχής Augustos De Morgan. Μετά τον De Morgan πέρασε στον Arthrur Gaylay και μετά σε μιά σειρά Μαθηματικών πρώτης κλάσεως έως ότου λυθεί μόλις το 1976 από τους K.Appel και H.Haken με τη βοήθεια υπολογιστή και με λύση απελπιστικά ανορθόδοξη γιά τα συνηθισμένα Μαθηματικά. βλ[9]

Το μεγάλο Θεώρημα του Fermat
Ο Fermat γεννήθηκε στις 20 Αυγούστου το 1601 και πέθανε 12 Ιανουαρίου 1665. Οταν ήταν σε νεαρή ηλικία έπεσε στα χέρια του μία μετάφραση από τα Αριθμητικά του Διόφαντου. Το βιβλίο αυτό έγινε διάσημο. Γιατί στο περιθώριο ο Fermat είχε γράψει οτι: Το άθροισμα δύο κύβων δεν μπορεί να είναι κύβος όπως το άθροισμα δύο τετάρτων δυνάμεων δεν μπορεί να είναι τέταρτη δύναμη, δύο πέμπτων κλ. Σημείωνε οτι είχε μία πολύ καλή λύση γιαυτό αλλά δεν μπορούσε να χωρέσει στο περιθώριο του βιβλίου, γιατί κατά τη συνηθεία του τις λύσεις στα προβλήματα του τις έγραφε στο περιθώριο του βιβλίου (των Αριθμητικών). Αυτή η σημείωση στάθηκε η αφορμή για ένα αγώνα ένα πόλεμο να πούμε καλλίτερα μεταξύ των Μαθηματικών και της εικασίας πού κράτησε περίπου ως το 1994 οπόταν λύθηκε απο τον Αγγλο Μαθηματικό **Andrew Wiles** βλ [20]

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat : Η Διοφαντική εξίσωση

$$x^n + y^n = z^n$$

για $n > 2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις. Πέρασε πολλά στάδια και βρέθηκε στα χέρια πολλών μεγάλων Μαθηματικών που όλοι έβαλαν ένα βήμα πρός τη λύση. Στα μεγάλα προβλήματα είναι σαν τη σκυταλοδρομία, πολλοί βοηθούν αλλά το χειροκρότημα το παίρνει ο τελευταίος.

Η εικασία του Poincare βλ [3] σελ 208 και [17].
Σε απλή μοντέρνα διατύπωση είναι. Η 3-σφαίρα είναι η μόνη κλείστη τρισδιάστατη πολλαπλότητα που είναι απλά συνεκτή.

Μετά από προσπάθεια ενός αιώνα από πολλούς σημαντικούς Μαθηματικούς απεδείχθει σωστή από τον ιδιοφυή Ρώσσο Μαθηματικό Γκρίσα Πέρελμαν. Ο Πέρελμαν είναι ο χρυσός Ολυμπιονίκης της Πανκόσμιας Μαθηματικής Ολυμπιάδας του 1982 στη Βουδαπέστη. Στο Παγκόσμιο συνέδριο των Μαθηματικών το 2006 στη Μαδρίτη αρνήθηκε το βραβείο Φιλντς (ισοδύναμο με το βραβείο Νόμπελ) πού απονεμέται σε Μαθηματικούς κάτω των 40 ετών για την προσφορά τους στα Μαθηματικά. Τέλος αρνήθηκε το 1 εκατομύριο δολάρια που είναι το βραβείο απο τη λύση ενός από τα προβλήματα της χιλιετίας που δίδεται απο ινστιντούτο Μαθηματικών Κλέι και εξαφανίστηκε στο σπίτι της μητέρας του σε κάποια γειτονιά της Αγίας Πετρούπολης, αρνούμενος κάθε δόξα και όλες τις προτεινόμενες έδρες στα μεγαλύτερα Πανεπιστήμια του κόσμου.
Εδώ θα αναφέρουμε τον Ελληνα Τοπολόγο ερευνητή Χρ.Παπακυριακόπουλο. Εργαζόμενος μόνος στο Μετσόβειο Πολυτεχνείο στην Τοπολογία σε κάποιο απο τα θεωρήματα του Ντεν προσέλκυσε το ενδιαφέρον του Φοξ καθηγητού Τοπολογίας στο Πρίστον και τον κάλεσε εκεί. Στο Πρίστον έφτασε το 1948. Στην αρχή της έρευνας του είχε αρκετές επιτυχίες και αναφέρεται με πολύ καλά λόγια απο τον E.Moise στο βιβλίο του Γεωμετρική Τοπολογία 2 και 3 διαστάσεων βλ[3]. Τα τελευταία 15 χρόνια της ζωής του ο Παπακυριακόπουλος τα αφιέρωσε στην απόδειξη της εικασίας του Poincare με αποτέλεσμα να πάνε χαμένα. Δηλαδή έκανε οτι περιγράφει ο Απ.Δοξιάδης στο θαυμάσιο βιβλίο του Ό Θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλμπαχ'.

Το πρόβλημα του Kepler

Στα μεγάλα προβλήματα της χιλιαετίας πρέπει ν' αναφέρουμε το περίφημο πρόβλημα του Kepler βλ [22] . Να τοποθετηθούν ίσες σφαίρες στο χώρο με τον οικονομικότερο τρόπο. Η εικασία του Kepler είναι οτι η πυκνότητα είναι $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$. Πρόσφατα, το 1998, ο Μαθηματικός Thomas Hales (Michinkan) με μιά σειρά εργασιών παρουσίασε μιά λύση που φαίνεται από την έρευνα των ειδικών οτι έχει πιθανότητες να είναι σωστή. Μέσα στους 4 αιώνες της εικασίας παρουσιάστηκαν εκατοντάδες λύσεις που απεδείχτηκαν εσφαλμένες. Πιθανόν θα περάσουν κι' άλλα χρόνια γιά να βεβαιωθεί η ορθότητα της λύσης του Hales.

Από τα μεγάλα προβλήματα παραμένουν άλυτα είναι η υπόθεση Riemann και η εικασία του Γκόλμπαχ. Ας πούμε δυό λόγια για αυτά.

Η υπόθεση Riemann

Αν $s = a + ib$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + ... = 0$$

τότε a=$\frac{1}{2}$.
Είναι γνωστό οτι η εξίσωση έχει άπειρες μιγαδικές ρίζες βλ [9] που βρίσκονται σε μιά ταινία στο μιγαδικό επίπεδο και συγκεκριμένα στη ταινία $x_1 = 0$,$x_2 = 1$ και σύμφωνα με την εικασία όλες οι λύσεις βρίσκονται στη μεσοπαράλληλο $x = \frac{1}{2}$. Εχει γίνει επαλήθευση της εικασίας απο τρείς Μαθηματικούς στο Πανεπιστήμιο του Wisconsin γιά 5 εκατομύρια λύσεις.
Είναι τόσο σημαντική η εικασία ώστε ο Edmond Landau , περίφημος Γερμανός Αριθμοθεωρητικός, στο βιβλίο του περιέχει κεφάλαιο που το επιγράφει Ḿετά την απόδειξη της εικασίας Riemann '.
Ακόμη είναι γνωστό από τον Norman Levinson, M.I.T. , ότι το 1/3 των λύσεων της εξίσωσης Riemann πλήρούν την εικασία.

Η υπόθεση Goldbach.

Το 1742 στην αλληλογραφία του με τον Euler ο Goldbach ισχυρίστηκε οτι κάθε άρτιος μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δύο πρώτων αριθμών πχ. βλ [7]
2=1+1, 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5 κλ.
Την εποχή εκείνη ο 1 θεωρείτο πρώτος, τώρα η υπόθεση ισχύει για άρτιο μεγαλύτερο του 2.
Φυσικά η αδυναμία γιά τη λύση των Μαθηματικών από την εποχή εκείνη μέχρι τώρα κατέστησε την εικασία μιά από τις πλέον διάσημες. Ο περίφημος Ρώσσος Αριθμοθεωρητικός M.Vinogradow απέδειξε την ακόλουθη πρόταση.
Κάθε περιττός αριθμός πάνω απο κάποιο όριο (δηλαδή αρκετά μεγάλος) μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα τριών πρώτων.

Ας δούμε τώρα τα δικά μας προβλήματα και εννοώ τα ίστορικά προβλήματα, δηλαδή
(α) Τετραγωνισμός του κύκλου.
(β) Διπλασιασμός του κύβου.
(γ) Τριχοτόμηση της γωνίας.
Εδώ πρέπει να πούμε κάποια πράγματα γιά το ιστορικό μέρος.
Η Γεωμετρία ξεκίνησε σαν Ελληνική επιστήμη. Η φιλοσοφία των Αρχαίων ήταν συνυφασμένη με την απλότητα των πραγμάτων και των σχημάτων. Σαν Γεωμετρικά όργανα θεωρούσαν τον κανόνα και τον διαβήτη, δηλαδή μιά μεταβλητή ευθεία και ένα κύκλο μεταβλητής ακτίνας. Αυτό σημαίνει οτι με ένα κύκλο μεταβλητής ακτίνας και με μιά ευθεία προσπάθησαν να μετασχηματίσουν ένα κύκλο σε τετράγωνο του ιδίου εμβαδού. Το ίδιο πρόβλημα είχαν να λύσουν γιά τον διπλασιασμό του κύβου και την τριχοτόμηση της γωνίας.
Τα προβλήματα αυτά προφανώς παρέμειναν άλυτα γιά αιώνες. Οταν η Γεωμετρία απέκτησε με την Αναλυτική Γεωμετρία αλγεβρικό χαρακτήρα απεδείχθει οτι εις μάτην πήγαν οι προσπάθειες τόσων ετών. Είναι γνωστό το κάτωθι θεώρημα. βλ [23]
Γιά να είναι κατασκευάσιμο (εννοείται με τον κανόνα και το διαβήτη) ένα γεωμετρικό μέγεθος πρέπει να είναι πραγματική ρίζα μιάς εξίσωσης με ακεραίους συντελεσάς και να εκφράζεται με απλά ή πολλαπλά τετραγωνικά ριζικά.
Στο τετραγωνισμό του κύκλου υπεισέρχεται ο υπερβατικός αριθμός π. Ο διπλασιασμός του κύβου οδηγεί σε τριτοβαθμία εξίσωση με κυβικές ρίζες, το ίδιο και η τριχοτομηση της γωνίας.
Εδώ έχω να παρατηρήσω το ακόλουθο αξιοπερίεργο πρόβλημα . Να κατατμηθεί ο κύκλος σε πεπερασμένο πλήθος κομμάτια ώστε συναρμολογούμενα να μας δίνουν τετράγωνο. Το πρόβλημα παρέμενε άλυτο εως ότου ο Ούγγρος Μαθηματικός Miklos Laczkovich το έλυσε.
Η λύση είναι εξαιρετικά δύσκολη. βλ[8], [13],

Ας δούμε τώρα μερικά προβλήματα έρευνας.
1.- Διάμετρος ενός κυρτού συνόλου λέγεται το μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του. Στο επίπεδο ας φαντστούμε ένα σχήμα K που με παραλληλη μεταφορα μπορεί να περιέχει κάθε σχήμα διαμέτρου 1. Το πρόβλημα του **Lebesque** (1914) είναι πόσο μικρό μπορεί να είναι το εμβαδόν του K ; βλ [8]
Για παράδειγμα ένας κυκλικός δίσκος Δ διαμέτρου 1 είναι κάλυμμα για κάθε ευθ.τμήμα μήκους 1. Εδώ αναφέρουμε το θεώρημα του **Besikovitch** . Υπάρχει σχήμα οσονδήποτε μικρού εμβαδού εντός του οποίου ευθ.τμήμα μήκους 1 μπορεί να κάνει ολόκληρη περιστροφή δηλ. 360 μοίρες βλ[24].
Ο κυκλικός δίσκος ακτίνος 1/2 έχει άπειρες διαμέτρους ίσες πρός 1. Ενα λιγότερο γνω-

στό σχήμα με άπειρες διαμέτρους είναι το **Reuleaux triangle.** Είναι το σχήμα Κ που παίρνουμε ως εξής. Αν ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1, θεωρούμε τους τρείς κύκλους (Α,1),(Β,1),(Γ,1), Κ είναι η διατομή τους. Μιά εξαιρετική ιδιότητα του Reuleeaux triangle είναι οτι μπορεί να περιστραφεί εντός τετραγώνου πλευράς 1, πράγμα που επεκτεινόμενο στο χώρο αποτελεί την αρχή της κατασκευής των κινητήρων Vangel βλ[24].

2.- **Leo Moser** Να ευρεθεί σχήμα ελαχίστου εμβαδού που να περιέχει ανοικτή γραμμή μήκους το πολύ 1. ο Wetzel έδοσε 0.2194 για κυρτό σχήμα ο Meir απέδειξε οτι το ημικύκλιο διαμέτρου 1 περιέχει όλες τις ανοιχτές γραμμές μήκους 1. Υπάρχει ακόμη μιά σειρά ερευνητών που έδοσαν περίπου τα ίδια μεγέθη, αλλά το πρόβλημα θεωρείται ακόμη ανοικτό. βλ [8]

3.-**Το πρόβλημα του Borsuk**(1932) βλ [16]
Μπορεί πεπερασμένο σημειοσύνολο Κ στο χώρο των n -διαστάσεων να χωρισθεί σε n+1 τμήματα με διάμετρο μικρότερη του Κ ;
Η απάντηση γιά τη σφαίρα είναι θετική και όχι δύσκολη στην απόδειξη. Γιά n=2 είναι η αρχική εργασία του Borsuk , γιά n=3 υπάρχει θετική απάντηση από τον Eggleston (1955) ,τον B.Grunbaum και τον A.Heppes. Το 1993 οι J.Kahn και G.Kalai απέδειξαν οτι γιά n=1.325 και γιά κάθε $n > 2014$ η απάντηση είναι αρνητική. Τέλος αργότερα οι A.Hinrichs και C.Richter έδειξαν οτι γιά n μη μικρότερο του 298 η απάντηση είναι αρνητική.
Το 1946 ο Hugo Hadwinger απέδειξε οτι η εικασία είναι σωστή γιά κυρτό συμπαγές smooth σχήμα Κ (Ετσι χαρακτηρίζεται ένα σχήμα όταν σε κάθε συνοριακό του σημείο υπάρχει ένα ακριβώς εφαπτόμενο επίπεδο στο Κ).
Η απόδειξη είναι θαυμάσια και αναφέρεται στον n-διάστατο χώρο. Γιά να κάνουμε μιά σύντομη περιγραφή της απόδειξης πρέπει ν' αναφέρουμε μιά ιδιότητα της διαμέτρου κυρτού σχήματος. Τα κάθετα επίπεδα στα άκρα της διαμέτρου ορίζουν μιά ζώνη εντός της οποίας περιέχεται το σχήμα.
Εστω τώρα έχουμε ένα κυρτό συμπαγές σύνολο Κ διαμέτρου Δ στον n-διάστατο χώρο. θα δείξουμε οτι μπορούμε να βρούμε μιά διαίρεση του Κ σε n+1 μέρη $k_1, k_2....k_{n+1}$ έτσι ώστε κάθε ένα απο τα παραπάνω μέρη του Κ να έχει διάμετρο μικρότερη απο Δ. Εστω τώρα σφαίρα S διαμέτρου Δ. Ηδη είναι γνωστό οτι η S μπορεί να χωριστεί σε n+1 μέρη $s_1, s_2, ...s_{n+1}$ με διάμετρο μικρότερη από Δ. Αποκαθιστούμε τώρα μιά αμφιμονότιμη αντιστοιχία έστω Φ μεταξύ S και Κ ώστε αν Α σημείο του Κ και Φ(Α) το αντίστοιχο στη S , τα εφαπτόμενα επίπεδα στα Α και Φ(Α) να είναι παράλληλα και ομοίως προσανατολισμένα. Οταν το Φ(Α) διατρέχει το $s_!$ θα πάρουμε στο Κ το σημειοσύνολο k_1 , κλ. Εστω τώρα το k_1 έχει διάμετρο ΑΒ ίση πρός Δ. Τότε αν πάρουμε τα αντίστοιχα σημεία Φ(Α),Φ(Β), θα είναι η Φ(Α)Φ(Β) η διάμετρος του s_1 που υποθέσαμε οτι είναι μικρότερη απο Δ.

4. α.**Erdos** Υπάρχει σημειοσύνολο αποτελούμενο απο 7 σημεία σε γενική θέση (μη κείμενα ανά τρία σε ευθεία ούτε ανα τέσσερα σε κύκλο) ώστε οι μεταξύ των αποστάσεις να είναι ρητοί αριθμοί ; βλ[5]

β. Ν σημεία στο επίπεδο πόσους το πολύ μοναδιαίους κύκλους μπορούν να ορίσουν ;βλ [5]

5.- Εντός τετραγώνου υπάρχει σημείο με ρητές αποστάσεις από τις κορυφές ; .βλ[5]

6.-**Oppenheim** (1964) Ποιός ο μέγιστος αριθμός τριγώνων με μοναδιαίο εμβαδόν μπορούν να ορίσουν N σημεία σ' ένα επίπεδο ; βλ[5]

7.-**Γεωμετρικές Ανισότητες**
Ενας κλάδος με έντονη παρουσία τα τελευταία χρόνια. Σημαντική δραστηριότητα στο Βελιγράδι από τον Mitrinovic και την ομάδα του και στην Αμερική από τον Murray Klamkin. Πρίν αρκετά χρόνια ο Klamkin μου έστειλε την παρακάτω ανισότητα.

$$\sum \frac{p}{q+r} b^2 c^2 \geq 8F^2$$

Το άθροισμα κυκλικά πρός a,b,c πλευρές τριγώνου και p,q,r πραγματικοί θετικοί αριθμοί, F το εμβαδόν. Μου ζήτησε να ψάξω γιά κάποια απλή λύση. Τελικά στάθηκε αδύνατο να βρεθεί απλή λύση. Η μόνη απόδειξη που βρέθηκε τότε ήταν, με κάποιο μετασχηματισμό, δείξαμε οτι μιά τετραγωνική μορφή είναι θετική. Ετσι παραμένει το πρόβλημα μιάς απλής λύσης.
Στα προσωπικά μου ενδιαφέροντα ανήκουν τα δύο παρακάτω προβλήματα. Το πρώτο είναι Συνδιαστική Γεωμετρία και σε απλή μορφή στο επίπεδο διατυπώνεται ως εξής.
Εστω $G = (A_1, A_2, A_3, ...A_n)$ ένα σημειοσύνολο σημείων. Αν τα σημεία ανα τρία βρίσκωνται εντός ζώνης εύρους Δ, τότε είναι απλό να δούμε οτι όλα τα σημεία θα βρίσκωνται εντός ζώνης 2Δ. Το πρόβλημα είναι να πρσδιοριστεί ο ελάχιστος κ ώστε όλα τα σημεία να βρίσκωνται εντός ζώνης κΔ. Η εικασία είναι οτι κ=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Θυμίζω ένα πρόβλημα της Γεωμετρίας. Αν κάνουμε κόμπο σε μιά ταινία εύρους Δ και την διπλώσουμε προσεκτικά θα πάρουμε ένα κανονικό πεντάγωνο σε ζώνη εύρους $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Delta$
Το δεύτερο πρόβλημα αναφέρεται στη Γεωμετρία των Αριθμών. Με δυό λόγια Γεωμετρία των Αριθμών είναι η Αναλυτική Γεωμετρία σε ένα Καρτεσιανό, ας πούμε ορθογώνιο, σύστημα που τα σημεία με ακεραίες συντεταγμένες τα ονομάζουμε Lattice σημεία και παίζουν πρωτεύοντα ρόλο.
Ο **Herman Minkowski** (1864-1909) επινόησε τη Γεωμετρία των Αριθμών γιά να λύσει προβλήματα της Θεωρίας των Αριθμών. Οπου πέρασε το μυαλό αυτού του ανθρώπου άφησε την λάμψη του ταλέντου του. Σε ηλικία 17 ετών βραβεύτηκε απο τη Γαλλική Ακαδημία με το Grand price de Sciences. Δυστυχώς έφυγε πολύ νέος.
Ενα σχήμα θα λέμε οτι έχει την Lattice ιδιότητα όταν γιά κάθε θέση του στο χώρο περιέχει Lattice (ακέραιο) σημείο. Σε παλαιότερη εργασία είχα βρεί οτι μία έλλειψη ή ένα τρίγωνο γιά να έχουν την Lattice ιδιότητα αρκεί να περιέχουν ένα τετράγωνο πλευράς 1. Αργότερα σε μιά εργασία με τον M.Henk βρήκαμε, στο χώρο των ν-διαστάσεων, γιά να έχει την Lattice ιδιότητα ένα ελλειψοειδές, αρκεί να περιέχει ένα ν-κύβο πλευράς 1. Στο επίπεδο, είναι εύκολο να δούμε, ένα τετράγωνο γιά να έχει την Lattice ιδιότητα αρκεί η πλευρά του να μην είναι μικρότερη απο $\sqrt{2}$. Το ίδιο αποδείξαμε στο 3-διάστατο χώρο. Στον ν-διάστατο χώρο πόση μπορεί να είναι η πλέυρα του ν-κύβου γιά να έχει την Lattice ιδιότητα·. Μήπως το $\sqrt{2}$ επαρκεί·.

Στον επίλογο θα εξηγήσω τον λόγο γιατί μίλησα γιά προβλήματα γενικώς. Πιστέυω οτι κάθε επιστήμη προχωρά με την λύση των προβλήματων που δημιουργούνται στο χώρο της. Αυτό αφορά και την δουλιά μας, την διδασκαλία των Μαθηματικών. Κάποτε, πολύ νέος, διαπίστωσα με έκπληξη πόσο καθαρό και δυνατό είναι το μυαλό των παιδιών. Ενα παιδί έκανε μιά ανεπάντεχη λύση στο ακόλουθο πρόβλημα. Εχουμε 5 σημεία στο επίπεδο, σε γενική θέση. Δείξατε οτι μπορούμε να επιλέξουμε τρία από τα σημεία ώστε να περνά ένας κύκλος από αυτά, και να αφήνει από τα υπόλοιπα σημεία το ένα μέσα στο κύκλο και το άλλο έξω. Ακόμη ένα παρόμοιο πρόβλημα. Ενας πλανήτης έχει τρείς χώρες. Σε μιά απο τις χώρες οι κάτοικοι περηφανεύονται ότι αν ανοίξουν μιά τρύπα από κάποιο σημείο της χώρας τους, κατά μήκος μιάς διαμέτρου, θα βρεθούν πάλι στη χώρα τους. Τέτοια προβλήματα συγκινούν τα παιδιά. Τα κάνουν να σκέπτωνται.

Βιβλιογραφία

1. T. Bonnesen, W. Fenchel, Theory of Convex Bodies, B. Associates.

2. R. Messer, P. Straffin, Topology now, The Math. Assoc. of America.

3. E. Moise, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag.

4. A.C.Thompson, Minkowski Geometry, Cambridge University Press.

5. Janis Pach, Pankaj Agarwal, Combinatorial Geometry,John Wiley sons INC.

6. P. Brass, W. Moser, J. Pach, Research Problems in Discrete Geometry.

7. J.G. Van der Corput, L' Hypothese de Goldbach pour les numbres in pairs.

8. V. Klee, S. Wagon, Unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory.

9. Lynn Arthur Steen, Mathematics Today, Vintace books.

10. D.S. Mitvinovic, J.E. Pecavic, V. Volonec, Recent Advances in Geometric Inequality, Kluwer Academic Publishers.

11. G. Tsintsifas, AMM vol 83, No.3, page 142.

12. M. Henk, G. Tsintsifas, Lattice Point Coverings, Advances in Mathematics, vol. 36, No 4, page 441.

13. R. Gardner, S. Wagen, At long last the circle has been squared, Notices of the Amer. Math society, 36 (1989) 1338-1343.

14.Απ. Δοξιάδης, Ο Θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμαχ, Εκδόσεις Καστανιώτη.

15.Gruber P.M. - Lekkerker C.E., Geometry of Numbers, North Holland.

16. V. Boltjansky, I.Gohberg, Combinatorial Geometry, Canbridge university press.

17. G.Szpird,Η εικασία του Πουανκαρέ, Τραυλός.

18. J.J.Gray,Η πρόκληση του Ηιλβερτ, Αλεξάνδρεια,

19. A. Liu and B.Shawyer, Problems from Murray Klamkin, Math Assoc. of America.

20. S. Singh,Το Τελευταίο θεώρημα του Φερματ, Τραυλός.

21A. Brondsted, An Introduction to Convex Polytopes, Springer-Verlag.

22. C.A.Rogers, Packing and Covering, Cambridge Un.Press.

23. H.Lebesgue, Lecons sur les Constructions Geometriques, Gauthier-Vilars.

24. I.M.Yaglom and V.G. Boltyanskii, Convex Figures, Holt Rinehart and Winston.

e.mail gtsintsifas@yahoo.com

Blog www.gtsintsifas.com