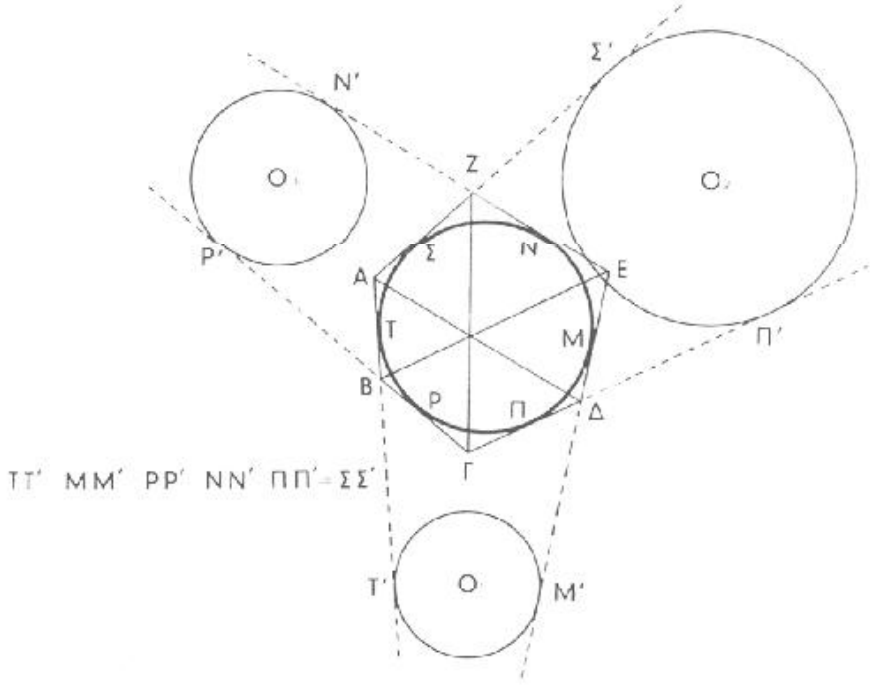
Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑ

ΤΕΥΧΟΣ 1

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ
ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΕΚΔΟΣΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΥ
ΠΡΙΓΚ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ 45 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ
ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΣΥΓΧΡΟΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΥ
ΠΡΙΓΚ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ 45 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΝ. ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

1.1. Ἰσότης τριγώνων.

1.1.1. Ὁρισμός: Ἡ ἀντιστοιχία (1,1) μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' καθ' ἣν $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$, $\Gamma \longleftrightarrow \Gamma'$ θὰ ὀνομάζεται Ἰσότης ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ των καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι.[1]

Διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέτομεν $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ ἢ A, B, Γ τὰς γωνίας αὐτοῦ καὶ α, β, γ τὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως.

Μεταξὺ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἰσχύουν

1.1.2. **Θεώρημα:**

Ἂν $(\hat{A} = \hat{A}') \wedge (\beta = \beta') \wedge (\gamma = \gamma') \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

1.1.3. **Θεώρημα:**

Ἂν $(\alpha = \alpha') \wedge (\hat{B} = \hat{B}') \wedge (\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}') \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

1.1.4. **Θεώρημα:**

Ἂν $(\alpha = \alpha') \wedge (\beta = \beta') \wedge (\gamma = \gamma') \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

Πόρισμα:

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ἂν ἔχουν α) δύο πλευρὰς ἴσας β) μίαν πλευρὰν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσας ἀντιστοίχως.

Πόρισμα:

Ἂν $(\beta = \beta') \wedge (\gamma = \gamma') \wedge (\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}') \Longrightarrow$ ἢ

(α) $\hat{B} = \hat{B}' \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$

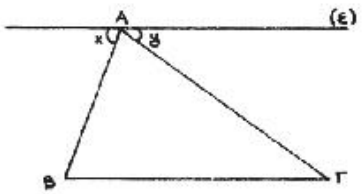
(β) $\hat{B} + \hat{B}' = 2^L$.

1.2. Ἀνισοτικὲς σχέσεις εἰς τὸ τρίγωνον.

1.2.1. **Θεώρημα:** Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$.

Ἀπόδειξις:

Βάσει τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγεται μία καὶ μόνον παράλληλος (ε) πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν $\hat{x} = \hat{B}$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν (ε), ΒΓ, $\hat{y} = \hat{\Gamma}$ · ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν (ε), ΒΓ. Ἀλλὰ



---

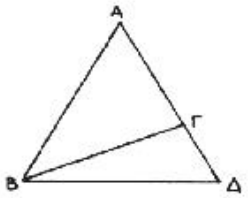
(1) Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἐνορατικὴν εἰκόνα κατὰ τὴν κίνησιν στερεοῦ σχήματος εἰς τὸν ἐποπτικὸν χῶρον καὶ δεχθῶμεν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν σχήματος δὲν μεταβάλλεται τὸ μέγεθός του (ἀποστάσεις, γωνίαι) δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἰσότητα δύο σχημάτων κατὰ τὴν σύμπτωσίν των.

$\hat{x}+\hat{A}+\hat{y}=180^\circ$ ὅθεν $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$.

1.2.2. **Θεώρημα:** Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι αὐτῆς ἤτοι ἐξ. $\hat{\Gamma}=\hat{A}+\hat{B}$.

1.2.3. **Θεώρημα:** Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ $\gamma>\beta \iff \hat{\Gamma}>\hat{B}$.

Ἀπόδειξις:



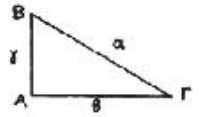
Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΓ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Δ ὥστε $A\Delta=AB$. Ἐπειδὴ $AB>A\Gamma$ θὰ ἔχωμεν τὴν διάταξιν Α-Γ-Δ.

Τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Delta}B$. Τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $A\hat{B}\Delta$ ὅθεν $A\hat{B}\Delta>\hat{B}$ ἢ $A\hat{\Delta}B>\hat{B}$. Ἀλλὰ $\hat{\Gamma}>A\hat{\Delta}B$ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ $\hat{B\Gamma\Delta}$. Ἤτοι $\hat{\Gamma}>\hat{B}$.

Τὸ ἀντίστροφον παρομοίως.

1.2.4. **Θεώρημα:** Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρά.

Ἀπόδειξις:

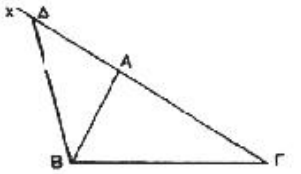


Ἔστω $\hat{A}=90^\circ$. Θὰ εἶναι ἐξ. $\hat{A}=\hat{A}$. Ἀλλὰ ἐξ. $\hat{A}>\hat{B},\hat{\Gamma}$. Ὅθεν $\alpha>\beta,\gamma$.

1.2.5. **Θεώρημα: Τριγωνικὴ ἀνισότης.**

Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς τρίτης.

Ἀπόδειξις:



Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ax,(ἰδὲ σχῆμα), λαμβάνομεν $A\Delta=AB$. Τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ $A\hat{\Delta}B=A\hat{B}\Delta$. Ἡ διάταξις τῶν σημείων Γ, Α, Δ εἶναι Γ-Α-Δ. Ἄρα τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΓΒΔ. Ὅθεν $\hat{\Gamma B}\Delta>A\hat{B}\Delta$ καὶ συνεπῶς $\hat{\Gamma B\Delta}>\hat{\Gamma\Delta B}$ ἤτοι $\Gamma\Delta>B\Gamma$, ἀλλὰ $\Gamma\Delta=AB+A\Gamma$ ἢ $AB+A\Gamma>B\Gamma$.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀπεδείχθη συνεπῶς ἡ βασικὴ ἀνισότης ἡ ὁποία ὀνομάζεται **τριγωνικὴ ἀνισότης**

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta>\gamma \\ &\beta+\gamma>\alpha \quad (1). \\ &\gamma+\alpha>\beta \end{aligned}$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

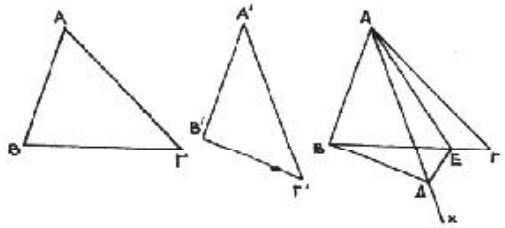
$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \quad (2).$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ἀργότερον (ἰδὲ παράρτημα) ὅτι ἡ ἀνισότης (1) ἢ ἡ (2) εἶναι ἐπαρκὴς ἵνα τρία εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ ἀποτελοῦν τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου.

1.2.6. **Θεώρημα:** Ἐὰν διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′

$$\begin{aligned} &AB=A'B' \\ &A\Gamma=A'\Gamma' \quad \Longrightarrow B\Gamma>B'\Gamma'. \\ &\hat{A}>\hat{A}' \end{aligned}$$

Απόδειξις:



Έφόσον $\hat{A} > \hat{A}'$ ὑπάρχει ἡμιευθεία Ax εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς $\hat{A}$ ὥστε $B\hat{A}x = \hat{A}'$. Ἐπί τῆς ἡμιευθείας Ax λαμβάνομεν τό σημεῖον Δ ὥστε $A\Delta = A'\Gamma'$. Τά τρίγωνα $A'B'\Gamma'$ καί $AB\Delta$ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν $A'B' = AB$, $\hat{A}' = B\hat{A}\Delta$, $A'\Gamma' = A\Delta$. Ὅθεν $B'\Gamma' = B\Delta$.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς $\Delta\hat{A}\Gamma$ τέμνει τήν $B\Gamma$ εἰς E. Θά ἔχωμεν $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Gamma}E$ διότι $A\Delta = A\Gamma$, $\Delta\hat{A}E = \Gamma\hat{A}E$ καί AE κοινή πλευρά. Ἄρα $E\Gamma = E\Delta$. Ἀλλά $B\Gamma = BE + E\Gamma$ ἤ $B\Gamma = BE + E\Delta$. Διά τό τρίγωνον $BE\Delta$ ἰσχύει ἡ τριγωνική ἀνισότης ἤτοι $BE + E\Delta > B\Delta$ ἤ $B\Gamma > B'\Gamma'$.

Σημείωσις:

Ἡ λύσις εἶναι ἡ ἰδία καί εἰς τάς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας τό Δ εὑρίσκεται ἐπί τῆς $B\Gamma$ ἤ εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἀντιστρόφως: Ἐάν διά τά τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ B\Gamma > B'\Gamma' \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A} > \hat{A}'.$$

Ἡ ἀπόδειξις διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

1.3.

1.3.1. **Θεώρημα:** Εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον $BA\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) τό ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς A εἶναι συγχρόνως διχοτόμος τῆς γωνίας κορυφῆς καί διάμεσος.

1.3.2. **Θεώρημα:** Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ υ_α τό ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς A, δ_α ἡ διχοτόμος, μ_α ἡ διάμεσος. Ἐκ τῶν $\upsilon_\alpha, \delta_\alpha, \mu_\alpha$ ἐάν ταυτίζωνται δύο τό τρίγωνον θά εἶναι ἰσοσκελές

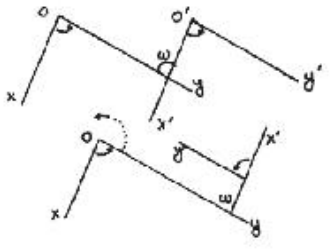
1.3.3. **Θεώρημα:** Εἰς τό ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$.

Ἀντιστρόφως.

1.4.

1.4.1. **Θεώρημα:** Δύο γωνίαι αἱ ὁποῖαι ἔχουν τάς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους θά εἶναι ἴσαι ἄν εἶναι καί αἱ δύο ὀξεῖαι ἤ ἀμβλεῖαι (ἤ ἄν εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι).

Ἀπόδειξις:



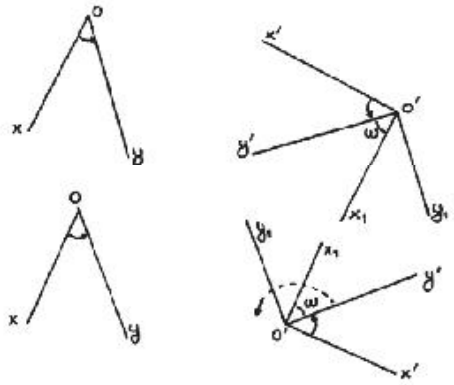
$x\hat{O}y = \hat{\omega} = x'\hat{O}'y'$.

Ἐάν μία τῶν γωνιῶν εἶναι ὀξεῖα καί ἡ ἑτέρα ἀμβλεῖα, αἱ γωνίαι θά εἶναι παραπληρωματικαί. (ἤ ἄν εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι ὅτε ἡ μία ἐξ αὐτῶν καί ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης θά εἶναι παραπληρωματικαί).

1.4.2. **Θεώρημα:** Δύο γωνίαι αἱ ὁποῖαι ἔχουν τάς πλευράς των ἀντιστοίχως καθέτους θά εἶναι ἴσαι ἄν εἶναι καί αἱ δύο ὀξεῖαι ἤ ἀμβλεῖαι (ἤ ἄν ἔχουν τόν αὐτόν προσανατολισμόν).

Απόδειξις:

Εκ του Ο' φέρομεν $O'x_1 \parallel Ox$, $O'y_1 \parallel Oy$. $x\hat{O}y = x_1\hat{O}'y_1$. Αλλά $x'\hat{O}'x_1 = y'\hat{O}'y_1 = 90°$ και $x'\hat{O}'x_1 - \omega = y'\hat{O}'y_1 - \omega$ ή $x'\hat{O}'y' = x_1\hat{O}'y_1$. Οθεν $x\hat{O}y = x'\hat{O}'y'$.



Εάν μία των γωνιών είναι ορθεία και ή έτερα αμβλεία αί γωνίαι θά είναι παραπληρωματικαί (ή εάν έχουν αντίθετον προσανατολισμόν ότε ή μία εξ αυτών και ή αντίθετος της άλλης θά είναι παραπληρωματικαί).

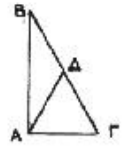
1.5.

1.5.1. **Θεώρημα:** Εις ορθογώνιον τρίγωνον ή διάμεσος επί την υποτείνουσαν είναι ίση προς το ήμισυ της υποτεινούσης.

Αντιστρόφως: Αν εις τρίγωνον ΑΒΓ $\mu_a = \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \hat{A} = 1^L$.

1.5.2. **Θεώρημα:** Αν εις ορθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) $\hat{B} = 30°$ τότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$. Αντιστρόφως.

Απόδειξις:



Φέρομεν την διάμεσον ΑΔ και διαπιστώνομεν ότι το τρίγωνον ΑΔΓ είναι ισόπλευρον.

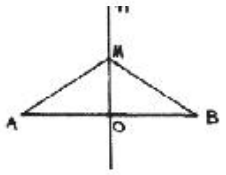
Αντιστρόφως:

Εάν εις ορθογώνιον τρίγωνον μία κάθετος είναι το ήμισυ της υποτεινούσης ή απέναντι αυτής όξεια γωνία είναι 30°.

1.6.

1.6.1. **Θεώρημα:** Το σύνολον G των σημείων τα οποία ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με την μεσοκάθετον αυτού.

Απόδειξις:



α) Υποθέτομεν την ύπαρξιν[1] μη κενού G και άκόμη $M \in G$. Θά έχωμεν $AM = BM$ ήτοι το τρίγωνον ΑΜΒ είναι ισοσκελές και συνεπώς $M \in \eta$, όπου η ή μεσοκάθετος επί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Οθεν $G \subseteq \eta$ (1).

β) Εάν τώρα λάβωμεν και τυχόν σημείον Μ' της η διαπιστώνομεν ότι $M' \in G$. Άρα $\eta \subseteq G$ (2).

Εκ των (1), (2) προκύπτει ότι $G = \eta$. Ήτοι το σύνολον G των σημείων τα οποία ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με την μεσοκάθετον αυτού η.

1.6.2. **Θεώρημα:** Το σύνολον των σημείων τα οποία ισαπέχουν από τας πλευράς μιας γωνίας συμπίπτει με την διχοτόμον αυτής.

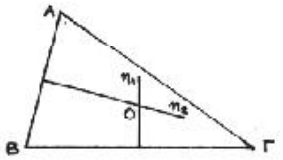
---

(1) Η απόδειξις της ύπάρξεως του G γίνεται με το β' μέρος της αποδείξεως.

1.7.

1.7.1. **Θεώρημα:** Αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

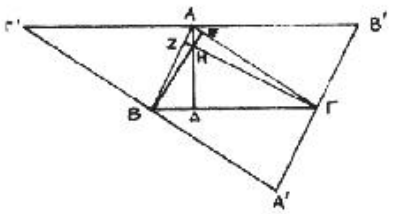


Ἔστω η_1 καὶ η_2 αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΒΓ καὶ ΑΒ. Αἱ η_1, η_2 δὲν δύνανται νὰ εἶναι παράλληλοι δεδομένου ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλοι. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν η_1, η_2. Ὅτε $\eta_1 \Rightarrow$ ΟΒ = ΟΓ (1). Ὅτε $\eta_2 \Rightarrow$ ΟΒ = ΟΑ (2). (1),(2) $\Rightarrow$ ΟΑ = ΟΓ ἤτοι τὸ Ο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Παρατήρησις: Τὸ Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας διερχομένης ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ ὀνομάζεται **περιγεγραμμένη** περιφέρεια.

1.7.2. **Θεώρημα:** Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

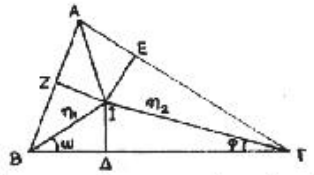


Ἔστω ΑΒΓ ἓν τυχὸν τρίγωνον, ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Ἐξ ἑκάστης κορυφῆς φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Σχηματίζεται οὕτως τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ'. Τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΒ', ΑΓΒΓ' εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ συνεπῶς ΒΓ = ΑΒ' = ΑΓ'. Ὅθεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' τοῦ $\hat{A'B'\Gamma'}$. Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τοῦ $\hat{A'B'\Gamma'}$ ἀντιστοίχως καὶ βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η.

Τὸ σημεῖον τοῦτο Η ὀνομάζεται **ὀρθόκεντρον** τοῦ $\hat{AB\Gamma}$, τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν ΔΕΖ **ὀρθικὸν** αὐτοῦ.

1.7.3. **Θεώρημα:** Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



Θεωροῦμεν τὰς διχοτόμους τῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ η_1 καὶ η_2. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Ι, διότι $\hat{\omega}+\hat{\varphi} = \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} < 2^L$ (1). Τὸ σημεῖον Ι εἶναι ἐσωτερικὸν σημείων τῶν $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$. Ἄρα τὸ σημεῖον Ι περιέχεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

Τὸ σημεῖον Ι ὡς σημεῖον τῆς διχοτόμου η_1 τῆς $\hat{B}$ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ΙΔ = ΙΖ (1). Ἐπίσης ΙΔ = ΙΕ (2). Ὅθεν ΙΖ = ΙΕ, ἤτοι τὸ σημεῖον Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{A}$.

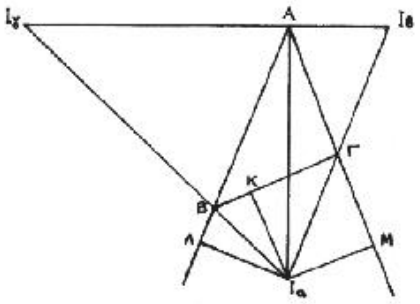
Παρατήρησις: Τὸ Ι ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἄ-

---

(1) Προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

ρα εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας ἡ ὁποία ἐφάπτεται τούτων. Ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένη** περιφέρεια.

1.7.4. **Θεώρημα:** Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων ἐξωτερικῶν γωνιῶν του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου μὲ τὴν προηγουμένην (1.7.3).

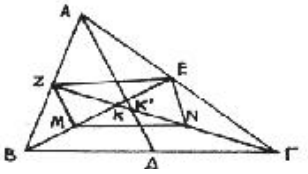
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ I_α, σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων $\hat{A}$, ἐξ.$\hat{B}$, ἐξ.$\hat{\Gamma}$ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὴν ΒΓ καὶ τὰς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. (Τὸ σημεῖον Κ ἐντὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Διατί;) Ἄρα εἶναι τὸ κέντρον περιφερείας ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ ὀνομάζεται **παρεγγεγραμμένη** εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Ὑπάρχουν συνολικῶς τρεῖς παρεγγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὸ τρίγωνον. Τὰ κέντρα των εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων I_α, I_β, I_γ.

Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου $I_\alpha I_\beta I_\gamma$ εἶναι αἱ AI_α, BI_β, ΓI_γ. Ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ $I_\alpha I_\beta I_\gamma$ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1.7.5. **Θεώρημα:** Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω ΒΕ καὶ ΓΖ αἱ διάμεσοι ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ. Αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Λαμβάνομεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΚΒ καὶ ΚΓ. Τὸ τετράπλευρον ΖΕΝΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του τέμνονται δίχα. Ἤτοι ΖΚ = ΚΝ = ΝΓ καὶ $\text{ΚΓ} = \frac{2}{3}\text{ΓΖ}$ (1). Ἔστω Κ' τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων ΑΔ καὶ ΓΖ. Βάσει τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως θὰ εἶναι $\text{Κ'Γ} = \frac{2}{3}\text{ΓΖ}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ΓΚ = ΓΚ', ἤτοι Κ ≡ Κ'.

Τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζεται **κέντρον βάρους** τοῦ τριγώνου (ἢ βαρύκεντρον).

1.8. Κυρτὰ πολύγωνα.

1.8.1. **Θεώρημα:** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ (1) πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς (2ν-4) ὀρθάς.

Ἀπόδειξις:

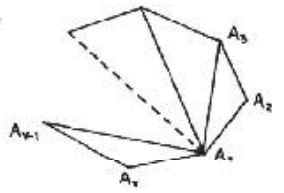
Ἔστω τὸ (κυρτὸν) πολύγωνον $A_1A_2A_3\cdots A_{\nu-1}A_\nu$.

Χωρίζομεν τοῦτο εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων ἀγομένων ἐκ τῆς μιᾶς κο-

---

(1) Ἰσχύει καὶ διὰ μὴ κυρτὸν πολύγωνον.

ρυφῆς π.χ. τῆς A_1. Σχηματίζονται συνολικῶς ν-2 τρίγωνα. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἕκαστον τρίγωνον ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν ἴσον πρός 2^L, ἤτοι τά τρίγωνα ἔχουν ἄθροισμα γωνιῶν $(\nu-2)2^L$. Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $\Sigma = (2\nu-4)$ ὀρθαί.



1.8.2. **Θεώρημα:** Τό πλῆθος τῶν διαγωνίων παντός πολυγώνου εἶναι $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τῆς κορυφῆς A_1 ἄγονται ν-3 διαγώνιοι πρός τάς κορυφάς $A_2, A_3, \ldots, A_{\nu-1}$. Τό αὐτό διά τήν $A_2, A_3, \ldots, A_\nu$. Ἤτοι συνολικῶς $\nu(\nu-3)$ (1) διαγώνιοι. Ἡ τυχοῦσα διαγώνιος π.χ. A_1A_3 (A_iA_j) ἔχει μετρηθῆ ἀπό τήν κορυφήν A_1 ὅπως καί ἀπό τήν A_3. Ἤτοι εἰς τόν τύπον (1) ἔχει λη-φθῆ κάθε διαγώνιος δύο φοράς. Ἄρα τό πλῆθος τῶν διαγωνίων δ δίδε-ται ὑπό τοῦ τύπου $\delta = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$.

1.8.3. **Θεώρημα:** Τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν παντός πολυγώ-νου ἰσοῦται πρός 4^L.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν ἐξ $\hat{A}_i$ = ἐξωτερική $\hat{A}_i$. Θά ἔχωμεν

$$\text{ἐξ } \hat{A}_1 = 2^L - \hat{A}_1$$
$$\text{ἐξ } \hat{A}_2 = 2^L - \hat{A}_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{ἐξ } \hat{A}_\nu = 2^L - \hat{A}_\nu$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἐκφάσεις αὐτάς:

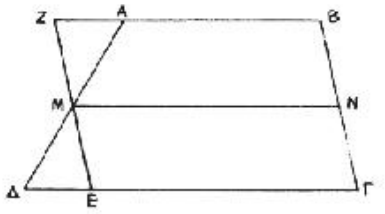
$$\text{ἐξ } \hat{A}_1 + \text{ἐξ } \hat{A}_2 + \cdots + \text{ἐξ } \hat{A}_\nu = (2\nu)^L - (\hat{A}_1+\hat{A}_2+\cdots+\hat{A}_\nu) = (2\nu)^L - \left[(2\nu)^L - 4^L\right] = 4^L.$$

1.9. Τό τραπέζιον.

1.9.1. **Θεώρημα:** Εἰς πᾶν τραπέζιον τό εὐθύγραμμον τμῆμα τό ὁποῖον συνδέει τά μέσα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν κεῖται ἐπί εὐθείας παραλ-λήλου πρός τάς βάσεις καί ἰσοῦται πρός τό ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΔ φέρο-μεν τήν παράλληλον ΖΕ πρός τήν ΒΓ. Τό τετράπλευρον ΖΕΓΒ εἶναι παραλλη-λόγραμμον. Ἐπίσης ΖΜΝΒ παραλληλό-γραμμον. Ἄρα $MN = BZ = \frac{BZ+E\Gamma}{2}$ (1).

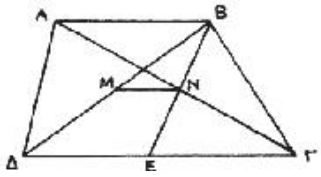


Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων $\overset{\triangle}{ZMA}$, $\overset{\triangle}{EM\Delta}$ προκύπτει ὅτι $AZ = \Delta E$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow$ $MN = \frac{AB+AZ+\Gamma\Delta-\Delta E}{2} = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}$.

1.9.2. **Θεώρημα:** Τό εὐθύγραμμον τμῆμα τό ὁποῖον συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων τραπεζίου κεῖται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρός τάς βά-σεις καί ἰσοῦται πρός τήν ἡμιδιαφοράν αὐτῶν.

Ἀπόδειξις:



Τά τρίγωνα ΑΒΝ, ΓΕΝ εἶναι ἴσα, ἄρα $BN = NE$. Τό εὐθύγραμμον τμῆμα MN συνδέει τά μέσα τῶν ΒΔ, ΒΕ. Ἄρα $MN \parallel \Gamma\Delta$ καί $MN = \frac{\Delta E}{2}$ (1).

Ἀλλά $\Delta E = \Gamma\Delta - \Gamma E = \Gamma\Delta - AB$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow MN = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

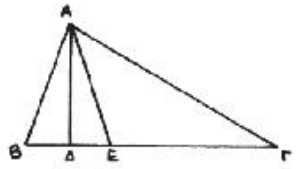
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

1. Εἰς πάν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπό τοῦ ὕψους καί τῆς διχοτόμου ἰσοῦται πρός $\left|\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right|$.

Ἀπόδειξις:

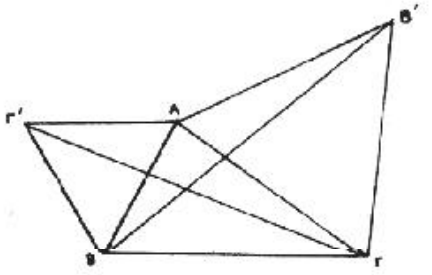
Δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι $\hat{B}>\hat{\Gamma}$, καί ἔστω ΑΔ τό ὕψος καί ΑΕ ἡ διχοτόμος. Εἶναι $\hat{B}+B\hat{A}\Delta=\hat{\Gamma}+\Gamma\hat{A}\Delta=1L$ (1). Ἀλλά $B\hat{A}\Delta=\frac{\hat{A}}{2}-\Delta\hat{A}E$ καί $\Gamma\hat{A}\Delta=\frac{\hat{A}}{2}+\Delta\hat{A}E$, ἄρα ἡ (1) γίνεται $\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}-\Delta\hat{A}E=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}}{2}+\Delta\hat{A}E \Rightarrow \Delta\hat{A}E=\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. Ἐάν $\hat{\Gamma}>\hat{B}$ προκύπτει $\Delta\hat{A}E=\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}$. Ὅθεν $\Delta\hat{A}E=\left|\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right|$.



2. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζομεν ἐξωτερικῶς τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓ'Β, ΑΒ'Γ. Δείξατε ὅτι ΒΒ' = ΓΓ'.

Ἀπόδειξις:

Τά τρίγωνα ΒΑΒ', ΓΑΓ' εἶναι ἴσα διότι: ΑΒ = ΑΓ', ΑΒ' = ΑΓ καί $B\hat{A}B'=\Gamma\hat{A}\Gamma'=60^\circ+\hat{A}$.



3. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω I τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ τά σημεῖα τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων. Δείξατε ὅτι

α) $B\hat{I}\Gamma=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$

β) $B\hat{I}_\alpha\Gamma=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$

γ) $B\hat{I}_\beta\Gamma=B\hat{I}_\gamma\Gamma=\frac{\hat{A}}{2}$

δ) Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ὀρθικόν τρίγωνον τοῦ $I_\alpha I_\beta I_\gamma$.

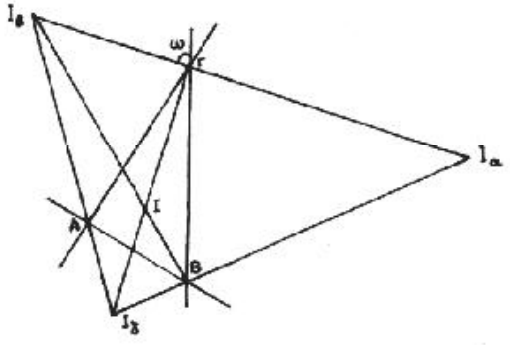
Ἀπόδειξις:

α) $B\hat{I}\Gamma=2^L-\frac{\hat{B}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}=1^L+\frac{\hat{A}}{2}$

β) $B\hat{I}_\alpha\Gamma=2^L-\left\{\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\right)+\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}\right)\right\}=1^L-\frac{\hat{A}}{2}$.

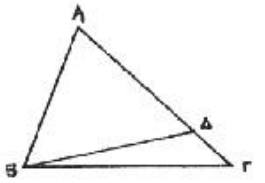
γ) $B\hat{I}_\beta\Gamma=\hat{\omega}-\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}-\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}$

δ) Ἡ διχοτόμος τῆς Â καί



αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{\text{ἐξ}}\hat{B}$, $\hat{\text{ἐξ}}\hat{\Gamma}$ διέρχονται διὰ τοῦ I_α. $I_\beta I_\gamma$ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{\text{ἐξ}}\hat{A}$. Ἄρα $AI_\alpha \perp I_\beta I_\gamma$ κ.τ.λ.

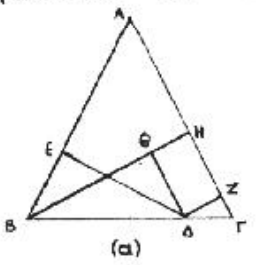
4. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ΑΓ > ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν σημεῖον Δ ὥστε ΑΒ = ΑΔ. Δείξατε ὅτι $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

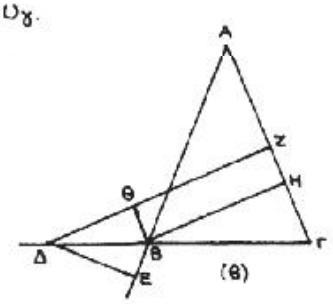


Ἀπόδειξις:

$\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - A\hat{B}\Delta$. Ἀλλὰ $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$. Ὅθεν $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \Delta\hat{B}\Gamma - \hat{\Gamma} \Longrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

5. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ βάσις αὐτοῦ ΒΓ. Ἔστω ΔΕ, ΔΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως. Δείξατε α) ἐὰν Δ ∈ ΒΓ τότε ΔΕ + ΔΖ = $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$ β) ἐὰν τὸ Δ κεῖται εἰς τὴν ἡμιευθείαν τὴν ἀντικειμένην τῆς ἡμιευθείας ΒΓ ΔΖ − ΔΕ = $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.





Ἀπόδειξις:

α) Φέρομεν τὴν ΔΘ κάθετον ἐπὶ τὸ ὕψος ΒΗ. Τὸ ΔΘΗΖ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ΔΖ = ΘΗ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ, ΒΘΔ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \Theta\hat{\Delta}B$. Ἄρα ΒΘ = ΔΕ, συνεπῶς υ_β = ΒΘ + ΘΗ = ΔΕ + ΔΖ.

β) Ἡ λύσις διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, διὰ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΒΘΖΗ καὶ τῶν ἴσων τριγώνων ΔΘΒ, ΔΕΒ.

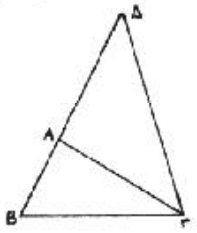
Σημείωσις:

Βασιζόμενοι εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τοῦ ἐσωτερικοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τὰς πλευράς του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ.

6. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΓ > ΑΒ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α) λαμβάνομεν ΑΔ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι $B\hat{\Gamma}\Delta = 1^L - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

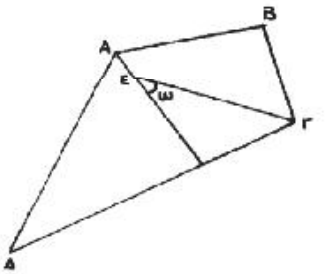
Ἀπόδειξις:

Διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΑΓ ἔχομεν $\hat{A} = 2A\hat{\Gamma}\Delta$, ἤτοι $A\hat{\Gamma}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$. Ἄρα $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 1^L - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.



7. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται καὶ σχηματίζουν ὀξεῖαν γωνίαν $\hat{\omega}$. Δείξατε ὅτι $\hat{\omega} = \left|\frac{\hat{B}-\hat{\Delta}}{2}\right|$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $\hat{B} > \hat{\Delta}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\hat{\omega} = \frac{\hat{B}-\hat{\Delta}}{2}$. Τὸ σημεῖον Ε τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου. Ἡ ἀπόδειξις καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι ἡ αὐτή. Ἔστω τὸ Ε ἐντὸς τοῦ τετραπλεύρου. Ἔχομεν $2^L - \hat{\omega} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Delta} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$
$= \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 2^L - \frac{\hat{B}-\hat{\Delta}}{2}$.
Ἄρα $\hat{\omega} = \frac{\hat{B}-\hat{\Delta}}{2}$.

8. Ἐὰν Ο τυχὸν σημεῖον ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ δείξατε ὅτι $\tau < OA+OB+O\Gamma < 2\tau$.

Ἀπόδειξις:

$B\hat{O}\Gamma \Rightarrow OB+O\Gamma > \alpha$. Ἀλλὰ ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΒΑΓ περικλείει τὴν ὑρζὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΒΟΓ, ἄρα $\beta+\gamma > OB+O\Gamma$. Ἤτοι

$$\beta+\gamma > OB+O\Gamma > \alpha \quad (1)$$

ὁμοίως
$$\gamma+\alpha > O\Gamma+OA > \beta \quad (2)$$
$$\alpha+\beta > OA+OB > \gamma. \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1),(2),(3) ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

9. Ἐὰν υ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ δείξατε ὅτι $OA+OB+O\Gamma \geqslant 2\upsilon$.

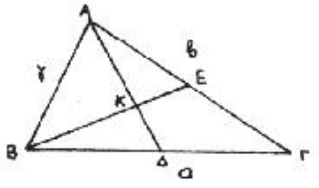
Ἀπόδειξις:

Ἔστω x, y, z αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ ἰσοπλεύρου ἀντιστοίχως. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $x+y+z = \upsilon$ (Ἄσκ. 5 σημείωσις). Ἀλλὰ εἶναι προφανὲς ὅτι $OA+x \geqslant \upsilon$ (1), ὁμοίως $OB+y \geqslant \upsilon$ (2), $O\Gamma+z \geqslant \upsilon$ (3). Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς τρεῖς ἀνισότητας (1),(2),(3) ἔχομεν τὸ ζητούμενον. Πότε ἰσχύει ἡ ἰσότης;

10. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι: α) $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

β) $\tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$ γ) $\frac{3}{2}\tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν ΒΓ καὶ ΓΑ. α) $\left.\begin{array}{l} A\hat{B}\Delta \Rightarrow \gamma < \mu_\alpha + \frac{\alpha}{2} \\ A\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow \beta < \mu_\alpha + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha$

$A\hat{\Delta}E \Rightarrow \mu_\alpha < AE + \Delta E = \frac{\beta+\gamma}{2}$

β) Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν α, β, γ εἰς τὴν

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2} \quad (1)$$

λαμβάνομεν
$$\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2} < \mu_\beta < \frac{\gamma+\alpha}{2} \quad (2)$$

καὶ
$$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \mu_\gamma < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν 1,2,3 ἔχομεν $\tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

γ) $B\hat{K}\Gamma \Rightarrow \frac{3}{2}\alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma$ (4)

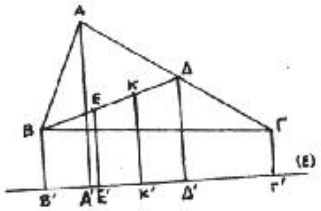
ὁμοίως $\frac{3}{2}\beta < \mu_\gamma + \mu_\alpha$ (5)

$\frac{3}{2}\gamma < \mu_\alpha + \mu_\beta$ (6).

Διά προσθέσεως τῶν (4),(5),(6) ἔχομεν

$\frac{3}{2}\tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.

11. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἀπό εὐθείαν (ε) ἐκτός αὐτοῦ ἰσοῦται πρός τό τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους ἀπό τήν (ε).



Ἀπόδειξις:

Ἔστω Κ τό κέντρον βάρους καί Ε τό μέσον τῆς ΒΚ. Προβάλλομεν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος ἐπί τήν (ε). Θά ἔχωμεν

τραπέζιον $A\Gamma\Gamma'A' \Rightarrow 2\Delta\Delta' = AA' + \Gamma\Gamma'$ (1)

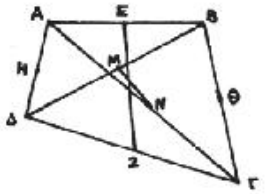
" $E\Delta\Delta'E' \Rightarrow 2KK' = \Delta\Delta' + EE'$ (2).

" $BKK'B' \Rightarrow 2EE' = BB' + KK'$ (3)

$(2) \Rightarrow 4KK' = 2\Delta\Delta' + 2EE'$ (4)

$(1),(3),(4) \Rightarrow 4KK' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + KK' \Rightarrow 3KK' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma'$.

12. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καί ἡ εὐθεία ἡ συνδέουσα τά μέσα τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

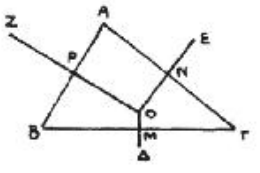


Ἀπόδειξις:

Ε,Μ τά μέσα τῶν ΑΒ, ΔΒ. Ἄρα: $ME \parallel A\Delta$ καί $ME = \frac{A\Delta}{2}$ (1). Ἀκόμη Ζ,Ν τά μέσα τῶν ΑΓ, ΔΓ. Ἄρα: $NZ \parallel A\Delta$ καί $NZ = \frac{A\Delta}{2}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow ME \parallel NZ$ καί $ME = NZ \Rightarrow MENZ$ παραλληλόγραμμον. Ὥστε αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΜΝ καί ΕΖ τέμνονται δίχα. Ὁμοίως (ἀπό τό παραλληλόγραμμον ΗΜΘΝ) ἀποδεικνύεται ὅτι καί ἡ ΗΘ διχοτομεῖ τήν ΜΝ.

13. Ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς τῶν μεσοκαθέτων ἐπί τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ. Ἐάν Δ,Ε,Ζ τά συμμετρικά αὐτοῦ ὡς πρός τάς τρεῖς πλευράς ἀντιστοίχως δείξατε ὅτι $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$.



Ἀπόδειξις:

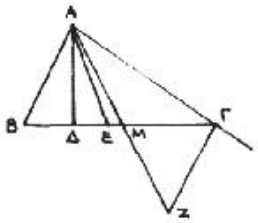
Ἔστω Μ,Ν,Ρ τά μέσα τῶν ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ. Θά εἶναι: $PN \parallel ZE$ καί $PN = \frac{ZE}{2}$ (1). Ἀλλά Ρ καί Ν εἶναι τά μέσα καί τῶν ΑΒ καί ΑΓ, ἄρα $PN \parallel B\Gamma$ καί $PN = \frac{B\Gamma}{2}$ (2). Ἐκ τῶν (1),(2) $\Rightarrow B\Gamma = ZE$. Ὁμοίως $AB = \Delta E$, $\Delta Z = A\Gamma$.

14. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\delta_\alpha \leqslant \mu_\alpha$.

Ἀπόδειξις:

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΕ περιέχεται μεταξύ τοῦ ὕψους ΑΔ καί τῆς διαμέσου ΑΜ. Δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὅτι $\hat{\Gamma} < \hat{B}$. (1)

Θά δείξωμεν ὅτι $B\hat{A}\Delta < B\hat{A}E < B\hat{A}M$ ὅτε τό πρόβλημα ἐτελείωσεν. Εἶναι $\hat{B}+B\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}+\Gamma\hat{A}\Delta = 1^L$ (2). (1),(2) $\Rightarrow B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta \Rightarrow$ $2B\hat{A}\Delta < \Gamma\hat{A}\Delta + B\hat{A}\Delta = 2B\hat{A}E \Rightarrow B\hat{A}\Delta < B\hat{A}E$. Ἀπό τό παραλληλόγραμμον BAΓZ : $B\hat{A}M = A\hat{Z}\Gamma$ καί $\gamma = \Gamma Z$. Ἐκ τῆς (1) $\Rightarrow \gamma < \beta$ ἤ $\Gamma Z < A\Gamma \Rightarrow \Gamma\hat{A}Z < A\hat{Z}\Gamma \Rightarrow A\hat{Z}\Gamma + \Gamma\hat{A}Z = 2B\hat{A}E < 2A\hat{Z}\Gamma \Rightarrow B\hat{A}E < A\hat{Z}\Gamma \Rightarrow B\hat{A}E < B\hat{A}M$.

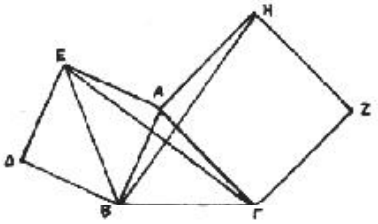


15. Ἐπί τῶν πλευρῶν AB καί AΓ τριγώνου ABΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα ABΔE, AΓZH. Νά δειχθῇ ὅτι BH ⊥ ΓE ∧ BH = ΓE.

Ἀπόδειξις:

$\left.\begin{array}{l} A\Gamma = AH \\ AE = AB \\ B\hat{A}H = E\hat{A}\Gamma = 1^L + \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}H = E\hat{A}\Gamma \Rightarrow BH = \Gamma E.$

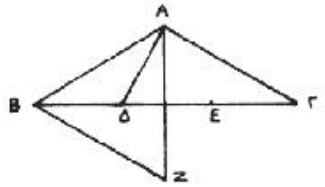
Ἀκόμη $A\hat{B}H = A\hat{E}\Gamma \Rightarrow E\hat{B}H - E\hat{B}A = A\hat{E}B - B\hat{E}\Gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow E\hat{B}H + \Gamma\hat{E}B = 1^L$.



16. Διά τό ἰσοσκελές τρίγωνον BAΓ δίδεται ὅτι $\hat{A} = 120°$. Ἐάν Δ,E σημεῖα τῆς βάσεως καί $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ νά δειχθῇ ὅτι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90°$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Z τό συμμετρικόν τοῦ A ὡς πρός BΓ. Τό τρίγωνον ABZ θά εἶναι ἰσόπλευρον. Τό σημεῖον Δ χωρίζει τήν BM εἰς λόγον $\frac{B\Delta}{BM} = \frac{2}{3}$, ἄρα τό Δ εἶναι τό κέντρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ABZ. Ὅθεν $B\hat{A}\Delta = 30°$.



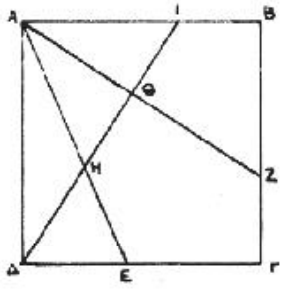
Σημείωσις: Δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν ἁπλῆν λύσιν καί διά τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Κατά ποῖον τρόπον;

17. Ἐπί τῆς πλευρᾶς ΓΔ τετραγώνου ABΓΔ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον E. Ἡ διχοτόμος τῆς $B\hat{A}E$ τέμνει τήν BΓ εἰς Z. Νά δειχθῇ ὅτι $AE = BZ + \Delta E$.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τήν $\Delta\Theta \perp AZ$. Τό τρίγωνον HAI εἶναι ἰσοσκελές διότι ἔχει τήν AΘ ὕψος καί διχοτόμον. $A\hat{H}I = A\hat{I}H \Rightarrow E\hat{\Delta}H = E\hat{H}\Delta \Rightarrow EH = E\Delta$ (1) $I\hat{A}\Delta = Z\hat{B}A$ (2), διότι $A\hat{\Delta}I = B\hat{A}Z$ καί $A\Delta = AB$.

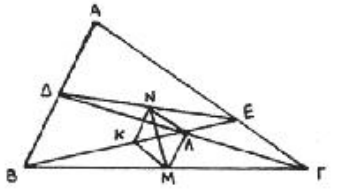
(2) $\Rightarrow AI = BZ$. Τέλος ἐκ τῶν (1), (2) $\Rightarrow AE = \Delta E + BZ$.



ΟΜΑΣ Β'.

18. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ὥστε ΒΔ=ΓΕ. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς ΔΕ δείξατε ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\hat{A}$.

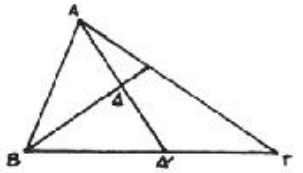
Ἀπόδειξις:



Ἐὰν Κ καὶ Λ τὰ μέσα τῶν ΒΕ καὶ ΓΔ τὸ τετράπλευρον ΚΜΛΝ εἶναι ρόμβος. Ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι διχοτόμος τῆς $\hat{KNL}$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $\hat{BAΓ}$, $\hat{KNL}$ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἤτοι καὶ τὰς διχοτόμους αὐτῶν παραλλήλους.

19. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι τέσσερα σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

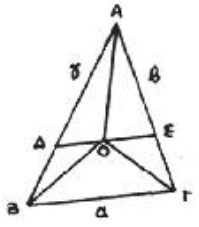
Ἀπόδειξις:



Ἔστω Δ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{B}$ καὶ Δ' τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΔ μετὰ τῆς ΒΓ. Τὸ $A\hat{B}Δ'$ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ἔχει τὴν ΒΔ ὕψος καὶ συγχρόνως διχοτόμον. Ἄρα ΑΔ=ΔΔ', συνεπῶς τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς προβολὰς τοῦ Α ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων διχοτόμων.

20. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $α=\min[α,β,γ]$. Ἐὰν Ο τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ δείξατε ὅτι ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ < Β+Γ.

Ἀπόδειξις:

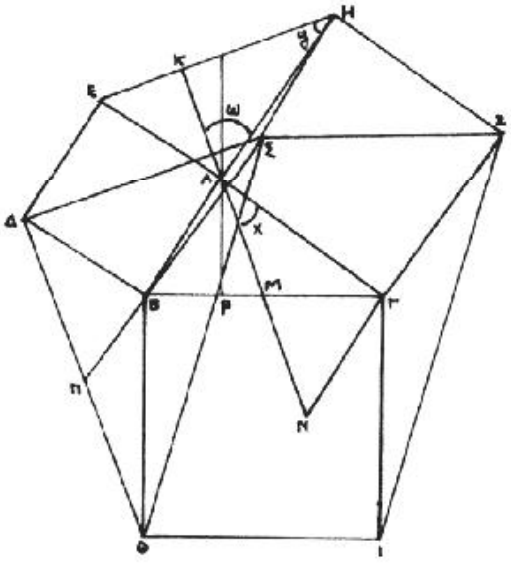


Φέρομεν ἐκ τοῦ Ο τὴν παράλληλον πρὸς τὴν μικροτέραν πλευρὰν ΔΕ ∥ ΒΓ. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι α<β<γ. Θὰ εἶναι καὶ ΔΕ<ΑΕ<ΑΔ (1). Ἀλλὰ τότε $A\hat{Δ}O < A\hat{E}O < A\hat{O}Δ \Rightarrow$ ΟΑ<ΑΔ (2). Ἐκ τῶν (1),(2) ἔχομεν ΔΕ+ΟΑ < ΑΕ+ΑΔ (3). Εἶναι προφανὲς ὅτι ΟΒ+ΟΓ < ΒΔ+ΔΕ+ΕΓ (4). Αἱ (3) καὶ (4) προστιθέμεναι μᾶς δίδουν τὸ ζητούμενον.

21. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΒΓΙΘ, ΓΑΗΖ. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΗ. (β) Φέρομεν τὴν (ΔΣ ∥ ΕΗ) ∧ (ΔΣ = ΕΗ). Νὰ δειχθῇ ὅτι (ΘΣ ∥ ΙΖ) ∧ (ΘΣ = ΙΖ). (γ) Τὸ σημεῖον Β εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\hat{ΔΣΘ}$.

Απόδειξις:

(α) Σχηματίζομεν τό παραλληλόγραμμον ΒΑΓΝ. Θά εἶναι $\hat{EAH} = \hat{N\Gamma A}$ διότι: $AE = AB = \Gamma N$, $AH = A\Gamma$, $\hat{EAH} = \hat{N\Gamma A}$ διότι ἔχουν τάς πλευράς καθέτους. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ἔχομεν $x = y$. Ἀλλά $x + \omega = 1^L \Rightarrow y + \omega = 1^L$. Παρατηρήσατε ὅτι συγχρόνως ἀπεδείχθη ὅτι ἡ εὐθεία $AP = v_a$ διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΗ.



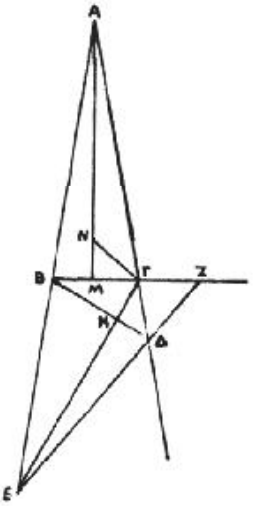
(β) ΔΕΗΣ παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta E \overset{\parallel}{=} H\Sigma$ (1). ΑΒΔΕ τετράγωνον $\Rightarrow$ $\Delta E \overset{\parallel}{=} AB$ (2). (1), (2) $\Rightarrow AB \overset{\parallel}{=} \Sigma H \Rightarrow$ ΑΒΣΗ παραλληλόγραμμον.
(ΑΒΣΗ) Λ (ΑΓΖΗ) $\Rightarrow$ ΒΣΖΓ παραλληλόγραμμον. (ΒΣΖΓ) Λ (ΒΓΙΘ) $\Rightarrow$ ΣΖΙΘ παραλληλόγραμμον.

(γ) $B\Sigma \perp A\Gamma \Rightarrow B\Sigma$ διάμεσος τοῦ $\hat{\Delta\Sigma\Theta}$. Ἀκόμη $2B\Pi = A\Gamma = B\Sigma$, ὅθεν Β τό κέντρον βάρους τοῦ $\hat{\Delta\Sigma\Theta}$.

22. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΒΑΓ μέ γωνίαν κορυφῆς $\hat{A} = 20°$. Διά τοῦ σημείου Β φέρομεν εὐθείαν σχηματίζουσαν μετά τῆς ΒΓ γωνίαν ἴσην πρός 30° καί τέμνουσαν τήν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς Δ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρομεν τήν κάθετον ἐπί τήν ΒΔ ἥτις τέμνει τήν ΑΒ εἰς Ε. Δείξατε ὅτι ἡ ΕΔ σχηματίζει μετά τῆς ΒΓ γωνίαν 50°.

Απόδειξις:

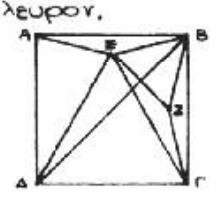
Διά τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΗΒ εἶναι $\hat{\Gamma BH} = 30° \Rightarrow \Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Φέρομεν τό ὕψος ΑΜ καί τήν διχοτόμον ΓΝ τῆς $\hat{\Gamma}$. Εἶναι $\hat{M\Gamma N} = \hat{H\Gamma\Delta} = 40°$, $\Gamma M = \Gamma H$ ἄρα $\hat{\Gamma MN} = \hat{\Gamma H\Delta}$. Ἕνας εὔκολος ὑπολογισμός μᾶς δίδει ὅτι $\hat{\Gamma EA} = \hat{A} = 20°$ $\Rightarrow \Gamma E = \Gamma A$. Ἀκόμη $\hat{A\Gamma N} = \hat{\Delta\Gamma E} = 40°$ καί $\Gamma N = \Gamma\Delta$. Ἄρα καί $\hat{N\Gamma A} = \hat{\Delta\Gamma E}$. Ὅθεν $\hat{\Gamma E\Delta} = \hat{\Gamma AN} = 10°$. Εἰς τό $\hat{Z\Gamma E}$ ἔχομεν $\hat{\Gamma ZE} = 180° - \hat{\Gamma EZ} - \hat{E\Gamma Z} =$ $= 180° - 10° - 120° = 50°$.



23. Εἰς τό ἐσωτερικόν τετραγώνου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τό σημεῖον Ε ὥστε $\hat{EAB} = \hat{EBA} = 15°$. Δείξατε ὅτι τό $\hat{\Delta E\Gamma}$ εἶναι ἰσόπλευρον.

Απόδειξις:

Λαμβάνομεν τό συμμετρικόν τοῦ Ε πρός ΒΔ. Τά τρίγωνα ΑΕΒ, ΓΖΒ εἶναι συμμετρικά πρός ΒΔ ἤτοι ἴσα. Εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΕΒΖ εἶναι $\hat{EBZ} = 60°$. Ἄρα $\hat{EBZ}$ ἰσόπλευρον. $\hat{BZ\Gamma} = \hat{AEB} =$



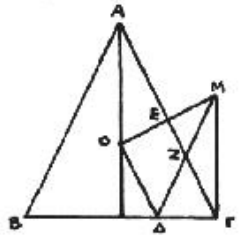
$=150°$, ὅθεν $E\hat{Z}\Gamma = 360° - 150° - 60° = 150°$, ἄρα καὶ $B\hat{Z}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$.

Σημείωσις: Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἁπλῆν λύσιν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Πῶς; Διὰ μίαν ἀκόμη εὐθείαν λύσιν φέρατε $ED \perp AB$, $E\hat{A}O = 60°$.

24. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μεσοκαθέτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ καὶ Μ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $M\hat{O}\Delta = 1^L$.

Ἀπόδειξις:

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $O\Delta \parallel A\Gamma$ ἢ ὅτι Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΜ. Τὸ τετράπλευρον ΟΑΜΓ εἶναι ρόμβος διότι αἱ διαγώνιοι του τέμνονται δίχα καὶ καθέτως. Ἄρα $M\Gamma \parallel AO$ ἤτοι $M\hat{\Gamma}\Delta = 1^L$. Ἀλλά $Z\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow Z\Delta = Z\Gamma$ $\hat{\Gamma} + Z\hat{\Gamma}M = Z\hat{\Delta}\Gamma + Z\hat{M}\Gamma = 1^L \Rightarrow Z\hat{\Gamma}M = Z\hat{M}\Gamma \Rightarrow ZM = Z\Gamma$.



25. Παρατηρήσατε ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν τὰς διαγωνίους τὰς μὴ τεμνομένας εἰς τὸ ἐσωτερικὸν πολυγώνου κατὰ διαφόρους τρόπους. Ἀποδείξατε ὅμως ὅτι πάντοτε τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶν διαγωνίων εἶναι τὸ ἴδιο.

Ἀπόδειξις:

Τὸ σχῆμα δείχνει δύο τρόπους μὲ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὰς διαγωνίους τὰς μὴ τεμνομένας εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.

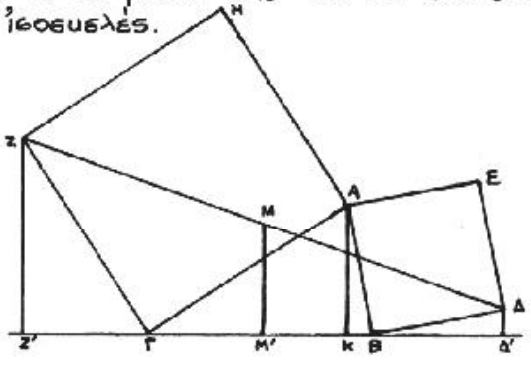


Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι πάντοτε τὸ πλῆθος των εἶναι τὸ ἴδιο. Ἐὰν εἰς ἓν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς φέρωμεν τὰς διαγωνίους τὰς μὴ τεμνομένας εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σχηματίζονται $\frac{2\nu-4}{2} = \nu-2$ τρίγωνα. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῶν ἐν λόγῳ τριγώνων εἶναι $3(\nu-2)$. Ἐὰν ἀφαιρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ πλευραὶ τῶν τριγώνων θὰ μείνῃ τὸ διπλάσιον πλῆθος τῶν διαγωνίων, ἤτοι διαγώνιοι μὴ τεμνόμεναι ἐσωτερικῶς $[3(\nu-2)-\nu] : 2 = \nu-3$.

26. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΔΖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $B\hat{M}\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΚ καὶ προβάλλομεν τὰ Δ, Μ, Ζ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἀπὸ τὸ τραπέζιον $\Delta Z Z'\Delta' \Rightarrow$ $\Rightarrow MM' = \frac{\Delta\Delta' + ZZ'}{2}$ (1). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\Gamma Z'Z$, $AK\Gamma$ εἶναι ἴσα διότι $\Gamma Z = A\Gamma$ καὶ $Z\hat{\Gamma}Z' = \Gamma\hat{A}K$ διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους. Ἄρα $\Gamma Z' = AK \wedge K\Gamma = ZZ'$ (2).

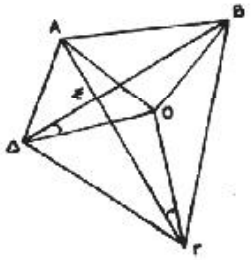


Ὁμοίως $B\Delta' = AK \wedge BK = \Delta\Delta'$ (3). Τὸ σημεῖον M' εἶναι προφανῶς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $\Delta'Z'$, ἀπό τάς (2),(3) προκύπτει ὅτι τὸ M' θά εἶναι μέσον καί τῆς $B\Gamma$. Ἀκόμη (1),(2),(3) $\Rightarrow MM' = \frac{BK+K\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$. Ἄ-ρα...

Τό ἴδιο πρόβλημα μπορεῖ νά διατυπωθῆ καί ὡς ἑξῆς: Ἐπί τῶν πλευ-ρῶν τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα $ABEZ$, $B\Gamma H\Theta$, $\Gamma\Delta IK$, $A\Delta\Lambda M$. Ἐάν N, N' τά μέσα τῶν ZH, KM ἀντιστοίχως δείξατε ὅτι τό τετράπλευρον $AN'\Gamma N$ εἶναι τετράγωνον.

27. Ἐπί τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζομεν τά πρός τό ἐσωτερικόν τοῦ τετραπλεύρου τετράγωνα $ABEZ$, $B\Gamma H\Theta$, $\Gamma\Delta IK$, $\Delta A\Lambda M$. Δείξατε ὅτι ἄν τά κέντρα τῶν $ABEZ$, $\Gamma\Delta IK$ συμπίπτουν α) αἱ διαγώνια τοῦ $AB\Gamma\Delta$ θά εἶναι κάθετοι καί ἴσαι β) τά κέντρα τῶν $B\Gamma H\Theta$, $\Delta A\Lambda M$ θά συμπί-πτουν ἐπίσης.

Ἀπόδειξις:



α) Ἔστω O τό κέντρον τῶν $ABEZ$, $\Gamma\Delta IK$. Τά $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ εἶναι ὀρθογώνια καί ἰσοσκελῆ.

$$\left.\begin{array}{l} AO = BO \\ \Gamma O = \Delta O \\ A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta = 1^L + A\hat{O}\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AO\Gamma} = \overset{\Delta}{BO\Delta} \quad (1)$$

$(1) \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$, $(1) \Rightarrow B\hat{\Delta}O = A\hat{\Gamma}O \Rightarrow B\hat{\Delta}\Gamma - 45^\circ = 45^\circ - A\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow B\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$.

β) Ἀρκεῖ νά δείξωμεν τό ἀντίστροφον τοῦ α). Ἤτοι:

$$(A\Gamma \perp B\Delta) \wedge (\Gamma O \perp \Delta O) \Rightarrow AO \perp BO.$$

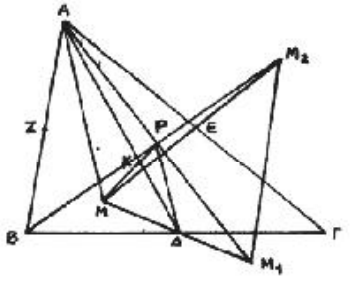
$$\left.\begin{array}{l} A\Gamma = B\Delta \\ \Gamma O = \Delta O \\ A\hat{\Gamma}O = B\hat{\Delta}O \text{ (πλευράς καθέτους)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AO\Gamma} = \overset{\Delta}{BO\Delta} \quad (2)$$

$(2) \Rightarrow AO = BO$ $(2) \Rightarrow \Gamma\hat{A}O = \Delta\hat{B}O \Rightarrow \Gamma\hat{A}B - O\hat{A}B = O\hat{B}A - A\hat{B}\Delta \Rightarrow O\hat{A}B + O\hat{B}A = 90^\circ$.

Σημείωσις: Ἡ καθετότης τῶν $A\Gamma$, $B\Delta$ δύναται νά προκύψῃ καί ἀπό τό ἐγγράψιμον $\Gamma OZ\Delta$.

28. Ἔστω M τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου $AB\Gamma$ καί M_1, M_2, M_3 τά συμμετρικά αὐτοῦ ὡς πρός τά μέσα Δ, E καί Z τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA, AB αὐτοῦ. Νά δειχθῆ α) ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AM_1, BM_2, \Gamma M_3$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου P καί β) ἡ εὐθεία PM διέρχεται διά τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἀπόδειξις:



α) $\overset{\Delta}{M_1MM_2} \Rightarrow M_1M_2 = 2\Delta E \wedge M_1M_2 \parallel \Delta E$ (1)

$\overset{\Delta}{AB\Gamma} \Rightarrow AB = 2\Delta E \wedge AB \parallel \Delta E$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow ABM_1M_2$ παραλληλόγραμμον. Ἄρα αἱ AM_1, BM_2 διχοτομοῦνται. Ὁμοίως καί ἡ ΓM_3 διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς BM_2.

β) Τά τρίγωνα $AB\Gamma$ καί AMM_1 ἔχουν κοινόν κέντρον βάρους.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

29. Δίδεται ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ ΟΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΟΔ ἡ δὲ ΟΒ διχοτόμος τῆς ΕΟΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ΓΟΕ καὶ ΔΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί.

30. Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐὰν ΑΔ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ καὶ ΒΓ ἡ μικροτέρα νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(A\hat{B}\Gamma > A\hat{\Delta}\Gamma) \wedge (B\hat{\Gamma}\Delta > B\hat{A}\Delta)$.

31. Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ καὶ τὰς ἐκ τῶν κορυφῶν A, A' διαμέσους ἴσας θὰ εἶναι ἴσα.

32. Διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ': $(\alpha=\alpha') \wedge (\gamma=\gamma') \wedge (\Gamma=\Gamma') \Rightarrow \beta=\beta'$ ἢ $\beta+\beta'=2^L$. Τί παρατηρεῖτε ἐὰν $\beta, \beta' \geqslant 1^L$;

33. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἔστω Δ, Ε, Ζ σημεῖα τῶν πλευρῶν ὥστε $B\Delta = \Gamma E = AZ$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρον.

34. Ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα των ταυτίζονται. Τὸ αὐτὸ διὰ τετράγωνα.

35. Διὰ τοῦ σημείου Ι τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

36. Ἰσοπλεύρου τριγώνου προεκτείνονται αἱ πλευραὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκόμη ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

37. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι Ι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων, Δ τὸ ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ΙΕ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $B\hat{I}\Delta = \Gamma\hat{I}E$.

38. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἄγεται ἡ $\Delta E \parallel AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΕ εἶναι παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

39. Διά τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἄγεται εὐθεία xAy μή τέμνουσα τούτο. Ἐάν ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν ἀπό τήν xy νά δειχθῇ ὅτι ΓΓ′ = ΒΒ′ + ΔΔ′.

40. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τέμνονται εἰς σημεῖα, τά ὁποῖα εἶναι κορυφαί ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλοι πρός τάς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου καί ἴσαι ἐμάστη πρός τήν διαφοράν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

41. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγεται ἡ διχοτόμος ΑΔ καί ἐν τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ εὐθεία παράλληλος πρός αὐτήν τέμνουσα τάς ΑΒ καί ΑΓ εἰς τά σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι ΒΕ = ΓΖ.

42. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Κατασκευάζομεν τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΓΖ. Τό πρῶτον ἐντός τοῦ τετραγώνου, τό δεύτερον ἐκτός. Νά δειχθῇ ὅτι τά σημεῖα Β, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

43. Ἐάν ΓΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{\Gamma}$ ὀρθογωνίου τριγώνου $B\hat{A}\Gamma$ ($\hat{A} = 1^L$) νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΔΑ < ΔΒ.

44. Ἐάν ἐξ ἑνός σημείου Δ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τάς παραλλήλους ΔΕ καί ΔΖ πρός τάς πλευράς αὐτοῦ νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμά των περιέχεται μεταξύ τῶν ΑΒ καί ΑΓ.

45. Εἰς πᾶν κυρτόν πολύγωνον $A_1A_2 \cdots A_v$ ($v \geq 4$) μία οἱαδήποτε γωνία του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων. Διά τό ἴδιο πολύγωνον δείξατε ὅτι $\min[\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_v] \leq \left(\frac{2v-4}{v}\right)^L$ καί $\max[\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_v] \geq \left(\frac{2v-4}{v}\right)^L$.

46. Ἄν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $\hat{A} = 60°$ καί ΒΒ′, ΓΓ′ αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι $B\hat{B}'\Gamma = \Gamma\hat{\Gamma}'A$.

47. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ εἶναι παράλληλοι. Δείξατε ὅτι $\hat{B} = \hat{\Delta}$. Ἐάν συμβῇ συχρόνως καί αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{B}, \hat{\Delta}$ νά εἶναι παράλληλοι τί συμπεραίνετε διά τό τετράπλευρο;

48. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ δίδεται ὅτι ΑΒ = 2ΒΓ. Φέρομεν τήν ΑΕ ⊥ ΒΓ. Ἐάν Ζ τό μέσον τῆς ΔΓ δείξατε ὅτι $A\hat{Z}E = 3Z\hat{E}\Gamma$.

49. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καί (ε′). Ἐκ σημείου Α τῆς (ε) ἄγεται ἡ κάθετος ΑΓ ἐπί τήν (ε′) καί ἡ ΑΒ πλαγία πρός αὐτήν. Ἐάν εὐθεία διά τοῦ σημείου Β τέμνῃ τήν ΑΓ εἰς τό σημεῖον Ε καί τήν (ε) εἰς τό σημεῖον Δ καί εἶναι ΕΔ = 2ΑΒ νά δειχθῇ ὅτι $A\hat{B}\Gamma = 3E\hat{B}\Gamma$.

50. Ἀπὸ τὸν πόδα Δ τοῦ ὕψους ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) φέρομεν τὰς ΔΕ καὶ ΔΖ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΜ.

51. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ ἐπιέης τετραγώνου.

52. Παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕτερον παραλληλόγραμμον. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα των ταυτίζονται. Τὸ ἴδιο πρόβλημα δι' ἰσόπλευρα τρίγωνα.

53. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι $AB=2B\Gamma$ καὶ Ε τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Δείξατε ὅτι $A\hat{E}B=1^L$.

54. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ, Ε ὥστε $A\Delta=\Gamma E$. Φέρομεν $\Gamma Z \parallel E\Delta$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΖ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α.

55. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν ΒΓ, ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Delta\hat{Z}E=|\hat{B}-\hat{\Gamma}|$.

56. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν ΔΕ καὶ ΒΖ.

57. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέσου ΑΜ. Εἰς τὸ Δ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ ἥτις τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ ΑΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΕΖ.

58. Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 15°. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ὑποτεινούσης.

59. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 7°30'. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ποδὸς τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀπὸ τῆς διαμέσου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὄγδοον τῆς ὑποτεινούσης.

60. Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ ἡ ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ. Ἐὰν Ε τὸ μέσον τῆς ΑΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B\hat{E}\Gamma=1^L$.

61. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ ἡ διχοτόμος καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Φέρομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΖ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΔ. Νὰ δειχθῇ α) τὸ $E\hat{M}Z$ ἰσοσκελές β) $E\hat{M}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

62. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ. Ἡ κάθετος εἰς Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ τέμνει τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ εἰς Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Delta E + \Delta Z = 2\upsilon_\alpha$. Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ τί παρατηρεῖτε;

63. Ἂν αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τραπεζίου εἶναι κάθετοι τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

64. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΒ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΓΔ καὶ ΒΔ.

65. Εἰς τὰ μέσα Ζ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται καθέτως ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΖΝ καὶ ΕΜ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΔΝ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

66. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνονται τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ πρὸς τὰς κορυφὰς Β, Γ κατὰ τμήματα ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον Β′ΑΓ′ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

67. Ἐὰν ἐκτὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς ἀποστάσεώς του ἐκ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου.

68. Διὰ σημείου Ο ἄγονται ἡμιευθεῖαι Ox, Oy, Oz ὥστε $x\hat{O}y = y\hat{O}z = 60°$. Ἐὰν Ρ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας $x\hat{O}y$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τῆς εὐθείας Oz ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἐκ τῶν εὐθειῶν Ox, Oy.

69. Αἱ προβολαὶ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ἐπὶ τῶν ἐκ τοῦ Β καὶ Γ ὑψῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

70. Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἂν Ε καὶ Ζ αἱ προβολαὶ τῶν Α, Γ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ νὰ δειχθῇ ὅτι $EM \perp ZN$.

71. Ἐάν εἰς τρίγωνον $υ_α = 3ρ$ τότε ἡ εὐθεία ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μέ τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου εἶναι παράλληλος πρός τήν βάσιν ΒΓ.

72. Ἐπί τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέσου πρός τήν ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΜΔ = ΑΜ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τήν κάθετον ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ ἡ ὁποία τέμνει τάς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καί Γ εἰς τά Ε καί Ζ. Νά δειχθῇ ὅτι: ΔΕ = ΑΓ καί ΔΖ = ΑΒ.

73. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\hat{A} = 45°$. Ἐάν Μ τό μέσον τῆς ΒΓ καί ΒΔ, ΓΕ τά ὕψη νά δειχθῇ ὅτι $Δ\hat{M}E = 1^L$.

74. Ἐντός τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΕΓ. Ἐάν $Z = AE \cap BΔ$ δείξατε ὅτι ἡ ΓΖ διχοτομεῖ τήν $Δ\hat{Γ}E$.

75. Εἰς ἰσοσκελές τρίγωνον ΒΑΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρομεν τό ὕψος ΒΔ καί ἐπί τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ λαμβάνομεν σημεῖον Ε ὥστε $AE = \frac{ΓΔ}{2}$. Ἐάν Μ τό μέσον τῆς ΒΔ νά δειχθῇ ὅτι $ΓM \perp BE$.

76. Ἄν ΒΑΓ ἰσοσκελές τρίγωνον (ΑΒ = ΑΓ)

$$AB \gtreqless BΓ \iff \begin{cases} \hat{A} < 60° \\ \hat{A} = 60° \\ \hat{A} > 60°. \end{cases}$$

77. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ κατασκευάζονται ἐκτός τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τά τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Ἐάν Ι, Κ τά κέντρα αὐτῶν καί Μ τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον $IM̂K$ εἶναι ὀρθογώνιον καί ἰσοσκελές.

78. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΒΓ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς Ο καί τέμνουν ἀντιστοίχως τάς ΒΓ καί ΑΒ εἰς Ζ καί Η. Ἐάν Θ ἡ τετάρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΖΘ νά δειχθῇ ὅτι $OΘ \perp AΓ$.

79. Δίδεται τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καί M_1, M_2, M_3 τά μέσα τῶν πλευρῶν H_1, H_2, H_3 οἱ πόδες τῶν ὑψῶν (M_i, H_i ἐναντι κορυφῆς A_i). Νά δειχθῇ ὅτι $M_1H_2 + M_2H_3 + M_3H_1 = M_2H_1 + M_3H_2 + M_1H_3$.

80. Ἀπό τάς κορυφάς Β καί Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν παραλλήλους πρός τάς πλευράς ΑΔ καί ΑΒ τεμνομένας εἰς τό Ζ καί πρός τάς ΔΓ καί ΒΓ τεμνομένας εἰς τό Ε. Ἄν Ο τό κοινόν σημεῖον τῶν ΑΖ καί ΕΓ καί προεκτείνομεν τήν ΑΖ κατά $ZZ' = AO$ καί τήν ΓΕ κατά $EE' = OΓ$, ἀπό τά σημεῖα δέ Ε' καί Ζ' φέρομεν παραλλήλους πρός τάς ΑΖ καί ΓΕ ἀντιστοίχως τεμνομένας εἰς Θ, νά δειχθῇ ὅτι τό Ο εἶναι τό μέσον τῆς

ΒΔ, ὅτι ἡ ΘΟ διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς ΑΓ καί ὅτι ΘΟ = 4 ΟΙ, ὅπου Ι τό μέσον τῆς ΑΓ.

ΟΜΑΣ Β'.

81. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΑΓΗΘ. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ΓΕ καί ΒΗ τέμνονται ἐπί τοῦ ὕψους ΑΚ.

82. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΒΑΓ μέ γωνίαν κορυφῆς $\hat{A} = 20^\circ$. Ἐπί τῶν ΑΓ καί ΑΒ λαμβάνομεν τά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως ὥστε $\Gamma\hat{B}\Delta = 60^\circ$ καί $B\hat{\Gamma}E = 50^\circ$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $B\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

83. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Μ τυχόν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καί Ν τυχόν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Δεῖξατε α) $|BM-\Gamma M| < |AB-A\Gamma|$ β) $BN+\Gamma N > AB+A\Gamma$.

84. Ἄν εἰς τρίγωνον αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του εἶναι ἴσαι τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Συνδέσατε τήν ἀνωτέρω πρότασιν μέ τήν:

Ἄν εἰς τρίγωνον αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του εἶναι ἄνισοι αἱ ἀντίστοιχοι πλευραί θά εἶναι ἐπίσης ἄνισοι.

85. Νά δειχθῇ ὅτι δύο πολύγωνα μέ διάφορον ἀριθμόν πλευρῶν δέν δύνανται νά ἔχουν τό αὐτό πλῆθος διαγωνίων.

Ἀκόμη ἐάν Σ εἶναι τό γεωμετρικόν ἄθροισμα τῶν διαγωνίων πολυγώνου καί 2Τ ἡ περίμετρος $\Sigma < \nu(\nu-3)T$, ὅπου ν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν.

86. Ἐάν ὑπάρχουν τιμαί ἀκέραιαι καί θετικαί τοῦ ν μεγαλύτεραι τοῦ 2, διά τάς ὁποίας νά εἶναι $8\nu^2-24\nu+9 = \kappa^2$, ἔνθα κ ἀκέραιος θετικός ἀριθμός τοιοῦτος ὥστε τό $\frac{\kappa+3}{2}$ νά εἶναι ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 2, νά δειχθῇ ὅτι τότε ὑπάρχει πολύγωνον ἔχον πλῆθος διαγωνίων ἴσον πρός τό ἥμισυ τοῦ πλήθους τῶν διαγωνίων ἄλλου πολυγώνου.

87. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τοῦ ὕψους ΑΗ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἄγεται παράλληλος πρός τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τέμνουσα τήν ΑΒ εἰς Ε καί κάθετος εἰς τό σημεῖον Δ ἐπί τήν ΔΓ τέμνουσα τήν ἡμιευθείαν ΒΑ εἰς τό Θ. Νά δειχθῇ ὅτι ΒΕ = ΑΘ.

88. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου ἀπό εὐθείας μή τεμνούσης αὐτό, ἰσοῦται πρός τήν τετραπλασίαν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τά ὁποῖα

συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἀπὸ τὴν ἐν λόγῳ εὐθείαν.

89. Ἀπὸ σημεῖον Μ ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Δ′, Ε′, Ζ′ τὰ συμμετρικὰ τῶν Δ, Ε, Ζ ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ Δ′, Ε′, Ζ′ ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

90. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ. Δείξατε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ κέντρα τῶν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κατασκευασθέντων τετραγώνων εἶναι ἴσα καὶ κάθετα.

Ὑπόδειξις: Ἐὰν Ο, Σ, Τ, Ρ τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων ἀντιστοίχως καὶ Π τὸ μέσον τῆς ΑΓ, συγκρίνατε τὰ τρίγωνα ΟΠΤ, ΡΠΣ.

91. Ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι **πλευρῶν** ΑΒ καὶ ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΔΖ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραπλεύρου. Ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΗ, ΔΑΘ πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τετραπλεύρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ΕΗΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΥΚΛΟΣ. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ, ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

2.1. Θεωροῦμεν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου σημεῖον Ο καί ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα R.

2.1.1. **Ὁρισμοί:** Ὀνομάζομεν **κύκλον** τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐκ τοῦ Ο ἀποστάσεις μικροτέρας ἤ τό πολύ ἴσας πρός R.

Τό σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον** τοῦ κύκλου καί τό εὐθύγραμμον τμῆμα R **ἀκτίς** αὐτοῦ.

Συμβολισμός: Ὁ κύκλος κέντρου Ο καί ἀκτῖνος R συνήθως συμβολίζεται (Ο,R).

Ὅθεν $(O,R) = \{M / OM \leqslant R\}$.

Ἐνίοτε συμβολίζομεν τόν κύκλον μέ ἕν γράμμα, λέγομεν π.χ. ὁ κύκλος Γ ἤ ἀκόμα μέ τό γράμμα μέ τό ὁποῖον παριστάνομεν τό κέντρον του, ὁ κύκλος (Ο) κ.τ.λ.

Περιφέρεια τοῦ κύκλου (Ο,R) εἶναι τό σύνολον $\Gamma = \{M / OM = R\}$.

Ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο,R) εἶναι τό $\{M / OM < R\}$.

Ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου (Ο,R) εἶναι τό $\{M / OM > R\}$.

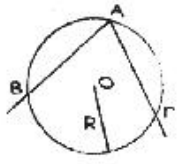
Ἔστω $\{A,B\} \in \Gamma$. Τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ θά ὀνομάζεται **χορδή** τοῦ κύκλου (Ο,R).

Τά σημεῖα Α,Β χωρίζουν τήν περιφέρειαν εἰς δύο τμήματα τά ὁποῖα ὀνομάζονται **τόξα**. Ἐάν τά τόξα εἶναι ἄνισα θά συμβολίζωνται $\overset{\frown}{AB}$ καί μεγαλύτερον $\overset{\frown}{AB}$. Ἐάν εἶναι ἴσα θά ὀνομάζωμεν ἕκαστον **ἡμιπεριφέρειαν**.

Ἑκάστη χορδή διερχομένη διά τοῦ κέντρου χωρίζει τόν κύκλον καί τήν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη καί ὀνομάζεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου.

Ἐπίκεντρος ὀνομάζεται κάθε γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφή ταυτίζεται μέ τό κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνίαν ὀνομάζομεν κάθε γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφή κεῖται ἐπί τῆς περιφερείας αὐτοῦ καί αἱ πλευραί της τέμνουν τήν περιφέρειαν, π.χ. ἡ $\widehat{BA\Gamma}$.



Λέγομεν ὅτι ἡ $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τόν κύκλον (Ο,R). Ἤ ἀκόμη ὅτι εἶναι

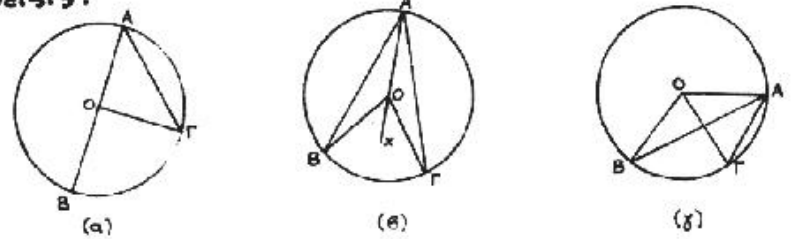
ἐγγεγραμμένη εἰς τό τόξον $\overset{\frown}{BA\Gamma}$. Ἡ ἡ ἐγγεγραμμένη $\hat{BA\Gamma}$ βαίνει εἰς τό τόξον ΒΓ.

2.1.2. **Θεώρημα:** Εἰς τόν αὐτόν κύκλον ἤ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα ἐπίκεντρους γωνίας ἀντιστοίχων ἴσα τόξα καί ἴσαι χορδαί.

Ἀντιστρόφως: Εἰς τόν αὐτόν κύκλον ἤ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα ἤ εἰς ἴσας χορδάς ἀντιστοίχων ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

2.1.3. **Θεώρημα:** Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον (O,R) ἡ ὁποία βαίνει εἰς τόξον ΒΓ εἶναι τό ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου $\hat{BO\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:



Αἱ δυναταί περιπτώσεις φαίνονται εἰς τά σχήματα (α),(β),(γ).

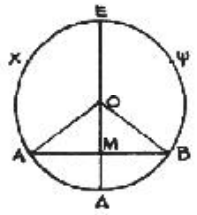
(α) Τό τρίγωνον ΑΟΓ εἶναι ἰσοσκελές ἄρα $\frac{1}{2}\hat{BO\Gamma} = \hat{BA\Gamma}$.

(β) Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΑΟΓ ἔχομεν $\frac{1}{2}\hat{xOB} = \hat{OAB}$ (1), $\frac{1}{2}\hat{xO\Gamma} = \hat{OA\Gamma}$ (2). Προσθέτομεν τάς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη ὅτε $\frac{1}{2}\hat{BO\Gamma} = \hat{BA\Gamma}$

(γ) $\frac{1}{2}\hat{BO\Gamma} = \frac{1}{2}(\hat{BOA} - \hat{\Gamma OA}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\hat{OAB} - 180^\circ + 2\hat{OA\Gamma}) = \hat{BA\Gamma}$.

2.1.4. **Θεώρημα:** Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπί τυχούσαν χορδήν κύκλου διέρχεται διά τοῦ μέσου αὐτῆς καί διχοτομεῖ τά ἀντίστοιχα δύο τόξα τά ὁποῖα ὁρίζει ἡ χορδή ἐπί τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις:



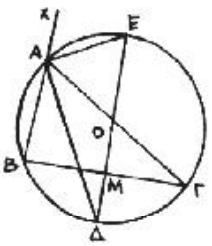
Τό τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές ἄρα τό ὕψος του ΟΜ εἶναι καί μεσοκάθετος ἐπί τήν πλευράν του ΑΒ.

Ἐπίσης $\hat{AO\Delta} = \hat{BO\Delta} \iff \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Delta}$.

Ὁμοίως $\hat{AOE} = \hat{BO\Xi} \iff \overset{\frown}{AXE} = \overset{\frown}{B\Psi E}$.

2.1.5. **Θεώρημα:** Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καί ἐξ $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον Ο διέρχονται διά τῶν μέσων τῶν δύο τόξων ΒΓ.

Ἀπόδειξις:

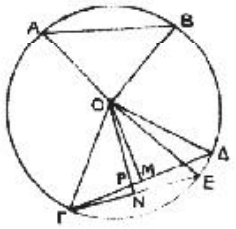


Ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$. Ἐπειδή $\hat{BA\Delta} = \hat{\Gamma A\Delta}$ ἕπεται ὅτι $\overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἡ ΟΔ διέρχεται διά τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου $\overset{\frown}{BA\Gamma}$. Ὡς γνωστόν $\hat{\Delta AE} = 1^L$ (διότι $\hat{\Delta AE} = \frac{1}{2}\hat{\Delta OE} = \frac{1}{2}2^L = 1^L$). Θά ἔχωμεν $\hat{\Delta A\Gamma} + \hat{\Gamma AE} = 1^L$ καί $\hat{BA\Delta} + \hat{EAx} = 1^L$ ἄρα $\hat{\Gamma AE} = \hat{EAx}$.

2.1.6. **Θεώρημα:** 1) Ἄν δύο χορδαί κύκλου εἶναι ἴσαι καί αἱ ἀποστάσεις των ἀπό τό κέντρον θά εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

2) Ἂν δύο χορδαὶ κύκλου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπίσης ἄνισοι. Ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μικροτέρα χορδήν.

Ἀπόδειξις:



Διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἂν $AB = \Gamma\Delta$, ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων $AOB, \Gamma O\Delta$. Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔστω $\Gamma\Delta > AB$. Ἐπειδὴ ὅτι $\hat{\Gamma O\Delta} > \hat{AOB}$. Σχηματίζω $\hat{\Gamma OE} = \hat{AOB}$ καὶ $E \in \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Θὰ εἶναι $AB = \Gamma E$ καὶ συνεπῶς αἱ ἀποστάσεις τῶν AB καὶ ΓΕ ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι. Ἡ κάθετος ὅμως ἐκ τοῦ O ἐπὶ τὴν ΓΕ τέμνει τὴν $\Gamma\Delta$ κ.τ.λ.

Ἰσχύουν τὰ ἀντίστροφα καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις.

2.2. Εὐθεῖα καὶ κύκλος.

2.2.1. Ὁρισμός: Δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ κύκλου (O,R) λέγομεν ὅτι ἡ (ε) εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ὅταν ἔχῃ μετὰ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἓν καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον.

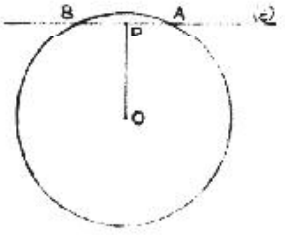
2.2.2. **Θεώρημα:** Ἐὰν Α τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας κύκλου (O,R) ἡ κάθετος εὐθεῖα (ε) εἰς τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις:

Τὸ σημεῖον Α εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶχεν καὶ ἕτερον κοινὸν σημεῖον Β μετὰ τῆς περιφερείας, ἡ ΟΒ θὰ ἦτο πλαγία πρὸς τὴν (ε), ὅτε $OB > OA = R$, ὅπερ ἄτοπον.

2.2.3. **Θεώρημα:** Κάθε ἐφαπτομένη κύκλου (O,R) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α.

Ἀπόδειξις:



Ὑποθέτομεν τὸ ἀντίθετον. Τότε θὰ ὑπῆρχεν ἡ $OP \perp (\varepsilon)$ $(P \neq A)$. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Β ὥστε $AP = BP$ καὶ κατὰ τὴν διάταξιν Α-Ρ-Β. Τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ $OA = OB$. Ἀλλὰ τότε $OB = R$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ (ε) ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου $A \neq B$, ὅπερ ἄτοπον, ὅθεν $P \equiv A$.

Ἀποδεικνύεται ἀκόμη τὸ ἑξῆς βασικόν

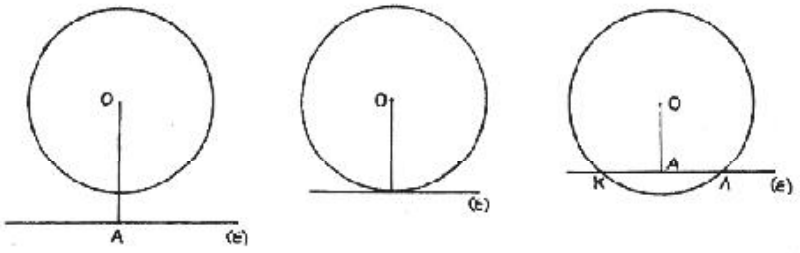
Θεώρημα: Ἐὰν εὐθεῖα (ε) ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου ἡ εὐθεῖα θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἀκριβῶς σημεῖα.[1]

Συνοψίζομεν ὡς κάτωθι:

Ἔστω κύκλος (O,R) καὶ εὐθεῖα (ε), ΟΑ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τὴν (ε).

---

(1) Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἴδε εἰς παράρτημα.



(α) (β) (γ)

(α) $OA > R$. Εὐθεία (ε) καὶ κύκλος δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα. Ἀντιστρόφως.

(β) $OA = R$. Εὐθεία (ε) ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς Α. Ἀντιστρόφως.

(γ) $OA < R$. Εὐθεία (ε) τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο ἀκριβῶς σημεῖα. Ἀντιστρόφως.

2.2.4. **Θεώρημα:** Ἀπὸ σημείου Α ἐκτὸς κύκλου (O, R) ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ κύκλου.

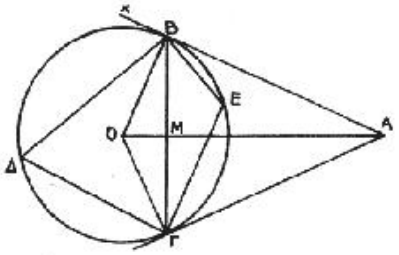
I. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

II. $B\hat{A}O = \Gamma\hat{A}O$.

III. ΑΟ μεσοκάθετος ἐπὶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ.

Ἀπόδειξις:

Τὰ τρίγωνα ΟΒΑ καὶ ΟΓΑ εἶναι ἴσα. Συνεπῶς $AB = A\Gamma$ καὶ $B\hat{A}O = \Gamma\hat{A}O$. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ ἡ ΟΑ ὡς διχοτόμος εἶναι μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.



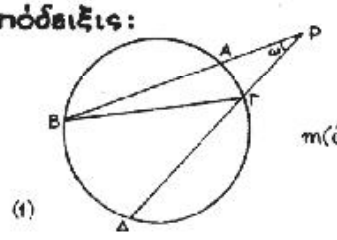
2.2.5. **Θεώρημα:** Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς ΒΓ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Ἤτοι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$, $x\hat{B}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$.

Ἀπόδειξις:

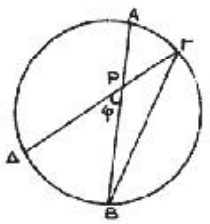
Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΒΟΜ εἶναι ἴσαι διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀνὰ μία καθέτους. Ἀλλὰ $B\hat{O}M = \frac{1}{2} B\hat{O}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$.

2.2.6. **Θεώρημα:** Ἔστω ΑΒ καὶ ΓΔ δύο τεμνόμεναι εἰς Ρ χορδαὶ κύκλου. Ι. Ἐὰν Ρ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν τόξων τοῦ κύκλου τῶν περιεχομένων ἐντὸς τῆς ω. ΙΙ. Ἐὰν Ρ ἐντὸς τοῦ κύκλου τὸ μέτρον τῆς γωνίας φ τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν γωνίαν φ καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

Ἀπόδειξις:



(1) $m(\hat{\omega}) = \frac{m(B\Delta) - m(A\Gamma)}{2}$



(2) $m(\hat{\varphi}) = \frac{m(B\Delta) + m(A\Gamma)}{2}$

(1). Από τό τρίγωνον ΡΒΓ $m(\hat{\omega}) = m(\hat{B\Gamma A}) - m(\hat{PB\Gamma}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BA}) - \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{A\Gamma})$.

(2). $m(\hat{\varphi}) = m(\hat{B\Gamma P}) + m(\hat{\Gamma BP}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BA}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{A\Gamma})$.

2.3. Δύο κύκλοι.

2.3.1. **Θεώρημα:** Ἐάν δύο κύκλοι ἔχουν ἓν κοινόν σημεῖον μή κείμενον ἐπί τῆς διακέντρου αὐτῶν, θά ἔχουν κοινόν σημεῖον τό συμμετρικόν τοῦ προηγουμένου πρός τήν διάκεντρον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω (O,R) καί (O′,R′) οἱ δύο κύκλοι καί Α τό κοινόν σημεῖον αὐτῶν. Θά εἶναι $OA \leq R \wedge O'A \leq R'$. Ἐάν Α′ τό συμμετρικόν τοῦ Α πρός OO′ ἀπό τά ἴσα τρίγωνα OAO′, OA′O′ ἔχομεν OA′ = O′A′ ἤτοι $O'A \leq R \wedge O'A' \leq R'$

Ὁρισμός: Δύο κύκλοι λέγομεν ὅτι τέμνονται ὅταν αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἔχουν δύο κοινά σημεῖα.

2.3.2. **Θεώρημα:** Αἱ περιφέρειαι δύο διαφορετικῶν κύκλων δύνανται νά ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.

(Ἐάν ἔχουν τρία κοινά σημεῖα ταυτίζονται).

2.3.3. **Θεώρημα:** Ἐάν αἱ περιφέρειαι δύο κύκλων ἔχουν ἓν κοινόν σημεῖον κείμενον ἐπί τῆς διακέντρου αὐτῶν, τότε δέν ἔχουν ἐκτός αὐτοῦ ἄλλο κοινόν σημεῖον.

Ἀπόδειξις:

Ἐάν εἶχον δεύτερον κοινόν σημεῖον, θά ἔκειτο ἐπί τῆς διακέντρου ἤ ἐκτός αὐτῆς. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν οἱ κύκλοι θά εἶχον κοινήν διάκεντρον ὅτε συμπίπτουν. Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν βάσει τοῦ 2.3.1 θά εἶχον τρία κοινά σημεῖα ὅτε ἐκ τοῦ 2.3.2 συμπίπτουν.

2.3.4. **Θεώρημα:** Ἐάν αἱ περιφέρειαι δύο κύκλων ἔχουν ἓν καί μόνον κοινόν σημεῖον θά κεῖται ἐπί τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις:

Πράγματι ἐκ τοῦ 2.3.1 βλέπομεν ὅτι ἄν δέν ἔκειτο ἐπί τῆς διακέντρου οἱ κύκλοι θά εἶχον καί ἕτερον κοινόν σημεῖον.

Τό σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τῶν δύο κύκλων.

Ὁρισμός: Δύο κύκλοι λέγομεν ὅτι **ἐφάπτονται** ἄν αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἔχουν ἓν καί μόνον κοινόν σημεῖον.

Τό κοινόν σημεῖον λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς. Ἡ ἐφαπτομένη ἑνός ἐκ τῶν δύο κύκλων εἰς τό σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι κάθετος ἐπί τήν διάκεντρον καί συγχρόνως ἐφαπτομένη καί τοῦ ἑτέρου κύκλου.

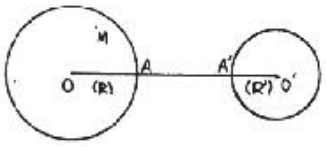
2.3.5. Ἀμοιβαῖαι θέσεις δύο κύκλων.

Θεωροῦμεν δύο κύκλους (O,R) καί (O′,R′) μέ $R \geq R'$ καί $d = OO'$.

Θεώρημα I. Ἐάν οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον, ἤ τά σημεῖα τοῦ ἑνός εἶναι ἐξωτερικά πρός τόν ἄλλον θά λέγομεν ὅτι ὁ εἷς κύκλος εἶναι ἐκτός τοῦ ἄλλου καί εἶναι $d > R + R'$.

Ἀπόδειξις:

Τό σημεῖον Ο' εὑρίσκεται ἐκτός τοῦ κύκλου (Ο), καί τό Ο ἐκτός τοῦ κύκλου (Ο'). Φέρομεν τήν ΟΟ'. Ἐάν λάβωμεν ΟΑ = R καί Ο'Α' = R' τότε ὅλα τά σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΑ εἶναι ἐξωτερικά πρός (Ο') ὅπως καί τά σημεῖα τοῦ Ο'Α' ἐξωτερικά πρός (Ο). Ἐπίσης $A \neq A'$. Θά ὑπάρχῃ συνεπῶς ἡ διάταξις Ο-Α-Α'-Ο' ὅθεν $OO' = d > R+R'$.



Ἀντιστρόφως:

Ἐάν μεταξύ τῶν δύο κύκλων (Ο,R) καί (Ο',R') εἶναι $d > R+R'$ τότε οἱ κύκλοι δέν ἔχουν κοινά σημεῖα καί ἀκόμα τά σημεῖα τοῦ ἑνός εἶναι ἐξωτερικά πρός τόν ἄλλον κύκλον

Ἀπόδειξις:

Ἄν οἱ δύο κύκλοι εἶχον κοινόν σημεῖον Ρ ἐκτός τῆς διακέντρου ΟΟ', ἀπό τό τρίγωνον ΟΡΟ' θά εἴχομεν $d < OP+O'P$ ἀλλά $OP \leq R$ καί $O'P \leq R'$ ἤτοι $d < R+R'$ ἄτοπον.

Ἄν ἤδη λάβωμεν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου Ο ἔχομεν $OM \leq R$ καί $O'M \geqslant OO'-OM > R+R'-OM > R'$

Θεώρημα ΙΙ. Ἔστω ἐπί τῆς εὐθείας xx', x-O-O' ἡ διάταξις τῶν κέντρων τῶν κύκλων, ἐκ. (α).



Ὑποθέωμεν ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται. Τό σημεῖον ἐπαφῆς Α θά κεῖται ἐπί τῆς xx'. Ἐφόσον $R > R'$ δύο διατάξεις εἶναι δυναταί αἱ Ο-Α-Ο', Ο-Ο'-Α. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τά σημεῖα τοῦ ἑνός κύκλου (πλήν τοῦ Α) εἶναι ἐξωτερικά πρός τόν ἄλλον κύκλον. Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν τά σημεῖα τοῦ (Ο') εἶναι καί σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο).

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καί εἶναι $d = R+R'$.

Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ὁ κύκλος (Ο') ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τοῦ (Ο) καί εἶναι $d = R-R'$.

Ἀπόδειξις:

Ἡ διάταξις Α-Ο-Ο' ἀποκλείεται διότι ΟΑ > Ο'Α.

Διά τήν πρώτην περίπτωσιν ἐάν $M \neq A \wedge M \in (O')$ εἶναι $O'M \leq R'$ $OM > OO'-O'M = R+R'-O'M > R$.

Διά τήν δευτέραν περίπτωσιν $M \neq A \wedge M \in (O')$ εἶναι πάλιν $O'M \leq R'$ $OM > OO'+O'M = R-R'+O'M = R-(R'-O'M) < R$.

Ἀντιστρόφως:

Ἔστω ἐπί τῆς εὐθείας xx' Ο-Ο' ἡ διάταξις τῶν κέντρων τῶν κύκλων. Ἐάν $d = R+R'$ οἱ κύκλοι (Ο) καί (Ο') ἐφάπτονται καί τά σημεῖα τοῦ ἑνός κύκλου (πλήν τοῦ σημείου ἐπαφῆς) εἶναι ἐξωτερικά πρός τόν ἄλλον κύκλον.

Ἐάν $d = R-R'$ οἱ κύκλοι ἐπίσης ἐφάπτονται καί τά σημεῖα τοῦ (Ο')

εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (O).

Ἡ ἀπόδειξις περίπου ἰδία πρός τήν προηγουμένην.

Θεώρημα III. Οἱ κύκλοι (O,R) καί (O',R') τέμνονται εἰς τά σημεῖα A καί B (A,B τά κοινά σημεῖα τῶν δύο περιφερειῶν). Νά δειχθῇ ὅτι $R-R'<d<R+R'$.

Ἀπόδειξις:

Ὑποτίθεται ὅτι αἱ κύκλοι εἶναι διαφορετικοί, δηλαδή $O\neq O'$, ὅτε δέν δύνανται νά ἔχουν κοινά σημεῖα κείμενα ἐπί τῆς OO'. Ἀπό τό τρίγωνον OAO' ἔχομεν $R-R'<d<R+R'$.

Ἀντιστρόφως:

Ἄν ὑφίσταται ἡ σχέσις $R-R'<d<R+R'$ οἱ κύκλοι τέμνονται.(1)

Θεώρημα IV. Ἐάν οἱ κύκλοι (O,R) καί (O',R') δέν ἐφάπτονται καί τά σημεῖα τοῦ (O') εἶναι ἐπίσης καί σημεῖα τοῦ κύκλου (O) λέγομεν ὅτι ὁ κύκλος (O') εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κύκλου (O). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν θά εἶναι $d<R-R'$.

Ἀπόδειξις:

Δυναταί περιπτώσεις αἱ $d=R-R'$, $d>R-R'$ καί $d<R-R'$.

Ἡ πρώτη περίπτωσις ἀποκλείεται ἀμέσως δεδομένου ὅτι (βάσει τοῦ II) ὁ κύκλος (O') δέν ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τοῦ (O).

Διά τήν δευτέραν περίπτωσιν $d>R-R'$. Δυνατόν: $d=R+R'$ ἤτις ἀποκλείεται, $d>R+R'$ ἐπίσης, $d<R+R'$ ὅτε ἰσχυούσης καί τῆς $d>R-R'$ οἱ κύκλοι θά ἐτέμνοντο. Ἄρα ἀποκλείεται καί ἡ δευτέρα περίπτωσις καί συνεπῶς ἰσχύει ἡ $d<R-R'$.

Ἀντιστρόφως:

Ἄν $d<R-R'$ ὁ κύκλος (O') εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κύκλου (O). Θά δείξωμεν δηλαδή ὅτι ἄν M σημεῖον τοῦ (O') θά εἶναι ἐπίσης σημεῖον τοῦ (O).

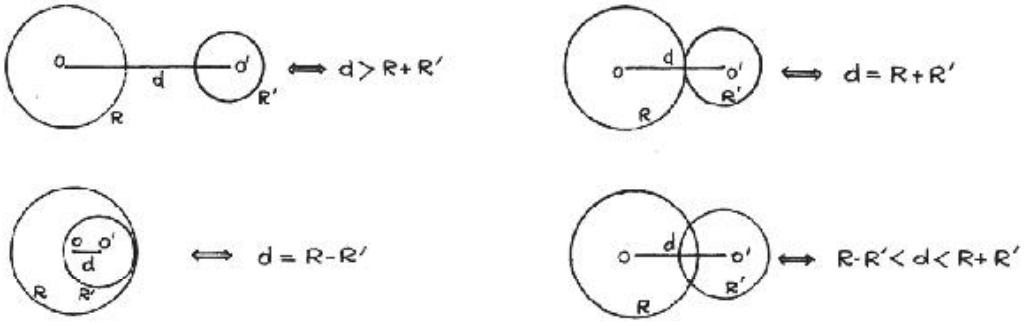
Ἀπόδειξις:

Ἔχομεν $O'M\leq R'\ \wedge\ OM\leq OO'+O'M\leq OO'+R'=d+R'<R$

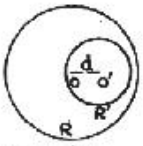
Παρατήρησις:

Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν ἀπάγεται καί ἡ $d=0$, ὅτε οἱ κύκλοι ὁμόκεντροι.

Συναγίζομεν τά ἀποτελέσματα εἰς τόν κάτωθι πίνακα:



(1) Διά τήν ἀπόδειξιν ἴδε εἰς παράρτημα.



$\Longleftrightarrow d < R - R'$.

2.4. Ἀπόστασις σημείου ἀπό τήν περιφέρειαν ἑνός κύκλου.

2.4.1. Ὁρισμοί: Ἔστω κύκλος (O, R) καί σημεῖον A μή κείμενον ἐπί τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Ἐάν M τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας ἡ ἀπόστασις $\varepsilon = \min(AM)$ ὀνομάζεται ἐλαχίστη ἀπόστασις τοῦ A ἀπό τήν περιφέρειαν. Ἡ ἀπόστασις $\mu = \max(AM)$ μεγίστη ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπό τήν περιφέρειαν.

2.4.2. **Θεώρημα:** Ἐάν A ἐκτός τοῦ κύκλου (O,R) καί B τό σημεῖον τομῆς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AO μετά τῆς περιφερείας τότε $\varepsilon = AB$. Ἐάν A ἐντός τοῦ κύκλου καί B ἡ τομή τῆς ἡμιευθείας OA μετά τῆς περιφερείας τότε $\varepsilon = AB$.

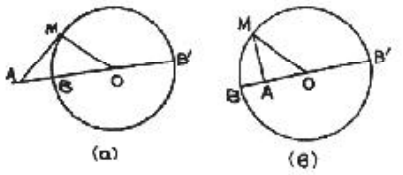
Ἀπόδειξις:

Διά τό πρῶτον μέρος σχ. (α)

$OM + AM > AB + OB \Longrightarrow AM > AB$.

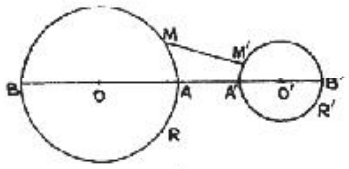
Διά τό δεύτερον μέρος σχ. (β)

$AM + OA > OM = OA + AB \Longrightarrow AM > AB$.

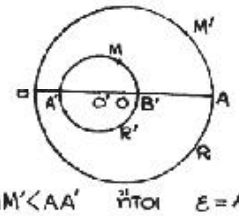


2.5. Ἀπόστασις δύο κύκλων.

2.5.1. Ὁρισμοί: Ἔστω δύο κύκλοι (O,R) καί (O',R') οἱ ὁποῖοι δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον καί $O \neq O'$. Ἐάν $M \in (O)$ καί $M' \in (O')$ ἡ ἀπόστασις $\varepsilon = \min(MM')$ ὀνομάζεται ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν δύο κύκλων. Ἡ ἀπόστασις $\mu = \max(MM')$ μεγίστη ἀπόστασις τῶν δύο κύκλων. Εἰς τό κατωτέρω σχῆμα φαίνονται αἱ δυναταί περιπτώσεις. Ἡ ἀπόδειξις ἐπαφίεται εἰς τόν μαθητήν.



$AA' < MM' < BB'$ ἤτοι $\varepsilon = AA'$, $\mu = BB'$



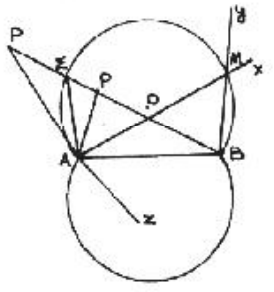
$A'B < MM' < AA'$ ἤτοι $\varepsilon = A'B$, $\mu = AA'$

2.6.

Θεώρημα: Τό σύνολον τῶν σημείων M ἐντός ἐπιπέδου ἀπό τά ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα AB φαίνεται ὑπό δοθεῖσαν γωνίαν $\omega < 180^\circ$ εἶναι δύο τόξα συμμετρικά πρός τήν εὐθεῖαν AB καί μέ ἄκρα τά σημεῖα A καί B.

Ἀπόδειξις:

α) Ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ὑφίσταται ἕν τουλάχιστον σημεῖον M ὥστε $A\hat{M}B = \hat{\omega}$. Ἐάν φέρωμεν τάς ἡμιευθείας Ax καί By εἰς τό αὐτό ἡμιεπίπεδον (σχετικῶς πρός τήν AB) καί ἔτσι ὥστε $x\hat{A}B + y\hat{B}A = 180^\circ - \hat{\omega}$, τό σημεῖον τομῆς αὐτῶν M πληροῖ τήν ζητουμένην συνθήκην. Παρατηροῦμεν ὅτι διά πᾶν σημεῖον N τοῦ



τόξου AMB τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον AMB ἔχομεν $A\hat{N}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B = A\hat{M}B = \hat{\omega}$. Συνεπῶς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AMB ἀνήκουν εἰς τὸ ζητούμενο σημειοσύνολον.

β) Ἐπίσης καὶ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AM_1B συμμετρικοῦ τοῦ AMB πρὸς AB. Ἀλλὰ διὰ πᾶν σημεῖον P μὴ κείμενον εἰς τὰ δύο τόξα θὰ εἶναι $A\hat{P}B \neq \hat{\omega}$. Διότι ἂν τὸ P εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μετὰ τοῦ τόξου AMB (σχετικῶς πρὸς τὴν AB) δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί 1) Νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMB ὅτε $A\hat{P}B < A\hat{\Sigma}B = \hat{\omega}$ καὶ 2) νὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMB ὅτε $A\hat{P}B > A\hat{\Sigma}B = \hat{\omega}$. Ἐὰν ἐπαναληφθοῦν οἱ ἴδιοι συλλογισμοὶ διὰ τὸ ἕτερον ἡμιεπίπεδον διαπιστώνομεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημειοσύνολον εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν τόξων AMB, AM_1B.

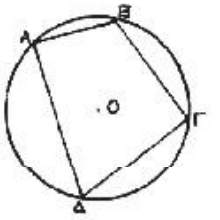
Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ τόξα αὐτά, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ σημεῖον M, ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν $Z\hat{A}B = \hat{\omega}$. Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ A ἐπὶ τὴν AZ. Ἡ τομὴ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ τόξου διὰ τὸ ἓν ἡμιεπίπεδον.

2.7. Ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον πολύγωνα.

2.7.1. Ὁρισμός: Πολύγωνον ὀνομάζεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O) ἐὰν αἱ κορυφαί του εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (O). Ὁ κύκλος ὀνομάζεται περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.

Ἐνταῦθα ἐξετάζονται μόνον τὰ ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα.

2.7.2. **Θεώρημα:** Ἂν ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O) τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του εἶναι 180°.



Ἀπόδειξις:

Θὰ δείξωμεν ὅτι $B\hat{A}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta = 180°$.

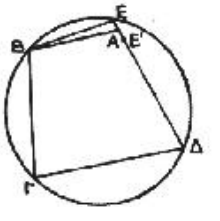
Ἔχομεν $m(B\hat{A}\Delta) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{B\Gamma\Delta})$ καὶ $m(B\hat{\Gamma}\Delta) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BA\Delta})$. Ὅθεν $m(B\hat{A}\Delta) + m(B\hat{\Gamma}\Delta) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}) + m(\overset{\frown}{BA\Delta})] = 180°$.

Ἄρα $B\hat{A}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta = 180°$.

(Ἢ ἀλλοιῶς $B\hat{O}\Delta = 2B\hat{A}\Delta$, μὴ κυρτὴ $B\hat{O}\Delta = 2B\hat{\Gamma}\Delta$ ἢ διὰ προσθέσεως $360° = 2(B\hat{A}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta)$ ἢ $B\hat{A}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta = 180°$.

Ἀντιστρόφως:

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι 180° τότε αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ εἶναι σημεῖα περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



Ἀπόδειξις:

Ἔστω $B\hat{A}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta = 180°$ (1). Θεωροῦμεν τὸν κύκλον περὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ. Ἐὰν οὗτος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ τέμνῃ τὴν ΑΔ ἔστω εἰς Ε (ἢ Ε'). Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΓΔΕ θάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομεν $B\hat{E}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta = 180°$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $B\hat{E}\Delta = B\hat{A}\Delta$, ὅπερ ἄτοπον.

Παρατήρησις:

Λέγομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Γενικῶς ὀνομάζομεν ἐγγράψιμον ἓν πολύγωνον ὅταν ἐπὶ μιᾶς ὡρισμένης εὐθείας ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ τῶν στοιχείων αὐτοῦ δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕν κύκλον.

2.7.3. **Θεώρημα:** Ἐὰν ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τετράπλευρον ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφάς του φαίνεται ἡ ἀπέναντι πλευρὰ ὑπὸ ἴσας γωνίας.

Ἀντιστρόφως:

Ἐὰν ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φαίνεται ἡ ἀπέναντι πλευρὰ αὐτοῦ ὑπὸ ἴσας γωνίας τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

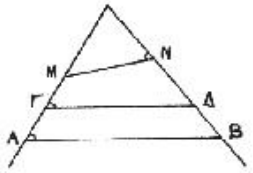
Αἱ ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων εἶναι ἁπλαῖ καὶ ἐπαφίενται εἰς τὸν μαθητήν.

2.7.4. Ὁρισμός: Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν x, y δίδονται ἀντιστοίχως τὰ ζεύγη τῶν σημείων $(A,\Gamma)-(B,\Delta)$. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὰς x, y ἂν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

2.7.5. **Θεώρημα:** Ἂν αἱ εὐθεῖαι $AB, \Gamma\Delta$ εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν MN ὡς πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν x, y τότε θὰ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις:

$(\hat{A}=\hat{N}) \wedge (\hat{\Gamma}=\hat{N}) \Longrightarrow \hat{A}=\hat{\Gamma}$.



2.8. Περιγεγραμμένα περὶ κύκλον πολύγωνα.

2.8.1. Ὁρισμός: Πολύγωνον ὀνομάζεται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (ο) ἂν αἱ πλευραί του ἐφάπτονται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

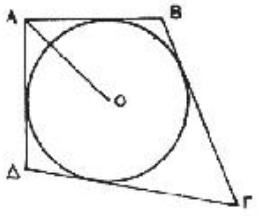
Ὁ κύκλος ὀνομάζεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.

Ἐνταῦθα ἐξετάζονται μόνον τὰ περιγεγραμμένα τετράπλευρα.

2.8.2. **Θεώρημα:** Ἂν ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Ο) τετράπλευρον αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου Ο.

Ἀπόδειξις:

Ἡ ΑΟ (ἰδὲ σκῆμα) εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$ τοῦ πολυγώνου ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς 2.2.4. II.

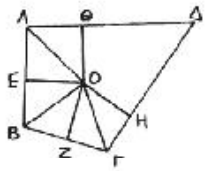


Ἀντιστρόφως:

Ἐὰν αἱ διχοτόμοι τριῶν γωνιῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τετάρτης γωνίας αὐτοῦ θὰ διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ Ο. Τὸ πολύγωνον δὲ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου Ο.

Ἀπόδειξις:

Παρατηρούμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ο ὡς σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς πλευράς αὐτῶν. Δηλαδή ΟΘ = ΟΕ, ΟΕ = ΟΖ, ΟΖ = ΟΗ. Ὅθεν ΟΘ = ΟΗ ἤτοι ΔΟ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ. Ὁ κύκλος (Ο, ΟΘ) ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.



Παρατήρησις:

Λέγομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν ὅτι τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον περί κύκλον.

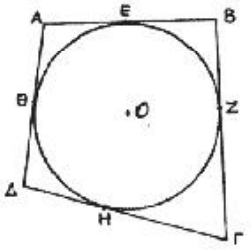
Γενικῶς ὀνομάζομεν περιγράψιμον ἕνα πολύγωνον ὅταν θέσει μιᾶς ὡρισμένης ευθείας ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξύ τῶν στοιχείων αὐτοῦ δύναται νά περιγραφῇ περί ἕναν κύκλον.

2.8.3. **Θεώρημα:** Ἐάν τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο περί κύκλον τότε τό ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις:

Γνωρίζομεν ὅτι ΑΕ = ΑΘ, ἐπίσης
ΕΒ = ΒΖ
ΔΗ = ΘΔ
ΗΓ = ΖΓ

Προσθέτομεν τάς ἰσότητας κατά μέλη καί ἔχομεν ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.

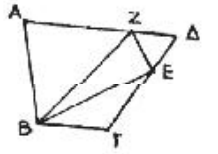


Ἀντιστρόφως:

Ἐάν εἰς τετράπλευρον τό ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων τό τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω διά τό ΑΒΓΔ ὅτι ΑΒ + ΓΔ = = ΑΔ + ΒΓ ⟹ ΓΔ - ΒΓ = ΑΔ - ΑΒ (1). Λαμβάνομεν ἐπί τῆς ΑΔ σημεῖον Ζ ὥστε ΑΖ = ΑΒ. Ἐπί τῆς ΓΔ σημεῖον Ε ὥστε ΓΕ = ΒΓ.



Ἐκ τῆς (1) θά ἔχωμεν ΔΖ = ΔΕ. Τά τρίγωνα ΒΑΖ, ΒΓΕ, ΕΔΖ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἄρα αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α, Γ καί Δ εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΒΖ, ΒΕ καί ΕΖ τοῦ τριγώνου ΒΕΖ καί ευκόλως διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἀναχώμεθα λοιπόν εἰς τό προηγούμενον θεώρημα.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι δυνατόν νά γίνῃ καί διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Μέ ποιόν τρόπον;

2.9. Παρεγγεγραμμένα εἰς κύκλον πολύγωνα.

2.9.1. Ὁρισμός: Παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον πολύγωνον ὀνομάζεται ἕν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ εὐθεῖαι ἐπί τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραί ἐφάπτονται τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου εἰς τρόπον ὥστε ὁ κύκλος νά εὑρίσκεται εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ πολυγώνου.

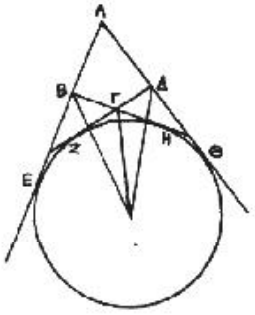
Ἐνταῦθα θά δώσωμεν τά κριτήρια ἵνα ἕν τετράπλευρον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἰσχύουν τά κάτωθι θεωρήματα.

2.9.2. **Θεώρημα:** "Ινα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀπό τό εὐνολον τό ἀποτελούμενον ἐκ τεσσάρων γωνιῶν ἤτοι τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν του καί τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἐξωτερικῶν γωνιῶν αἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν γωνιῶν νά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολος καί ἐπαφίεται εἰς τόν μαθητήν.

2.9.3. **Θεώρημα:** "Ινα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς διαφορᾶς δύο ἀπέναντι πλευρῶν ($\neq 0$) νά εἶναι ἴση πρός τήν ἀπόλυτον τιμήν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις:



Ἀναγκαῖον: (ἰδέ σχῆμα)

$AB = AE - BE$ καί $\Gamma\Delta = \Delta Z - \Gamma Z$

$AB - \Gamma\Delta = AE - BE - \Delta Z + \Gamma Z$ (1).

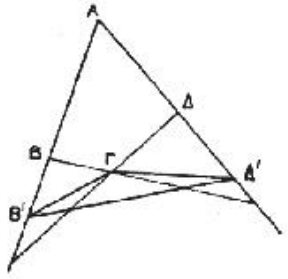
$A\Delta = A\Theta - \Delta\Theta$ καί $B\Gamma = BH - \Gamma H$

$A\Delta - B\Gamma = A\Theta - \Delta\Theta - BH + \Gamma H$ (2).

Τά δεξιά μέλη τῶν (1), (2) εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι εἶναι ἴσα.

Εἶναι προφανές ὅτι παραλληλόγραμμον δέν δύναται νά εἶναι παρεγγράψιμον [1]. Κατόπιν τούτου διά τό ΑΒΓΔ $|AB - \Gamma\Delta| \neq 0$.

Ἱκανόν:



"Εστω ὅτι διά τό ΑΒΓΔ, $AB - \Gamma\Delta = A\Delta - B\Gamma \neq 0$. Θά δείξωμεν ὅτι εἶναι παρεγγράψιμον εἰς κύκλον.

Λαμβάνομεν ἐπί τῆς ΑΒ σημεῖον Β' ὥστε $BB' = B\Gamma$ καί ἐπί τῆς ΑΔ τό σημεῖον Δ' ὥστε $\Delta\Delta' = \Delta\Gamma$. "Εχομεν $AB - \Gamma\Delta = A\Delta - B\Gamma \rightarrow AB + B\Gamma = A\Delta + \Delta\Gamma \rightarrow AB' = A\Delta'$.

"Ητοι τά $\overset{\Delta}{B'B\Gamma}$, $\overset{\Delta}{\Delta'\Delta\Gamma}$, $\overset{\Delta}{B'A\Delta'}$ εἶναι ἰσοσκελῆ καί κατά συνέπειαν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν κορυφῶν των εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Β'ΓΔ' καί θά διέρχωνται συνεπῶς διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. "Αρα βάσει τοῦ (α) τό πρόβλημα ἐτελειώθη.

Παρατηρήσεις:

α) Ἀκριβῶς τά ἴδια ἰσχύουν καί διά μή κυρτόν τετράπλευρον.

β) Διά τό ἱκανόν συνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν ἀπόδειξιν καί διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

γ) Ἐάν $|AB - \Gamma\Delta| = |A\Delta - B\Gamma| = 0$ τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ὅτε τά Β', Γ, Δ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καί συνεπῶς $\overset{\Delta}{}$ δέν ὑφίσταται τό σημεῖον τομῆς τῶν μεσοκαθέτων διά τό Β'ΓΔ'. "Ητοι δέν ἰσχύει τό ἱκανόν, διά κύκλον πεπερασμένης ἀκτῖνος.

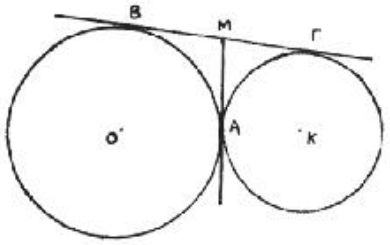
---

(1) Εἰς κύκλον πεπερασμένης ἀκτῖνος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

92. Δύο κύκλοι (O,R), (K,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς Α. Ἔστω Μ τό σημεῖον τομῆς τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης ΒΓ καί τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης. Θά δείξωμεν α) Τό σημεῖον Μ εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ β) $O\hat{M}K = 1^L$ γ) $B\hat{A}\Gamma = 1^L$.



Ἀπόδειξις:

α) $(MB = MA) \wedge (M\Gamma = MA) \Rightarrow MB = M\Gamma$

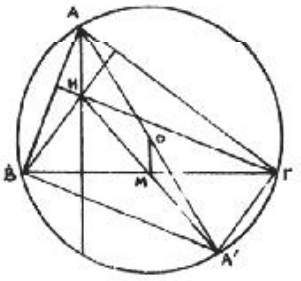
β) Ἡ ΟΜ διχοτομεῖ τήν $A\hat{M}B$, ἡ ΚΜ διχοτομεῖ τήν $A\hat{M}\Gamma$. Ἐπειδή αἱ $A\hat{M}B$ καί $A\hat{M}\Gamma$ εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί ἕπεται ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν θά εἶναι κάθετοι.

γ) Διά τό τρίγωνον ΒΑΓ ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι ἴση πρός τό ἥμισυ τῆς πλευρᾶς πρός τήν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ.

93. Ἐάν Ο τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ, Η τό ὀρθόκεντρον καί Μ τό μέσον τῆς ΒΓ δείξατε ὅτι $AH = 2OM$.

Ἀπόδειξις:

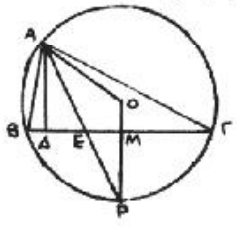
Ἔστω Α' τό ἀντιδιαμετρικόν σημεῖον τοῦ Α. Τό τετράπλευρον ΒΗΓΑ' εἶναι παραλληλόγραμμον διότι $\Gamma H \parallel BA'$ ($\perp AB$) καί $BH \parallel \Gamma A'$ ($\perp A\Gamma$). Ἄρα ἡ ΗΑ' διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ. Τά σημεῖα Ο, Μ εἶναι τά μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων Α'Η, Α'Α ἄρα $AH = 2OM$.



94. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας διχοτομεῖ τήν γωνίαν τήν σχηματιζομένην ὑπό τοῦ ὕψους καί τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

Ἀπόδειξις:

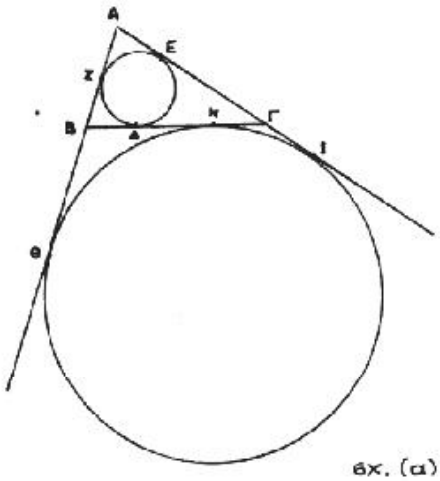
Ἔστω ΑΔ τό ὕψος, Ρ τό μέσον τοῦ τόξου ΒΓ καί ΑΕ ἡ διχοτόμος. Εἶναι $O\hat{A}E = E\hat{P}O$ ὡς παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς $A\hat{O}P$. Ἄρα $\Delta\hat{A}E = O\hat{A}E$.



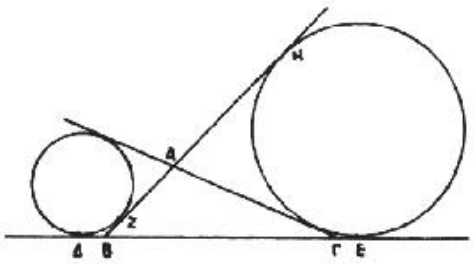
95. α) Ἔστωσαν Δ,Ε,Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ = \tau - \alpha$, $B\Delta = \tau - \beta$, $\Gamma\Delta = \tau - \gamma$.

β) Ἐὰν Θ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ μετὰ τῆς ΑΒ, δείξατε ὅτι $A\Theta = \tau$.

Ἀπόδειξις:



εκ. (α)



εκ. (β)

α) $2AZ + 2B\Delta + 2\Gamma\Delta = 2\tau \Longrightarrow AZ = \tau - (B\Delta + \Gamma\Delta) = \tau - \alpha$. Ὁμοίως $B\Delta = \tau - \beta$ κ.τ.λ.

β) $AB + BK + K\Gamma + A\Gamma = 2\tau \Longrightarrow AB + B\Theta + \Gamma I + A\Gamma = 2\tau \Longrightarrow A\Theta + AI = 2A\Theta = 2\tau \Longrightarrow$

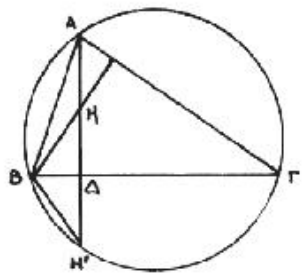
$\Longrightarrow A\Theta = \tau$.

Σημείωσις: Ὡς ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω ἀποδείξατε ὅτι: 1ον εκ.(α) α) $\Theta Z = \alpha$ β) Τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔΚ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 2ον Διὰ τὸ εκ. (β): α) $AE = \theta + \gamma$ β) $ZH = \alpha$ 3ον Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^L$) εἶναι $2\rho + \alpha = \beta + \gamma$.

96. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου τριγώνου ΑΒΓ πρὸς ἑκάστην πλευρὰν κεῖται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις:

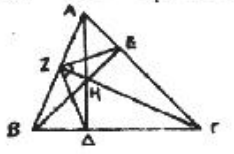
Προεκτείνομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἕως ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς σημεῖον Η'. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ $\overset{\Delta}{HBH'}$ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει διότι $B\hat{H}H' = \hat{\Gamma}$ (πλευρὰς καθέτους) καὶ $B\hat{H}'A = \hat{\Gamma}$.



97. Τὰ ὕψη τριγώνου εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις.

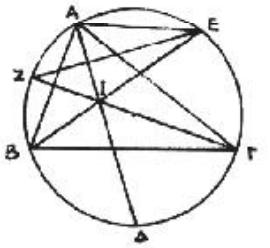
Τὰ τετράπλευρα ΕΗΖΑ καὶ ΑΖΔΓ εἶναι ἐγγράψιμα. Ἄρα $H\hat{Z}E = H\hat{A}E$ καὶ $\Delta\hat{Z}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$.



98. Τό κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς τά μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, $\overset{\frown}{AB}$.

Ἀπόδειξις:

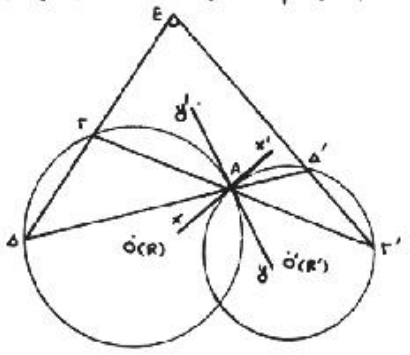
Τό σημεῖον Ι εἶναι ὡς γνωστόν τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τοῦ $\hat{A}B\Gamma$. Τά μέσα τῶν $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως μετά τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Θά δείξωμεν ὅτι $A\Delta \perp ZE$. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $\hat{IAE} + \hat{AEZ} = 1^L$. Ἀλλά $\hat{IAE} = \hat{IA\Gamma} + \hat{\Gamma AE} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$, $\hat{AEZ} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.



99. Δύο κύκλοι (O,R) καί (O′,R′) τέμνονται εἰς Α καί Β. Διά τοῦ σημείου Α ἄγονται τυχοῦσαι εὐθεῖαι ΓΑΓ′ καί ΔΑΔ′ τέμνουσαι τάς περιφερείας, ἡ μέν πρώτη εἰς Γ,Γ′ ἀντιστοίχως ἡ δέ δευτέρα εἰς Δ,Δ′. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΓΔ καί Γ′Δ′ ἰσοῦται πρός τήν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων εἰς Α.

Ἀπόδειξις:

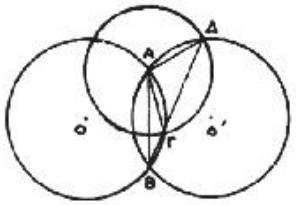
Θά δείξωμεν ὅτι $\hat{E} = x\hat{A}y$. Εἶναι προφανῶς $\hat{E} = A\hat{\Delta}'\Gamma' - E\hat{\Delta}\Delta'$. Ἀλλά $A\hat{\Delta}'\Gamma' = x\hat{A}\Gamma'$ (ὑπό χορδῆς καί ἐφαπτομένης). Ἐπίσης $E\hat{\Delta}\Delta' = y\hat{A}\Gamma'$ καί συνεπῶς ...



100. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται εἰς Α καί Β. Μέ κέντρον Α καί ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν αὐτάς εἰς τέσσαρα σημεῖα. Δείξατε ὅτι τό σημεῖον Β καί δύο ἐκ τῶν τεσσάρων τομῶν (ἐκλεγομένων καταλλήλως) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:

Ἡ γωνία $\hat{AB\Gamma}$ βαίνει εἰς τό τόξον ΑΓ τοῦ κύκλου (O), ἡ δέ $\hat{AB\Delta}$ εἰς τό $\overset{\frown}{A\Delta}$ τοῦ (O′). Τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ καί ΑΔ εἶναι ἴσα διότι εἶναι ἀκτῖναι τοῦ κύκλου (A). Ἀλλά τότε καί τά τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{A\Delta}$ τῶν ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα. Ἄρα $\hat{AB\Gamma} = \hat{AB\Delta}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τά σημεῖα Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

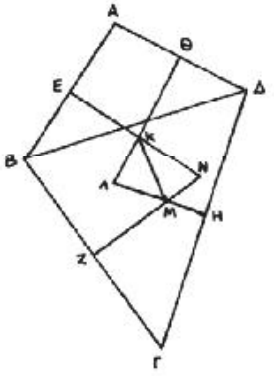


101. Αἱ μεσοκάθετοι ἐπί τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν τεμνόμεναι ἕν δεύτερον τετράπλευρον ΚΛΜΝ. Δείξατε ὅτι ἑκάστη διαγώνιος τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπί μιᾶς διαγωνίου τοῦ νέου

τετραπλεύρου.

Απόδειξις:

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΜ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν κύκλων (Κ),(Μ) περιγεγραμμένων ἀντιστοίχως περὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΒΓΔ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΔ εἶναι προφανῶς ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν ἐν λόγῳ κύκλων καὶ εἶναι ὡς γνωστὸν ΚΜ ⊥ ΒΔ.



102. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας $x\hat{O}y$ εἰς Α καὶ Β καὶ μεταξύ των εἰς Μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ΑΜΒ.

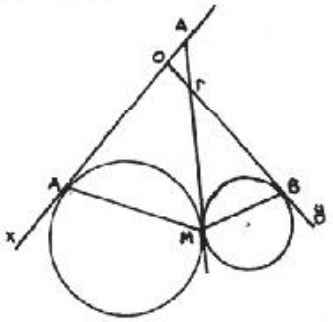
Απόδειξις:

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α) Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας.

Θά ἔχωμεν $A\hat{M}B = A\hat{M}\Delta + B\hat{M}\Gamma =$
$= 1^L - \frac{A\hat{\Delta}M}{2} + 1^L - \frac{B\hat{\Gamma}M}{2} = 2^L - \frac{x\hat{O}y}{2}$.

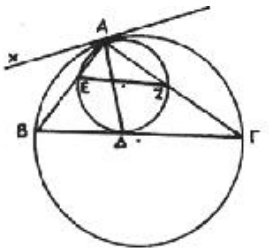
β) Τὸ σημεῖον Μ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς γωνίας (οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς). Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν $A\hat{M}B = \frac{x\hat{O}y}{2}$.



103. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α. Ἡ χορδὴ ΒΓ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας ἐφάπτεται εἰς Δ τῆς μικροτέρας. Θά δείξωμεν ὅτι $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.

Απόδειξις:

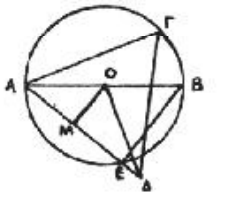
Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς Α. Ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης $x\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$ καὶ $x\hat{A}B = A\hat{Z}E$. Ἄρα $A\hat{\Gamma}B =$
$= A\hat{Z}E$. Ἤτοι ΒΓ ∥ ΕΖ. Συνεπῶς τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς $\overset{\frown}{EZ}$.



104. Ἔστω κύκλος (Ο) καὶ διάμετρος ΑΟΒ αὐτοῦ. Μὲ πλευρὰν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΔ. Ἐὰν Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας ΑΔ μετὰ τῆς περιφερείας νὰ δειχθῇ ὅτι ΟΔ=ΒΕ.

Απόδειξις:

$A\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}\Delta \Rightarrow A\hat{\Delta}O = 30^\circ$. Φέρομεν τὴν ΟΜ ⊥ ΑΕ. Διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΜΔ θά εἶναι ΟΔ=2ΟΜ (1). Τὰ σημεῖα Ο,Μ εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων



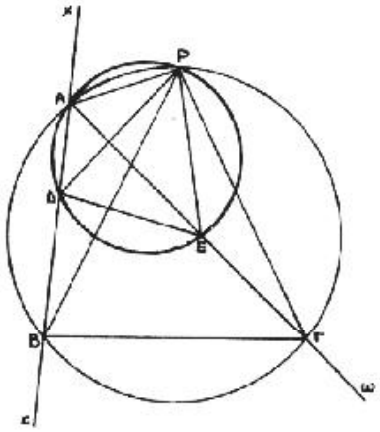
ΑΒ, ΑΕ ἀντιστοίχως, ἄρα ΒΕ = 2 ΟΜ (2).

(1), (2) ⟹ ΟΔ = ΒΕ.

105. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ὥστε ΒΔ = ΓΕ. Ἐὰν Ρ τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν περιφερειῶν ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ, δείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α διέρχεται διὰ τοῦ Ρ.

Ἀπόδειξις:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΔ} = \text{ΓΕ} \\ \hat{\text{ΑΔ}}\text{Ρ} = \hat{\text{ΑΕ}}\text{Ρ} \Rightarrow \hat{\text{ΒΔ}}\text{Ρ} = \hat{\text{ΓΕ}}\text{Ρ} \\ \hat{\text{ΑΒ}}\text{Ρ} = \hat{\text{ΑΓ}}\text{Ρ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\text{ΡΔΒ}} = \overset{\triangle}{\text{ΡΕΓ}} \Rightarrow \text{ΒΡ} = \text{ΓΡ}.$$



Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΡ θὰ ἔχωμεν $\hat{\text{Ρ}}\text{ΒΓ} = \hat{\text{Ρ}}\text{ΑΓ}$ καὶ $\hat{\text{Ρ}}\text{ΓΒ} = \hat{\text{Ρ}}\text{Αx}$. Ἀλλὰ τὸ $\overset{\triangle}{\text{ΒΡΓ}}$ ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι ἰσοσκελές.

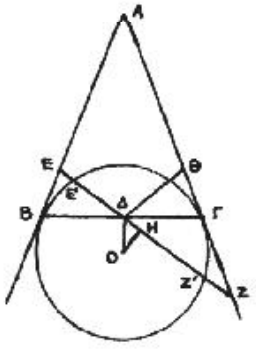
Παρατήρησις: Ἐὰν τὸ Ε ἐλαμβάνετο ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ καὶ ὥστε ΒΔ = ΓΕ τὸ σημεῖον Ρ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{\text{Α}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐκφώνησις θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Δίδεται γωνία ΖΑω, ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν μεταβλητὰ σημεῖα Δ, Ε ὥστε ΑΔ + ΑΕ = λ = ΑΒ + ΑΓ. Ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΔΑΕ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου (πλὴν τοῦ Α). Ἐξ ἄλλου ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον.

106. Διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ ἄγεται τυχοῦσα τέμνουσα. Ἐὰν Ε ἡ τομὴ ταύτης μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ Ζ μετὰ τῆς ΑΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΕΖ > ΒΓ.

Ἀπόδειξις:

1η: Θεωροῦμεν τὴν περιφέρειαν ἡ ὁποία ἐφάπτεται εἰς Β, Γ τῶν ΑΒ, ΑΓ.

ΟΔ > ΟΗ ⟹ ΒΓ < Ε'Ζ' < ΕΖ.



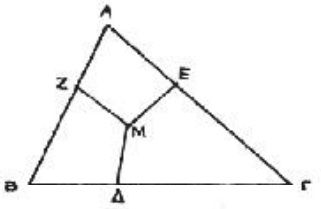
2α: Λαμβάνομεν ΓΘ = ΒΕ ⟹ $\overset{\triangle}{\text{ΒΔΕ}} = \overset{\triangle}{\text{ΓΔΘ}}$ ⟹ $\hat{\text{ΒΔ}}\text{Ε} = \hat{\text{ΓΔ}}\text{Θ} \Rightarrow \hat{\text{ΖΔ}}\text{Γ} = \hat{\text{ΓΔ}}\text{Θ}$. Ἡ διχοτόμος ΔΓ ὡς γνωστὸν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΔΘ, ΔΖ τῶν πλευρῶν τοῦ $\overset{\triangle}{\text{ΘΔΖ}}$ πού τὴν περιέχουν (διατί;). Ἄρα 2ΔΓ < ΔΘ + ΔΖ = ΔΕ + ΔΖ = ΕΖ.

Πόσας λύσεις δύνασθε νὰ εὕρετε διὰ τὸ πρόβλημα αὐτό;

107. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ δίδονται τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι περὶ τὰ τρίγωνα ΕΑΖ, ΖΒΔ, ΔΓΕ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

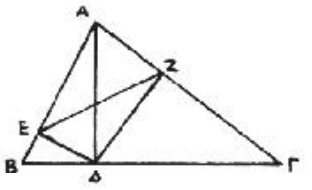
Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι περὶ τὰ τρίγωνα ΖΒΔ, ΕΓΔ τέμνονται εἰς Μ (τὸ Μ δυνατὸν νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ Δ). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΑΕΜΖ εἶναι ἐγγράψιμον.
ΒΖΜΔ $\Rightarrow$ $M\hat{Z}B = M\hat{\Delta}\Gamma$ (1), ΓΕΜΔ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $M\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}M$ (2). (1), (2) $\Rightarrow$ $M\hat{Z}B =$
$= A\hat{E}M \Rightarrow$ ΑΕΜΖ ἐγγράψιμον.



108. Ἐκ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις:

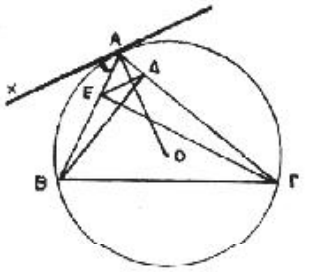
Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΖΔΕ ἔχομεν $A\hat{E}Z = A\hat{\Delta}Z$. (1) Ἀλλὰ $A\hat{\Delta}Z = \hat{\Gamma}$ (2) διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $A\hat{E}Z = \hat{\Gamma}$ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι τὸ ΒΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμον.



109. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ, Ε οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν Β καὶ Γ ὑψῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἀπόδειξις:

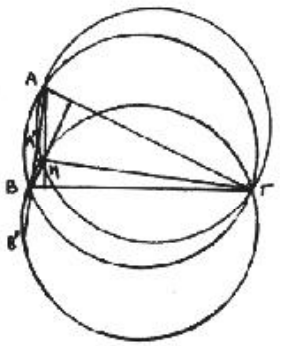
Εἰς τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου (Ο). Ἡ γωνία $x\hat{A}B$ εἶναι ἴση πρὸς $\hat{\Gamma}$ ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης. Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΒΕΔΓ ἔχομεν $A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$. Ἄρα $x\hat{A}B = A\hat{E}\Delta$ ἤτοι $Ax \parallel E\Delta$. Ἀλλὰ $OA \perp Ax$, ὅθεν $OA \perp \Delta E$.



110. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τοὺς κύκλους ΒΗΓ καὶ ΓΗΑ καὶ τὰ δεύτερα ἐκτὸς τῶν Α καὶ Β κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Α′ αὐτῶν ἀντιστοίχως μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.

Ἀπόδειξις:

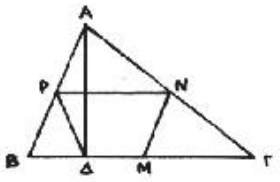
Παρατηροῦμεν ὅτι $\hat{A} + B\hat{H}\Gamma = 2^L$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΗΓ εἶναι ἴσοι (συμμετρικοὶ πρὸς ΒΓ). Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁ κύκλος περὶ τὸ $A\hat{H}\Gamma$. Εἰς τὸν κύκλον ΒΗΓ ἡ χορδὴ ΓΒ′ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐγγεγραμμένην γωνίαν $2^L - B$. Ἄρα ΓΒ′ = ΓΑ (δεδομένου ὅτι οἱ



κύκλοι ΑΒΓ, ΒΗΓ εἶναι ἴσοι). Ὅθεν: $B\hat{\Gamma}B' = \hat{B} - \hat{A}$. Διὰ παρομοίου συλλογισμοῦ διαπιστώνομεν ὅτι $\Gamma A' = \Gamma B$ καὶ συνεπῶς $A\hat{\Gamma}A' = \hat{B} - \hat{A}$. Ἤτοι $B\hat{\Gamma}B' = A\hat{\Gamma}A'$ καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΒΗΓ, ΓΗΑ εἶναι ἴσοι ἕπεται ὅτι καὶ $AA' = BB'$.

111. Εἰς πᾶν τρίγωνον οἱ πόδες τῶν τριῶν ὑψῶν καὶ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

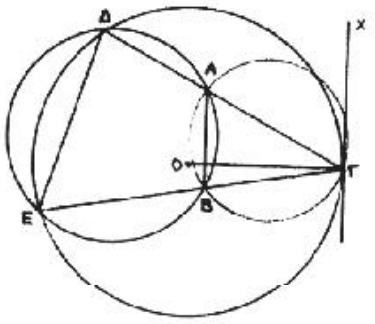
Ἀπόδειξις:



Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος καὶ Μ, Ν, Ρ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εἶναι $PΔ = \frac{AB}{2}$. Ἐπίσης τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $MN = \frac{AB}{2}$ διότι συνδέει τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΒΓ. Ἀλλὰ καὶ $PN \parallel BΓ$, ὅθεν τὸ ΡΝΜΔ ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ τὰ Ρ, Δ, Μ, Ν ὁμοκυκλικά. Ἤτοι ὁ κύκλος διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχεται διὰ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν.

112. Δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς Α καὶ Β καὶ ἔστω Γ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς. Αἱ ΓΑ καὶ ΓΒ τέμνουν τὴν ἄλλην περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ ΔΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις:



Εἰς τὸ σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Ο) φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην. Ἡ γωνία $x\hat{\Gamma}A$ ὡς ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη ἰσοῦται πρὸς τὴν $\Delta\hat{E}\Gamma$. Ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἔχομεν: $\Delta\hat{E}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$. Ἄρα $x\hat{\Gamma}A = B\hat{A}\Gamma$ ἤτοι $AB \parallel \Gamma x$. Ἀλλὰ $O\Gamma \perp \Gamma x$, ὅθεν $O\Gamma \perp AB$.

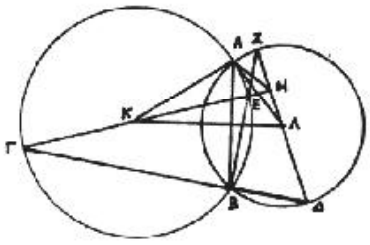
113. Δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ σημείου Β φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τὴν (Κ) εἰς τὸ Γ καὶ τὴν (Λ) εἰς τὸ Δ. Εἰς τὸ σημεῖον Β ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν (Κ) εἰς Ε καὶ τὴν (Λ) εἰς Ζ. Ἐὰν Η τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΖ, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΑΗΛ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις:

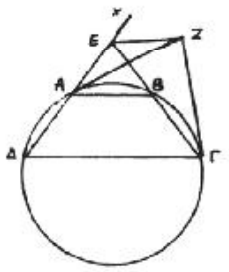
$A\hat{K}E = 2\,A\hat{B}E$ (1)

$A\hat{\Lambda}Z = 2\,ABZ$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow A\hat{K}H = A\hat{\Lambda}H$.



114. Τραπεζίου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς. Ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς των καὶ Ζ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Α καὶ Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

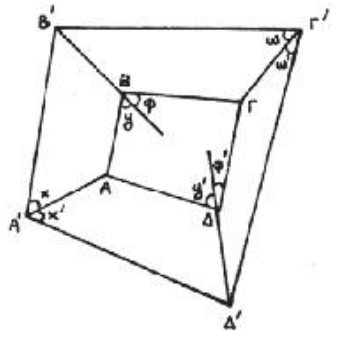


Ἀπόδειξις:

$A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Delta}\Gamma$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης). Ἄρα διὰ τὰ ἰσοσκελῆ $A\hat{Z}\Gamma, \Delta\hat{E}\Gamma$:
$A\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma \Rightarrow AEZ\Gamma$ ἐγγράψιμον. Ὅθεν
$x\hat{E}Z = A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Delta}\Gamma \Rightarrow EZ \parallel \Delta\Gamma$

115. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τετράδες σημείων A, B, Γ, Δ καὶ A', B', Γ', Δ' τοιαῦτα ὥστε τὰ σημεῖα A, A', B, B' νὰ εἶναι συγκυκλικά, ὡς ἐπίσης τὰ B, B', Γ, Γ', τὰ $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ καὶ τὰ Δ, Δ', A, A'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι σημεῖα συγκυκλικὰ τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ A', B', Γ', Δ'.

Ἀπόδειξις:



ἐγγεγρ. $ABB'A' \Rightarrow x = y$ (1)
ἐγγεγρ. $B\Gamma\Gamma'B' \Rightarrow \omega = \varphi$ (2)
ἐγγεγρ. $\Gamma\Delta\Delta'\Gamma' \Rightarrow \omega' = \varphi'$ (3)
ἐγγεγρ. $\Delta AA'\Delta' \Rightarrow x' = y'$ (4)
$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow x + x' + \omega + \omega' = y + \varphi + \varphi' + y' \Rightarrow$
$\Rightarrow B\hat{A}'\Delta' + B\hat{\Gamma}'\Delta' = A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}A$.

Ὡς ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι προτάσεις

α) Ἂν A', B', Γ' εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἀντιστοίχως, οἱ κύκλοι $AB'\Gamma', B\Gamma'A', \Gamma A'B'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ.

β) Ἐὰν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ $AB\Gamma$ τὰ A', B', Γ' εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας (Simson).

γ) Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τέσσαρες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τέσσερα τρίγωνα τὰ σχηματιζόμενα ἀπὸ τὰς ἐν λόγῳ εὐθείας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

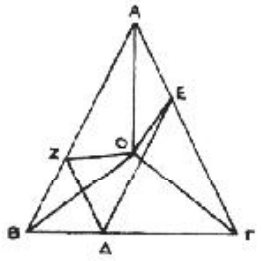
116. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως αὐτοῦ $B\Gamma$. Αἱ ἐκ τοῦ Δ παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ τέμνουν τὰς $A\Gamma$ καὶ AB εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα A, E, Z καὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $A\hat{B}\Gamma$ κύκλου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀπόδειξις:

$$\left.\begin{array}{l} AO = O\Gamma \\ \hat{OAZ} = \hat{OA\Gamma} = \hat{O\Gamma E} \\ AZ = \Delta E = E\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{AOZ} = \hat{\Gamma OE} \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow \hat{AZO} = \hat{\Gamma EO} \Rightarrow AZOE$ ἐγγράψιμον.

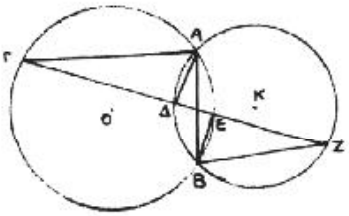
Παρατηρήσατε ἀκόμη ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΕΖ, ἄρα ἡ μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.



117. Δύο περιφέρειαι (Ο) καὶ (Κ) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Τυχούσα εὐθεία τέμνει τὴν (Ο) εἰς Γ καὶ Ε, τὴν (Κ) εἰς Δ καὶ Ζ. Ἂν ἡ διαδοχὴ τῶν σημείων εἶναι Γ-Δ-Ε-Ζ, θὰ δείξωμεν ὅτι $\hat{\Gamma A\Delta} = \hat{EBZ}$.

Ἀπόδειξις:

$\hat{\Gamma A\Delta} = \hat{A\Delta Z} - \hat{A\Gamma\Delta} = \hat{ABZ} - \hat{ABE} = \hat{EBZ}$.



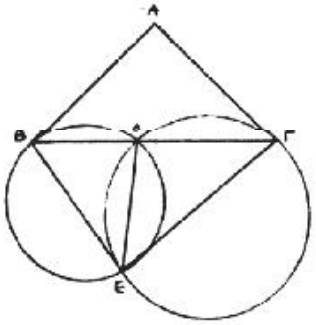
118. Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Θεωροῦμεν τοὺς δύο κύκλους διὰ τοῦ Δ οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς Β καὶ Γ. Ἐὰν Ε τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς των δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:

Εἶναι $\hat{BE\Delta} = \hat{B} = 45°$ (1)

$\hat{\Gamma E\Delta} = \hat{\Gamma} = 45°$ (2).

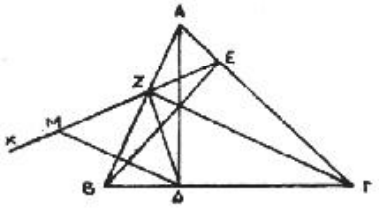
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\hat{A} = 90°$ ἔχομεν $\hat{A} + \hat{BE\Gamma} = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow ABE\Gamma$ ἐγγράψιμον. Ἄρα $\hat{AEB} = \hat{A\Gamma B} = 45°$ (3). (1), (3) $\Rightarrow \hat{BE\Delta} = \hat{BEA}$. Ἤτοι Α, Δ, Ε ἐπ' εὐθείας.



119. Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ποδὸς ἑνὸς ὕψους τριγώνου πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τοὺς πόδας τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν.

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστὸν (Ἀσκ. 97) τὰ ὕψη τριγώνου εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ. Συνεπῶς αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ. Ἤτοι

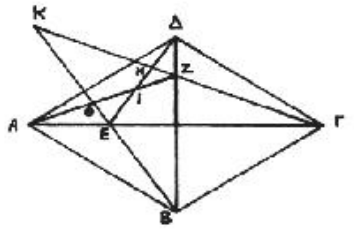


ἡ ΑΒ διχοτομεῖ τήν $x\hat{Z}\Delta$. Ἐάν ἐκ τοῦ Δ φέρωμεν τήν κάθετον ἐπί τήν ΑΒ τό σημεῖον τομῆς αὐτῆς μετά τῆς ΕΖ θά εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ Δ πρός ΑΒ. (Διότι τό $M\hat{Z}\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές).

120. Ἔστω Ε καί Ζ τυχόντα σημεῖα τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ ρόμβου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τάς ΔΕ καί ΑΖ τεμνομένας εἰς Ι, τάς ΒΕ, ΓΖ εἰς Κ. Ἐάν Η καί Θ τά σημεῖα τομῆς τῶν ΓΖ, ΔΕ καί ΑΖ, ΒΕ θά δείξωμεν ὅτι τό ΚΘΙΗ εἶναι ἐγγράψιμον.

Ἀπόδειξις:

Τά $B\hat{K}Z$ καί $\Delta\hat{I}Z$ ἔχουν ἴσας τάς γωνίας των ἀντιστοίχως. Διότι: $E\hat{B}Z = E\hat{A}B$ λόγῳ συμμετρίας πρός ΑΓ. Ἀκόμη $A\hat{Z}B = \Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{Z}K$ διά τόν αὐτόν λόγον (πρός ΒΔ). Ὅθεν $K\hat{Z}B = I\hat{Z}\Delta$. Ἄρα διά τά δύο τρίγωνα θά εἶναι καί $B\hat{K}Z = \Delta\hat{I}Z$.



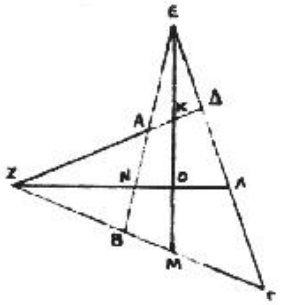
121. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ ἀπέναντι πλευραί τέμνονται εἰς Ε καί Ζ. Θά δείξωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{E}$ καί $\hat{Z}$ τέμνουν τάς πλευράς τοῦ τετραπλεύρου εἰς τέσσερα σημεῖα τά ὁποῖα εἶναι αἱ κορυφαί ἑνός ρόμβου.

Ἀπόδειξις:

Θά δείξωμεν ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα ΚΜ, ΝΛ τέμνονται δίχα καί καθέτως. Πρός τούτοις ἀρκετόν νά δείξωμεν ὅτι τά $N\hat{E}\Lambda$, $K\hat{Z}M$ εἶναι ἰσοσκελῆ. (Διατί;)

$Z\hat{K}M = A\hat{E}K + E\hat{A}K = M\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}M = E\hat{M}Z$.

Εἶναι δυνατόν τό ΚΝΜΛ νά εἶναι τετράγωνον; (Διά τήν ἀπάντησίν θά χρησιμοποιηθοῦν θεωρήματα ἐπί τῶν ὁμοίων τριγώνων).

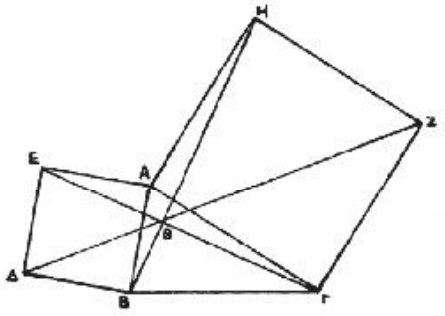


122. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΗ, ΓΕ, ΔΖ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AE \\ AH = A\Gamma \\ B\hat{A}H = \Gamma\hat{A}E = 90^\circ + \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BAH} = \overset{\Delta}{EA\Gamma} \quad (1)$$

Ἐάν Θ τό σημεῖον τομῆς τῶν ΒΗ, ΓΕ ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $A\hat{B}\Theta = A\hat{E}\Theta \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ΑΕΒΘ ἐγγράψιμον. Προφανῶς καί ΑΕΔΒΘ ἐγγράψιμον. Ὁμοίως ΑΗΖΓΘ ἐγγράψιμον. Ἄρα $\Delta\hat{\Theta}E = \Delta\hat{A}E = 45^\circ$ καί $Z\hat{\Theta}H = Z\hat{A}H = 45^\circ$, $E\hat{\Theta}H = 90^\circ$ ἤτοι



$\hat{\Delta\theta E} + \hat{E\theta H} + \hat{H\theta Z} = 180°$.

123. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως εἰς Ε. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $\hat{AB}E$, $\hat{B\Gamma}E$, $\hat{\Gamma\Delta}E$, $\hat{\Delta A}E$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων.

Ἀπόδειξις :

Ἐὰν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $\hat{AB}E$, $\hat{B\Gamma}E$, $\hat{\Gamma\Delta}E$, $\hat{\Delta A}E$ ἀντιστοίχως γνωρίζομεν ὅτι (Ἄσκ. 95) $2\rho_1 = AE + BE - AB$, $2\rho_2 = BE + \Gamma E - B\Gamma$, $2\rho_3 = \Gamma E + \Delta E - \Gamma\Delta$, $2\rho_4 = \Delta E + AE - A\Delta$. Προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

ΟΜΑΣ Β'.

124. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, Ι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Νὰ ἀποδειχθῇ :

α) Ἐὰν τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν σημείων Η, Ι, Ο ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τὸ τρίτον τῶν ἐν λόγῳ σημείων θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ.

β) $IH = IO$.

Ἀπόδειξις :

α) Ὑποθέσωμεν ὅτι Β, Γ, Η, Ο ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ι κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας περὶ τὸ ΒΓΗΟ. $B\hat{H}\Gamma = 180° - \hat{A}$ (1). Διότι $B\hat{H}\Gamma, \hat{A}$ ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους καὶ δὲν εἶναι ἴσαι. $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A}$ (2). Θὰ εἶναι βάσει τῆς ὑποθέσεως $B\hat{H}\Gamma = B\hat{O}\Gamma$ (3) ; (1), (2), (3) $\Longrightarrow \hat{A} = 60°$. Ἀλλὰ τότε $B\hat{H}\Gamma = 120°$ καὶ $B\hat{I}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2} = 120°$. Ὅθεν $B\hat{H}\Gamma = B\hat{I}\Gamma$.

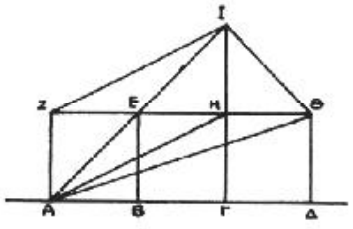
β) Ὡς γνωστὸν $H\hat{B}I = I\hat{B}O$ (Ἄσκ. 94), ἄρα $IH = IO$.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὰς Β, Γ, Η, Ι ἢ Β, Γ, Ο, Ι ἡ ἀπόδειξις τοῦ α) παρομοίως.

125. Ἐπὶ τῆς εὐθείας xy δίδονται 4 διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὥστε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta$. Κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΕ, ΓΔΘΗ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $H\hat{A}\Delta + \Theta\hat{A}\Delta = 45°$.

Ἀπόδειξις :

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\Theta\hat{A}\Delta = E\hat{A}H$. Προεκτείνομεν τὴν ΑΕ καὶ τὴν ΓΗ. Τέμνονται εἰς Ι. Φέρομεν τὴν ΙΘ. Τὰ $I\hat{H}E$, $I\hat{H}\Theta$ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ. Τὸ ΑΖΙΘ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ τὸ ΖΑΗΙ παραλληλόγραμμον.



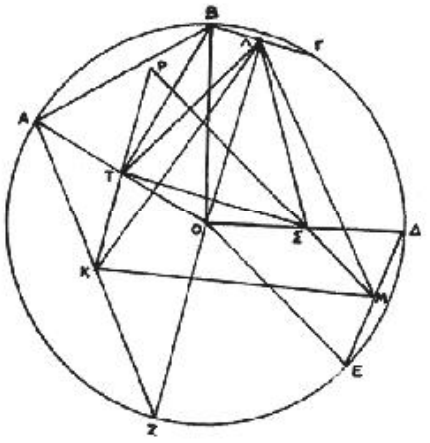
Έχομεν : παραλληλόγραμμον ΖΑΗΙ $\Rightarrow E\hat{A}H = Z\hat{I}A$, ἐγγράψιμον ΑΖΙΘ $\Rightarrow$ $\Rightarrow Z\hat{I}A = Z\hat{\Theta}A$ καὶ τέλος $Z\hat{\Theta}A = \Theta\hat{A}\Delta$ (ἐντὸς ἐναλλάξ).

Εἶναι δυνατὸν δι' ὁμοίων τριγώνων νὰ ἐπιτύχωμεν ἁπλουστέρας λύσεις;

126. Ἐπὶ περιφερείας (O, R) λαμβάνομεν διαδοχικῶς τρία τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{EZ}$ ὥστε $\overset{\frown}{AB} \cap \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \phi$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} \cap \overset{\frown}{EZ} = \phi$, $\overset{\frown}{EZ} \cap \overset{\frown}{AB} = \phi$ καὶ μέτρον $\overset{\frown}{AB}$ = μέτρον $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ = μέτρον $\overset{\frown}{EZ} = \frac{\pi}{3}$. Ἐὰν Κ, Λ, Μ τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΛΖ, ΒΓ, ΔΕ καὶ Τ, Σ τὰ μέσα τῶν ἀντίνων ΟΑ, ΟΔ ἀντιστοίχως, θὰ δείξωμεν:

α) Τὸ τρίγωνον ΛΤΣ εἶναι ἰσόπλευρον.

β) Τὸ τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον.



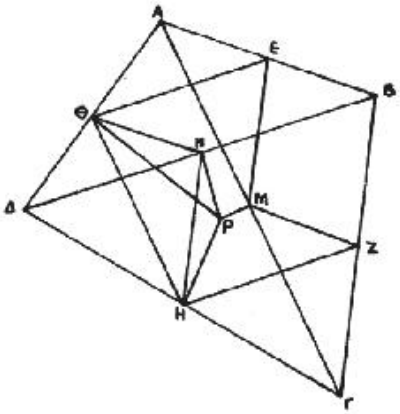
Ἀπόδειξις:

α) Τὸ $\overset{\Delta}{AOB}$ εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα $B\hat{T}O = 1^L$. Τὸ τετράπλευρον ΒΤΟΛ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ συνεπῶς $T\hat{\Lambda}O = T\hat{B}O = 30°$. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΛΤ, ΛΣ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ΟΛ ὅθεν $\overset{\Delta}{T\Lambda\Sigma}$ ἰσόπλευρον.

β) $KT \overset{//}{=} \frac{OZ}{2}$, $\Sigma M \overset{//}{=} \frac{OE}{2}$ ἄρα ΤΚ = ΣΜ. ΤΡΛΣ ἐγγράψιμον διότι $T\hat{P}\Sigma = T\hat{\Lambda}\Sigma = 60°$. Ἄρα $\Lambda\hat{T}K = \Lambda\hat{\Sigma}M$. Ἀκόμη ΛΤ = ΛΣ.

Αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες ἀποδεικνύουν τὴν ἰσότητα τῶν $\overset{\Delta}{\Lambda TK}$, $\overset{\Delta}{\Lambda\Sigma M}$ καὶ κατὰ συνέπειαν ΛΚ = ΛΜ καὶ $K\hat{\Lambda}M = T\hat{\Lambda}\Sigma = 60°$ ἤτοι $\overset{\Delta}{K\Lambda M}$ ἰσόπλευρον.

127. Εἰς πᾶν τετράπλευρον αἱ περιφέρειαι αἱ διερχόμεναι ἀπὸ τὰ μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν καὶ τοῦ μέσου τῆς περιεχομένης διαγωνίου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Ἀπόδειξις:

Θεωρήσωμεν τοὺς κύκλους περὶ τὰ $\overset{\Delta}{\Theta EM}$, $\overset{\Delta}{\Theta HN}$: Ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνονται εἰς σημεῖον Ρ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\Delta}{ZMH}$ (τὸ ἴδιο εἶναι διὰ τὸ $\overset{\Delta}{EZN}$) διέρχεται διὰ τοῦ Ρ. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ΗΡΜΖ εἶναι ἐγγράψιμον. Πράγματι

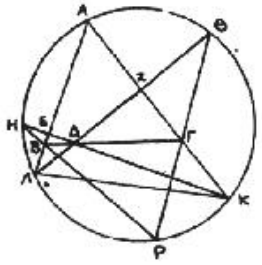
$M\hat{Z}H = A\hat{B}\Delta$ (1)

$H\hat{P}M = 360° - \Theta\hat{P}M - \Theta\hat{P}H = 360° - (180° - \Theta\hat{E}M) - \Theta\hat{N}H = 180° + \Theta\hat{E}M - \Theta\hat{N}H = 180° + \Delta\hat{B}\Gamma - A\hat{B}\Gamma$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow M\hat{Z}H + H\hat{P}M = 180° + A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}\Gamma - A\hat{B}\Gamma = 180°$.

128. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Δ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ. Φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως αἵτινες τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Κ καὶ Λ. Ἐὰν αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι τῆς ΒΓ ὡς πρὸς ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνονται εἰς Ρ θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΛΡΚ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις:

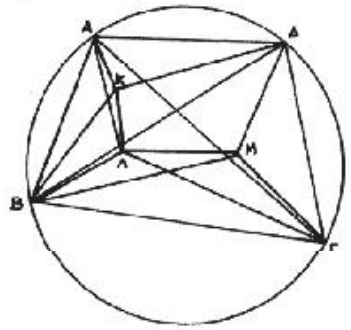


Εἶναι προφανές ὅτι τὸ Δ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{\Lambda A K}$. Ἄρα τὰ συμμετρικά του πρὸς ΑΛ, ΑΚ θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ $\hat{\Lambda A K}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ρ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἰδίας περιφερείας. Πράγματι $\hat{\Lambda H B} = \hat{\Lambda \Delta B}$ λόγῳ συμμετρίας πρὸς τὴν ΑΓ. Ἀλλὰ $\hat{B\Delta\Lambda} = \hat{\Gamma\Delta Z} = \hat{\Gamma\Theta Z}$ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον). Ἄρα $\hat{\Lambda H P} = \hat{\Lambda\Theta P}$.

Σημείωσις: Ἡ ἐκφώνησις δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς κάτωθι: Ἔστω Η, Θ τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Δ τριγώνου ΛΑΚ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΛ, ΑΚ. Ἐὰν Ρ τυχόν σημεῖον τοῦ $\hat{\Lambda K}$ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ΑΛ, ΗΡ καὶ ΑΚ, ΘΡ κεῖνται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Δ.

129. Ἔστω ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{AB\Delta}$, $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{B\Gamma\Delta}$, $\hat{\Gamma\Delta A}$ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Ἀπόδειξις:



$\hat{AB\Delta} \Rightarrow A\hat{K}B = 1^L + \frac{A\hat{\Delta}B}{2}$ (1)

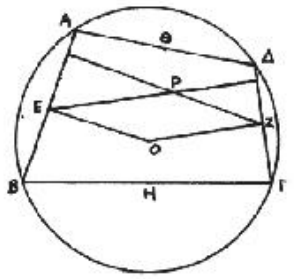
$\hat{AB\Gamma} \Rightarrow A\hat{\Lambda}B = 1^L + \frac{A\hat{\Gamma}B}{2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow A\hat{K}B = A\hat{\Lambda}B \Rightarrow AK\Lambda B$ ἐγγράψιμον.

Ὁμοίως ΒΛΜΓ ἐγγράψιμον. $K\hat{\Lambda}M = A\hat{\Lambda}\Gamma - K\hat{\Lambda}A - M\hat{\Lambda}\Gamma = 1^L + \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} - A\hat{B}K - \Gamma\hat{B}M = 1^L$.

130. Ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ λαμβανόμεναι οὕτω τέσσαρες εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



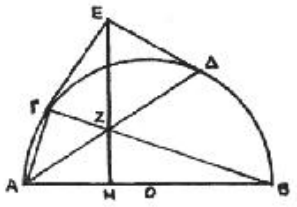
Αἱ ἐκ τῶν Ε καὶ Ζ κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀντιστοίχως τέμνονται εἰς Ρ. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΕΡΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα τὸ Ρ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο πρὸς τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Ἐξ ἄλλου τὸ μέσον τῆς ΘΗ ταυτίζεται πρὸς τὸ μέσον τῆς ΕΖ. (Ἀσκ. 12)

Ἄρα καὶ αἱ ὑπόλοιποι δύο κάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ Ρ.

131. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τυχόντα σημεῖα Γ, Δ ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ τέμνονται εἰς Ε. Ἐὰν εἶναι Ζ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΔ, ΒΓ θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις:

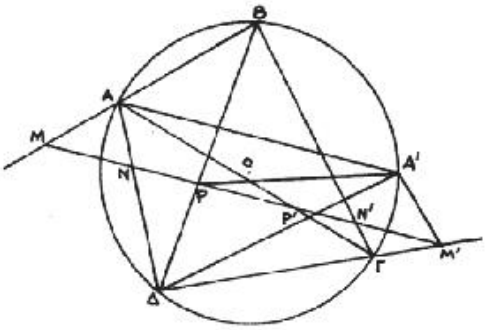
$\Gamma E\Delta O \Rightarrow \Gamma\hat{E}\Delta = 2^L - \Gamma\hat{O}\Delta \Rightarrow \frac{\Gamma\hat{E}\Delta}{2} = 1^L - \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2}$ (1). $\overset{\Delta}{\Gamma Z A} \Rightarrow \Gamma\hat{Z}\Delta = 1^L + \Gamma\hat{A}\Delta$ (2). (1), (2) $\Rightarrow \frac{\Gamma\hat{E}\Delta}{2} + \Gamma\hat{Z}\Delta = 2^L$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ Γ, Ζ, Δ κείνται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ε. Ἦτοι ΕΓ = ΕΖ = ΕΔ. Ἀλλὰ $E\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{A}B$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης). Ἄρα $E\hat{Z}\Gamma = \Gamma\hat{A}B$ ἤτοι ΑΓΖΗ ἐγγράψιμον.



132. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Εὐθεία (ε) τέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΔ, ΓΒ, ΓΔ, ΒΔ, ΑΓ εἰς σημεῖα Μ, Ν, Ν′, Μ′, Ρ, Ρ′ ἀντιστοίχως. Ἐὰν τὰ σημεῖα Μ, Μ′ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τότε καὶ τὰ Ν, Ν′ ὅπως καὶ τὰ Ρ, Ρ′ ἰσαπέχουν ἐπίσης ἀπὸ τὸ κέντρον.

Ἀπόδειξις:

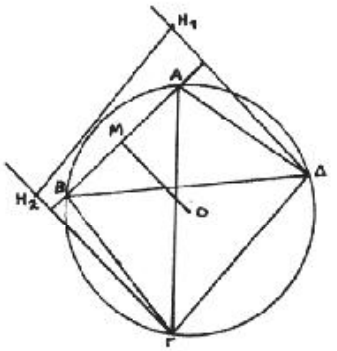
Φέρομεν τὴν $AA' \parallel (\varepsilon)$. Τὸ τετράπλευρον ΑΑ′Μ′Μ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Ἄρα $A'\hat{M}'P = B\hat{A}A' = B\hat{\Delta}A' \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ΡΑ′Μ′Δ ἐγγράψιμον. Ἐγγράψιμον ΡΑ′Μ′Δ $\Rightarrow P\hat{A}'M' + B\hat{\Delta}\Gamma = 2^L$, ἀλλὰ $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ καὶ $B\hat{A}\Gamma + M\hat{A}P' = 2^L$ συνεπῶς $P\hat{A}'M' = M\hat{A}P'$. Ἦτοι $\overset{\Delta}{MAP'} = \overset{\Delta}{M'A'P}$. Ὅθεν τὰ σημεῖα Ρ, Ρ′ ἰσαπέχουν τοῦ Ο. Ἡ ἰδία ἀπόδειξις γίνεται διὰ τὰ Ν, Ν′ (μὲ τὸ ἐγγράψιμον Α′Μ′ΓΝ′).



133. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων σχηματίζεται ἐκ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν καὶ μιᾶς διαγωνίου τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἴσου πρὸς τὸ δοθέν.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω H_1 καὶ H_2 τὰ ὀρθόκεντρα τῶν $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ἀντιστοίχως. Εἶναι γνωστὸν (Ἄσκ. 93) ὅτι $\Delta H_1 = 2OM$ καὶ $\Gamma H_2 = 2OM$. Ἄρα $\Delta H_1 H_2 \Gamma$ παραλληλόγραμμον. Ἦτοι $H_1H_2 \overset{\parallel}{=} \Gamma\Delta$ κ.τ.λ.



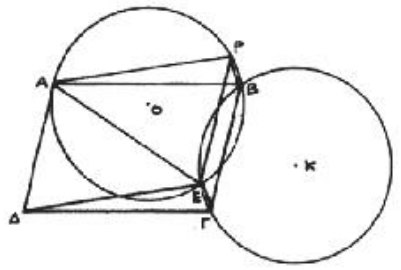
134. Με χορδάς τάς πλευράς ΑΒ καί ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γράφομεν δύο ἴσας περιφερείας (Ο), (Κ). Ἐάν Ε τό δεύτερον σημεῖον τομῆς των θά δείξωμεν ὅτι:

α) Αἱ περιφέρειαι (Λ) καί (Μ) αἱ περιγεγραμμέναι περί τά $\hat{\Delta AE}, \hat{\Delta\Gamma E}$ εἶναι ἴσαι πρός τάς (ο) καί (κ).

β) Τά σημεῖα ο, κ, λ, μ κεῖνται ἐπί περιφερείας κέντρου Ε καί ἀκτίνος ἴσης πρός τάς ἀκτίνας τῶν προηγουμένων κύκλων.

Ἀπόδειξις:

α) Σχηματίζομεν τά παραλληλόγραμμα ΓΕΡΒ, ΔΕΡΑ. Προφανῶς $\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{A P B}$. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τό σημεῖον Ρ κεῖται ἐπί τῆς περιφερείας (Ο). $\hat{E\Gamma B} = \hat{EAB}$ (1) διότι οἱ κύκλοι (ο) καί (κ) εἶναι ἴσοι. Ἀλλά $\hat{E\Gamma B} = \hat{EPB}$ (2) (1), (2) $\Rightarrow \hat{EAB} = \hat{EPB}$.

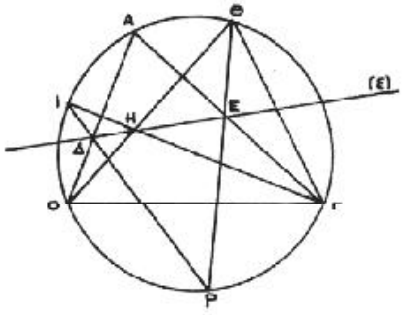


β) Εἶναι προφανές δεδομένου ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι καί διέρχονται διά τοῦ Ε.

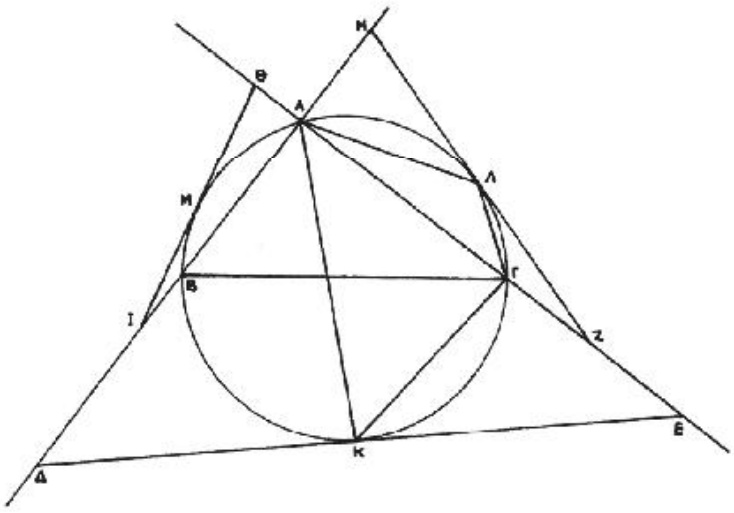
135. Διά τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται τυχούσα εὐθεῖα (ε). Νά δειχθῇ ὅτι αἱ συμμετρικαί εὐθεῖαι αὐτῆς ὡς πρός τάς τρεῖς πλευράς τοῦ τριγώνου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Δ, Ε τά σημεῖα τομῆς τῆς (ε) μετά τῶν ΑΒ, ΑΓ καί Ι, Θ τά συμμετρικά του Η πρός τάς ΑΒ καί ΑΓ. Τό συμμετρικόν τῆς (ε) πρός ΑΒ εἶναι ἡ ΙΔ, τῆς (ε) πρός ΑΓ ἡ εὐθεία ΘΕ. Θά δείξωμεν ὅτι τό σημεῖον τομῆς τῶν ΙΔ, ΘΕ κεῖται ἐπί τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περί τό $\hat{AB\Gamma}$. $\hat{PIH} = \hat{\Delta HI}$ λόγῳ συμμετρίας. $\hat{\Delta HI} = \hat{EH\Gamma} = \hat{E\Theta\Gamma}$. Ἄρα $\hat{PI\Gamma} = \hat{P\Theta\Gamma}$. Ἡ συμμετρική εὐθεία τῆς (ε) πρός ΒΓ τέμνει τάς ΙΔ, ΘΕ εἰς σημεῖα κείμενα ἐπί τῆς περιφερείας ΑΒΓ. Ἐπειδή δέ δέν ταυτίζεται μέ τήν ΙΘ ἕπεται ὅτι ἡ ἐν λόγῳ εὐθεία διέρχεται διά τοῦ σημείου Ρ.



136. Ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν. Προεκτείνομεν τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας καί φέρομεν τάς ἐφαπτομένας εἰς ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, εἰς τρόπον ὥστε τό σημεῖον ἐπαφῆς νά εἶναι τό μέσον ἑκάστοτε τοῦ ἀποκοπτομένου τμήματος ἐπί τῆς ἐφαπτομένης ὑπό τῶν εὐθειῶν ΑΒ καί ΑΓ. Νά δειχθῇ ὅτι τά τρία σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι κορυφαί ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Απόδειξις:

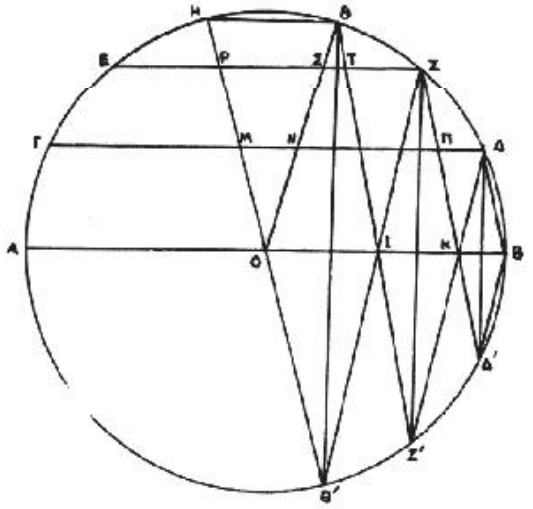
Επί τοῦ σχήματος:

$\Lambda\hat{A}\Gamma = \Lambda\hat{Z}\Gamma$ ∧ $\Lambda\hat{A}\Gamma = Z\hat{\Lambda}\Gamma \Rightarrow \Lambda\hat{\Gamma}A = 2\,\Lambda\hat{A}\Gamma \Rightarrow \overset{\frown}{A\Lambda} = 2\,\overset{\frown}{\Lambda\Gamma}$ (1).

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $\overset{\frown}{AK} = 2\,\overset{\frown}{K\Gamma}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \Lambda\hat{A}K = 2\,\Lambda\hat{\Gamma}K \Rightarrow$ μέτρον $\Lambda\hat{\Gamma}K = \frac{\pi}{3}$.

137. Ἡμιπεριφέρεια διαιρεῖται εἰς ἑπτὰ ἴσα τόξα διὰ χορδῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διάμετρόν της. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τμημάτων τὰ ὁποῖα ἀποκόπτουν αἱ δύο ἀκτῖνες αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ ἄκρα τῆς μικροτέρας χορδῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἡμιπεριφερείας.



Απόδειξις:

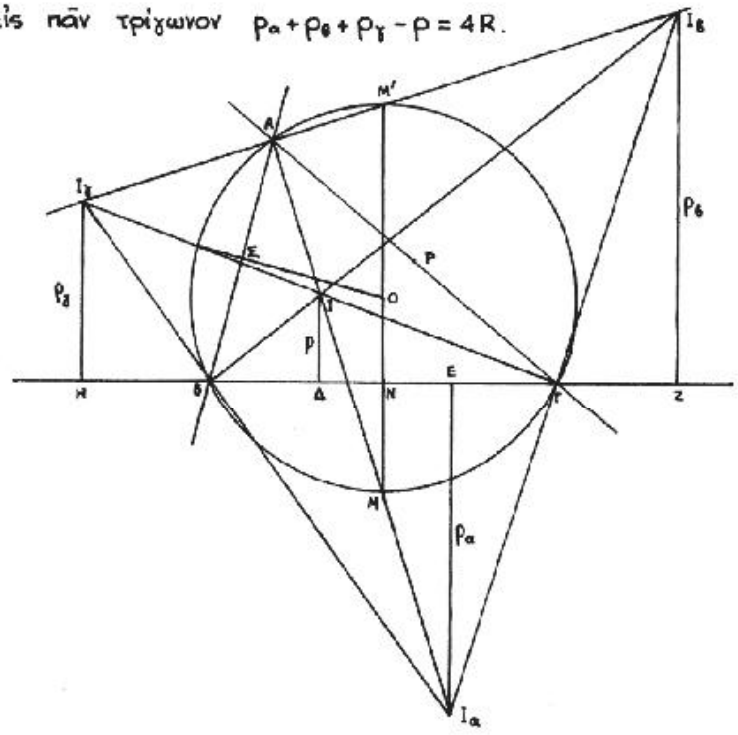
Θὰ δείξωμεν (ἴδε σχῆμα) ὅτι $MN + P\Sigma + H\Theta = R$.

Θεωροῦμεν τὰ συμμετρικὰ Θ', Z', Δ' τῶν Θ, Z, Δ πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ. Ἐπειδὴ $H\Theta \parallel AB$ τὸ Θ' θὰ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον

τοῦ Η. Εἶναι προφανές ὅτι Ηθ′ ∥ θz′ ∥ zΔ′ ∥ ΔΒ καὶ τά ηθιο, τzκι, ΠΔΒκ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἀκόμη ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως:

$$\left.\begin{array}{l} H\theta = OI \\ PZ = TZ = I\kappa \\ MN = \Pi\Delta = \kappa B \end{array}\right\} \Rightarrow MN + P\Sigma + H\theta = R.$$

138. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = 4R$.



Ἀπόδειξις:

Τό ΑΒΓ εἶναι τό ὀρθικόν τοῦ $I_\alpha\hat{I}_\beta I_\gamma$. Ἄρα ὁ κύκλος (Ο) εἶναι ὁ κύκλος τοῦ Euler τοῦ $I_\alpha\hat{I}_\beta I_\gamma$. Θά διέρκεται κατά συνέπειαν ἀπό τά μέσα τῶν $I_\beta I_\delta$, $I_\delta I_\alpha$, $I_\alpha I_\beta$ καὶ τά μέσα τῶν H_α, H_β, H_γ.

Διά τό τραπέζιον $ZI_\beta I_\delta H$ εἰς τό ὁποῖον NM′ εἶναι ἡ διάμεσος: $2NM' = \rho_\beta + \rho_\gamma$ (1).

Διά τό τραπέζιον ΔIEI_α M, N τά μέσα τῶν διαγωνίων $2NM = \rho_\alpha - \rho$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow 4R = \rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho$.

Σημείωσις:

Εἶναι δυνατόν νά ἐπιτύχωμεν ἁπλῆν λύσιν διά τῶν τύπων $E = \tau\rho$, $E = \rho_\alpha(\tau - \alpha)$, ... κ.τ.λ.

139. Ἐάν Ν, Ρ, Σ τά μέσα τῶν πλευρῶν ὀξυγωνίου τριγώνου καὶ Ο τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νά ἀποδειχθῇ ὅτι $ON + OP + O\Sigma = R + \rho$.

Ἀπόδειξις:

Ἐπί τοῦ σχήματος τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Εἰς τό προηγούμενον πρόβλημα ἀπεδείχθη ὅτι $2MN = \rho_\alpha - \rho \Rightarrow 2(R - ON) = \rho_\alpha - \rho$. Ὁμοίως

$2(R-OP)=\rho_\beta-\rho$ καὶ $2(R-O\Sigma)=\rho_\gamma-\rho$. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν τριῶν ἐκ τῶν ἐχομεν $2[3R-ON-OP-O\Sigma]=\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma-3\rho=4R-2\rho$ (Ἄσκ. 138) ἢ $3R-ON-OP-O\Sigma=2R-\rho \Rightarrow ON+OP+O\Sigma=R+\rho$.

Παρατηρήσεις:

Ἐὰν $A>1^L$ ὁ τύπος γίνεται $OP+O\Sigma-ON=R+\rho$.

140. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἐὰν $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Delta}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, $B\hat{A}\Delta$ ἀντιστοίχως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\rho_1+\rho_2=\rho_3+\rho_4$.

Ἀπόδειξις:

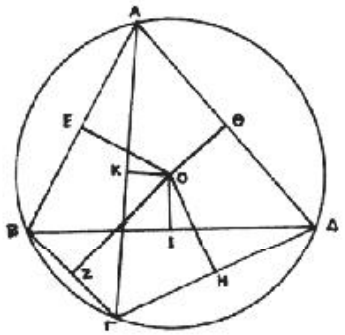
Ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος (Ἄσκ. 139) ἔχομεν:

$A\hat{B}\Gamma$: $OE+OZ-OK=R+\rho_1$ (1)

$A\hat{\Gamma}\Delta$: $O\Theta+OH+OK=R+\rho_2$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow OE+OZ+OH+O\Theta=$

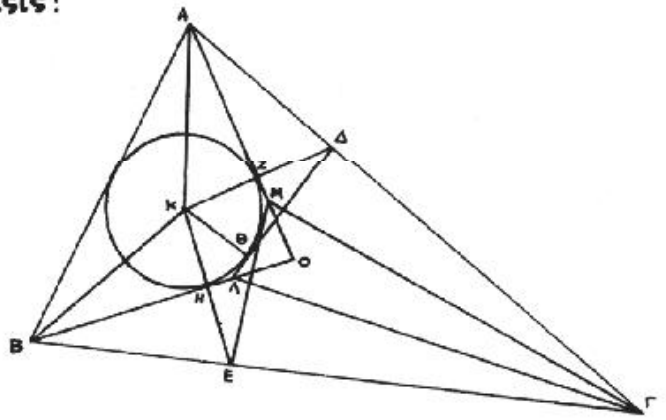
$=2R+\rho_1+\rho_2$, κ.τ.λ...



141. Θεώρημα τοῦ Morley.

Αἱ παρακείμεναι πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τριχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τεμνόμεναι σχηματίζουν τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἀπόδειξις:



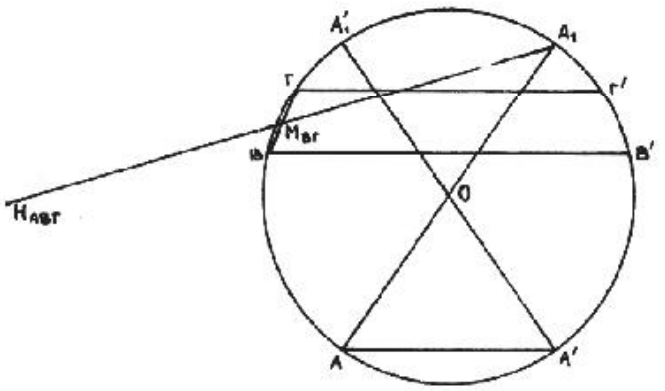
Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον. Τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς $A\hat{O}B$. Ἡ ΚΖ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΘ εἰς τὸν κύκλον (Κ), ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΘΛ εἰς σημεῖον Λ'. Θὰ δείξωμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι τὰ Λ, Λ' ταυτίζονται. Διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΘΚΔ: $K\Delta=2K\Theta \Rightarrow K\hat{\Delta}\Theta=30^\circ$ καὶ $\Delta\hat{K}\Theta=60^\circ$, $H\hat{K}Z=180^\circ-A\hat{O}B$, $A\hat{O}B=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}}{3}+\frac{\hat{B}}{3}=$ $=60^\circ+\frac{2}{3}\hat{\Gamma}$. Ἄρα $H\hat{K}Z=120^\circ-\frac{2}{3}\hat{\Gamma}$. Ἀκόμη $\Lambda'\hat{E}H=\Lambda'\hat{K}H$ λόγῳ συμμετρίας. $\Lambda'\hat{K}H=\frac{1}{2}H\hat{K}\Theta=$ $=\frac{1}{2}(H\hat{K}Z-60^\circ)=30^\circ-\frac{\hat{\Gamma}}{3}$. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς $E\hat{K}\Delta$ $K\hat{E}\Delta=K\hat{\Delta}E=\frac{1}{2}H\hat{O}Z=30^\circ+\frac{\hat{\Gamma}}{3}$.

Ἄρα $\Lambda'\hat{E}\Delta = K\hat{E}\Delta - \Lambda'\hat{E}K = 30^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{3} - (30^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{3}) = \frac{2}{3}\hat{\Gamma}$ καὶ $\Lambda'\hat{\Delta}E = K\hat{\Delta}E - K\hat{\Delta}\Lambda' = 30^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{3} - 30^\circ = \frac{\hat{\Gamma}}{3}$. Ὅθεν τὸ συμπέρασμα ὅτι $\Lambda'\Delta\Gamma E$ ἐγγράψιμον καὶ κατ' ἀνάγκην $\Lambda \equiv \Lambda'$.

Μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς ἡ ἐκ τοῦ E ἐφαπτομένη τοῦ (κ) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ M. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου EKZ διαπιστοῦται συμμετρία καθ' ἣν $ZM = \theta\Lambda$, $z\hat{K}M = \theta\hat{K}\Lambda$ ἤτοι. $\Lambda\hat{K}M = \theta\hat{K}Z = 60^\circ$ καὶ $KM = K\Lambda$.

142. Ἐπὶ περιφερείας (o) δίδονται τρεῖς παράλληλαι χορδαὶ AA', BB', $\Gamma\Gamma'$. Ἔστω G τὸ σύνολον τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων κορυφαὶ εἶναι τὰ πέρατα τῶν χορδῶν ἔτσι ὅμως ὥστε δύο κορυφαὶ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου νὰ μὴν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν χορδήν (ἢ μία κορδὴ δὲν εἶναι πλευρὰ οὐδενὸς τριγώνου). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων τοῦ συνόλου G κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:



Τὸ σύνολον G περιέχει ὀκτὼ τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $AB'\Gamma'$, $AB\Gamma'$, $AB'\Gamma$ καὶ $A'B\Gamma$, $A'B'\Gamma'$, $A'B\Gamma'$, $A'B'\Gamma$.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ κάτωθι λῆμμα:

Λῆμμα: Ἔστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ (o) ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του. Ἐὰν A_1 τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ A καὶ $M_{B\Gamma}$ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τὸ ὀρθόκεντρον $H_{AB\Gamma}$ τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A_1 πρὸς $M_{B\Gamma}$.

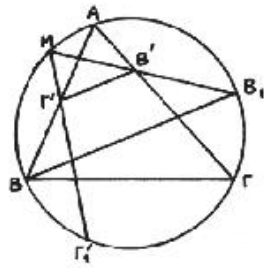
Ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος δὲν παρουσιάζει δυσκολίας.

Ἐνταῦθα (ἰδὲ σχῆμα) τὰ σημεῖα $M_{B\Gamma}$, $M_{B'\Gamma'}$, $M_{B\Gamma'}$, $M_{B'\Gamma}$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (n) μεσοπαραλλήλου τῶν BB', $\Gamma\Gamma'$. Ἐπειδὴ δὲ $A_1M_{B\Gamma} = M_{B\Gamma}H_{AB\Gamma}$, $A_1M_{B'\Gamma'} = M_{B'\Gamma'}H_{AB'\Gamma'}$, $A_1M_{B'\Gamma} = M_{B'\Gamma}H_{AB'\Gamma}$, $A_1M_{B\Gamma'} = M_{B\Gamma'}H_{AB\Gamma'}$ ἕπεται ὅτι καὶ $H_{AB\Gamma}$, $H_{AB'\Gamma'}$, $H_{AB\Gamma'}$, $H_{AB'\Gamma}$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (n_1) ἀπεχούσης τὸ διπλάσιον ἀπὸ τὸ A_1 ἀπὸ ὅτι ἡ (n) (εἶναι ἡ ὁμοιόθετος τῆς n πρὸς A_1 μὲ λόγον $\frac{2}{1}$).

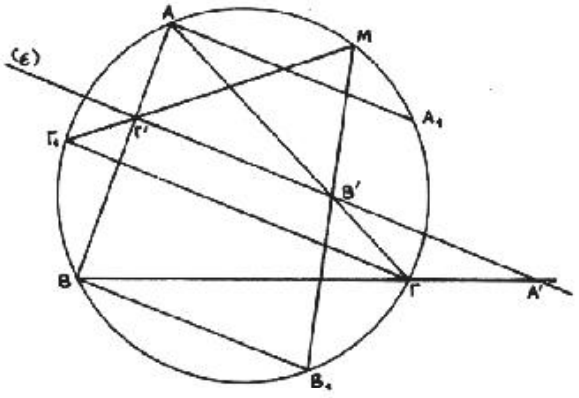
Τὰ αὐτὰ πράγματα ἔχομεν τὰ εἴπωμεν διὰ τὰ τρίγωνα $A'B\Gamma$, $A'B'\Gamma'$, $A'B\Gamma'$, $A'B'\Gamma$. Ἐὰν εἶναι (n_1') ἡ εὐθεία τῶν ὀρθοκέντρων τῶν νέων τριγώνων, δεδομένου ὅτι $A_1A_1' \parallel n, n_1, n_1'$ καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὰ ζεύγη (A_1A_1', n_1), (A_1A_1', n_1'), ἔχουν μεσοπαράλληλον τὴν (n) προκύπτει ὅτι $n_1 \equiv n_1'$.

143. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεία (ε) τέμνουσα τὰς πλευρὰς του εἰς A', B', Γ'. Ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἄγονται αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν (ε) τέμνουσαι τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ $A'A_1, B'B_1, \Gamma'\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



(α)



(β)

Θὰ ἀποδείξωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ κάτωθι λῆμμα:

Ἐὰν B', Γ' σημεῖα τῶν πλευρῶν $A\Gamma, AB$ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ καὶ αἱ ἐκ τῶν B, Γ παράλληλοι τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν τοῦ τριγώνου εἰς B_1, Γ_1, αἱ εὐθεῖαι $B_1B', \Gamma_1\Gamma'$ τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Πρὸς τούτοις φέρομεν τὴν $BB_1 \parallel \Gamma'B'$. Ἐὰν Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς B_1B' μετὰ τῆς περιφερείας καὶ Γ_1' τὸ σημεῖον τομῆς τῆς $M\Gamma'$ μετὰ τῆς περιφερείας ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\Gamma_1 \equiv \Gamma_1'$.

$B\hat{B}_1M = \Gamma'\hat{B}'M$ (1) $B\hat{B}_1M = B\hat{A}M$ (2), (1),(2) $\Rightarrow$ ΜΑΒ'Γ' ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἄρα $M\hat{B}'A = M\hat{\Gamma}'A \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma_1'} = \overset{\frown}{B_1\Gamma}$.

Βάσει τοῦ λήμματος λύεται εὐκόλως τὸ τεθὲν πρόβλημα 143. Διότι αἱ εὐθεῖαι $A_1A', B_1B', \Gamma_1\Gamma'$ ἐκ. (β) τέμνονται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς περιφερείας. Δεδομένου ὅτι δὲν ταυτίζονται μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Παρατηρήσεις.

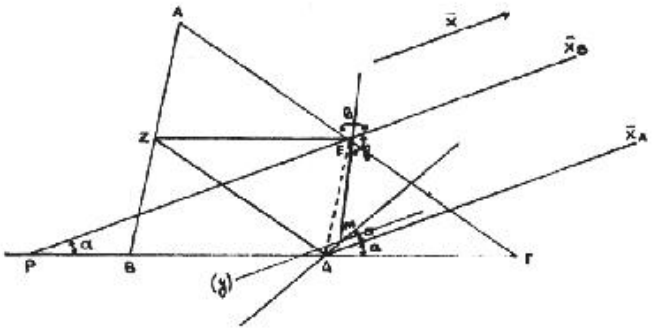
Βάσει τοῦ λήμματος δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα:

Δίδεται τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείου Μ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας του. Ἐὰν αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν A, B, Γ ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν τοῦ ΑΒΓ εἰς A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως καὶ θέσωμεν $A' = B\Gamma \cap MA_1$, $B' = \Gamma A \cap MB_1$, $\Gamma' = AB \cap M\Gamma_1$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα A', B', Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος εἴδομεν ὅτι αἱ $MA', MB', M\Gamma'$ εἶναι ἰσόκλινεῖς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ἄρα κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ γενικευμένου θεωρήματος τοῦ Simson τὰ A', B', Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

144. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν (x) τυχοῦσα εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν Δ, Ε, Ζ φέρομεν τὰς παραλλήλους $(x_A), (x_B), (x_\Gamma)$ πρὸς (x). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ συμμετρικὰ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ πρὸς $(x_A), (x_B), (x_\Gamma)$ ἀντιστοίχως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις :



Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς ΒΓ πρὸς (x_A), τὸ συμμετρικὸν τῆς ΓΑ πρὸς (x_B) καὶ τὸ συμμετρικὸν τῆς ΑΒ πρὸς (x_Γ) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Πρὸς τοῦτοις εἶναι ἀρκετὸν νὰ δείξωμεν ὅτι δύο τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΔΕΖ. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ συμμετρικὰ τῶν ΒΓ πρὸς (x_A) καὶ ΓΑ πρὸς (x_B) τέμνονται εἰς σημεῖον Μ. Ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΔΓΕ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν (x) προκύπτει ἀμέσως ὅτι : $\Delta\hat{M}E = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ (1) ὅπου $\hat{\alpha}$ ἡ γωνία (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) τῆς ΒΓ καὶ τῆς (x) καὶ $\hat{\beta}$ ἡ γωνία τῆς ΑΓ καὶ τῆς (x).

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ $P\hat{E}\Gamma$ (ἴδε σχῆμα) βλέπομεν ὅτι $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$ (2).

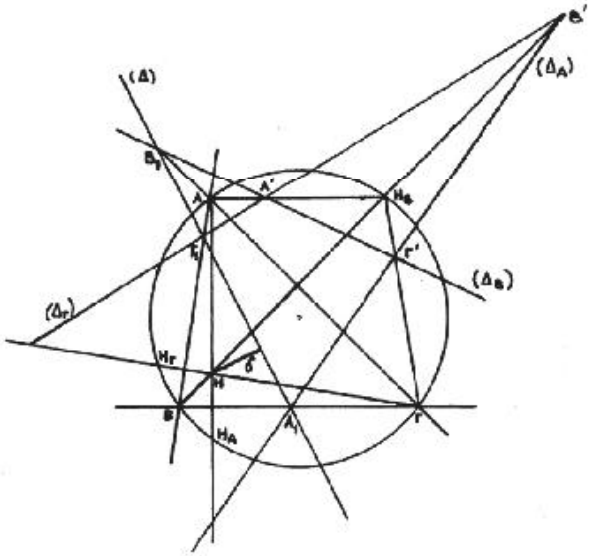
(1), (2) $\Longrightarrow$ $E\hat{Z}\Delta + \Delta\hat{M}E = \hat{\Gamma} + 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ΔΕΓ γίνεται παρομοία ἀπόδειξις.

145. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεία (Δ) τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἔστω $(\Delta_A), (\Delta_B), (\Delta_\Gamma)$ τὰ συμμετρικὰ τῆς (Δ) πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Θέτομεν $A' = (\Delta_B) \cap (\Delta_\Gamma)$, $B' = (\Delta_\Gamma) \cap (\Delta_A)$, $\Gamma' = (\Delta_A) \cap (\Delta_B)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Κ, δ) τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο) τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ἀκτὶς δ αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (Δ).

Ἀπόδειξις :

Θέτομεν $A_1 = B\Gamma \cap (\Delta)$, $B_1 = \Gamma A \cap (\Delta)$, $\Gamma_1 = AB \cap (\Delta)$. Τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ $A'\hat{B}_1\Gamma_1$. Τὸ σημεῖον Γ' τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς $\Gamma'\hat{A}_1B_1$ καὶ τέλος τὸ Β τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ $B'\hat{A}_1\Gamma_1$. Τοῦτο σημαι-



νει ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ $\hat{A'B'\Gamma'}$ εἶναι αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας (O). Διότι ἔστω $H'_B = AA' \cap BB'$. Ἀλλὰ διὰ τὸ $A'\hat{B}_1\Gamma_1 \Longrightarrow B\hat{A}H'_B = 1^L + \frac{A'\hat{B}_1\Gamma_1}{2}$, $\Gamma'\hat{A}_1B_1 \Longrightarrow B\hat{\Gamma}H'_B = 1^L - \frac{A'\hat{B}_1\Gamma_1}{2}$ ἤτοι $AB\Gamma H'_B$ ἐγγράψιμον καὶ $H_B \equiv H'_B$.

Τὰ σημεῖα H, H_B εἶναι συμμετρικὰ πρὸς $A\Gamma$, ὡς ἐπίσης καὶ αἱ (Δ) καὶ (Δ_B). Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων H, H_B ἀπὸ τὰς $(\Delta), (\Delta_B)$ ἀντιστοίχως εἶναι ἴσαι. Ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἡ $(K = H_B, \delta)$.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου προκύπτουν τὰ κάτωθι :

α) Ἐὰν (Δ) εἶναι ἡ εὐθεῖα Simson τοῦ σημείου κ τότε ἡ (Δ) θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (κ, δ).

β) Ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(I_\beta, \rho_\beta), (I_\gamma, \rho_\gamma)$ εἶναι ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς $B\Gamma$ κάθετος ἐπὶ τὴν $I_\beta I_\gamma$. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα Simson τοῦ μέσου τοῦ τόξου $B\hat{A}\Gamma$ (τὸ μέσον τοῦ $B\Gamma$ ἔχει ὡς εὐθεῖα Simson τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν $(I, \rho), (I_a, \rho_a)$).

Βάσει τῶν ἀνωτέρω καὶ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος δυνάμεθα νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων $(I), (I_a), (I_\beta), (I_\gamma)$ ἀνὰ δύο καὶ τὰ συμμετρικά του πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἐφάπτονται μιᾶς περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ μέσον τῆς διακέντρου των.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

146. Δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α κεῖνται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ Β.

147. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς Α. Φέρομεν διὰ τοῦ Α δύο τεμνούσας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ χορδαὶ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν προηγουμένων εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι.

148. Δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τῶν Α καὶ Β ἄγονται εὐθεῖαι τέμνουσαι τοὺς κύκλους εἰς Γ,Δ καὶ Ε,Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma E \parallel \Delta Z$.

149. Διὰ σημείου Μ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται αἱ κάθετοι ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΕΖΓ εἶναι ἐγγράψιμον.

150. Ἡ παρεγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ.

151. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Γ τόξου ΑΒ περιφερείας (Ο) ἀχθοῦν χορδαὶ ΓΔ, ΓΕ τέμνουσαι τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

152. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς Α. Μία εὐθεῖα τέμνει αὐτὰς εἰς Β, Γ, Δ, Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$.

153. Ἐπὶ εὐθείας (ε) δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Θεωροῦμεν τὰς περιφερείας διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΕΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΒΕ, ΓΖ, ΔΖ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς ἑνὸς ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (ε).

154. Διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Β, Ι, Γ, $I_α$ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ.

155. Τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνομεν τὴν ΒΑ κατὰ $AΔ = AΓ$. Τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $B\hat{Δ}Γ$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τό-

156. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεία $I_\beta I_\gamma$ σχηματίσει μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν ἴσην πρὸς $\left|\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right|$.

157. Χορδὴ κύκλου χωρίζεται εἰς ν ἴσα μέρη. Διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως φέρομεν τὰς ἀκτῖνας. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τόξα βαίνουν ἐλαττούμενα ἀπὸ τοῦ μεσαίου πρὸς τὰ ἄκρα.

158. Περιφέρεια (ο) ἐφάπτεται εὐθείας (ε) εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ περιφερείας (κ) εἰς Β. Ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τὴν (κ) εἰς Γ. Δείξατε ὅτι ΓΚ ⊥ (ε).

159. Δίδεται κύκλος (ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ ΓΔ χορδὴ τέμνουσα τὴν ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ εἶναι ἴσαι.

160. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τοῦ ἐχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

161. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του μετὰ τοῦ κύκλου (I_α, ρ_α). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ $\hat{\Delta E Z}$.

162. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἡ ἀκτὶς δὲ τῆς μίας εἶναι τριπλασία τῆς ἀκτῖνος τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ποὺ σχηματίζει ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη μετὰ τῆς διακέντρου.

163. Μὲ χορδὰς τὰς πλευρὰς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον γράφομεν περιφερείας. Δείξατε ὅτι τὰ τέσσερα σημεῖα τομῆς τῶν παρακειμένων περιφερειῶν εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

164. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα δύο καθέτων χορδῶν κύκλου σχηματίζουν ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον τετράπλευρον.

165. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τυχόντος τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

166. Ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων περιφερειῶν νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον. Ἀκόμη ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν διάμεσον τῶν προηγουμένων κύκλων ἐφάπτεται τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

167. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο τῆς

ΒΔ καὶ ἀκτῖνα ΟΛ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ, ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΓΖΔ εἶναι ἴσα.

168. Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (κ) καὶ Μ τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ θὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

169. Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν κοινῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων μὲ τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας δύο κύκλων εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

170. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Θ εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖΘΗ καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $\hat{ΑΒΓ}$ δείξατε ὅτι ΟΘ ⊥ ΒΓ.

171. Ἐὰν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ ἐγγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ ἐφάπτονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ΑΓ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον. Τὸ ἀντίστροφον ἰσχύει;

172. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνονται εἰς Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Ε καὶ Ζ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ.

173. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{Β} = 90° + \hat{Γ}$. Ἐὰν ΑΔ τὸ ὕψος καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΔ = ΔΗ.

174. Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΔΕ ⊥ ΑΒ. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ ΑΒΓ, Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Κ τὸ μέσον τῆς ΟΜ. Δείξατε ὅτι ΚΕ = ΚΓ.

175. Δίδεται γωνία xOy καὶ Α, Β σημεῖα εἰς τὸ ἐσωτερικόν της ὥστε $\hat{xOA} = \hat{yOB}$. Ἐὰν Γ, Δ αἱ προβολαὶ τοῦ Α ἐπὶ τῶν Ox, Oy καὶ Ε, Ζ αἱ προβολαὶ τοῦ Β ἐπὶ τῶν Ox, Oy νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ὁμοκυκλικά.

176. Ἔστω Δ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς μεσοκαθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\hat{Α}$. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

177. Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ διὰ τοῦ Α φέρομεν δύο εὐθείας συμμετρικὰς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\hat{Α}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΔ τοῦ παραλληλο-

γράμματα εἰς τέσσερα ὁμοκυκλικὰ σημεῖα.

178. Ἐάν ἐκ τῶν κορυφῶν A, B, Γ τριγώνου $AB\Gamma$ ἀχθοῦν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τέμνουσαι τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς A', B', Γ' ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ.

179. Αἱ διαγώνιοι $A\Gamma, B\Delta$ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς K. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν τῶν $K\hat{A}B, K\hat{B}\Gamma, K\hat{\Gamma}\Delta, K\hat{\Delta}A$ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

180. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Διὰ τοῦ Δ ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον A τέμνουσα τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $B'\Delta = \Delta\Gamma'$.

181. Εἰς κύκλον (O) φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ τὴν κάθετον ἀκτῖνα $O\Gamma$. Προεκτείνομεν τὴν $O\Gamma$ κατὰ τμῆμα $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $3\,O\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}O$.

182. $AB\Gamma$ καὶ $AB'\Gamma'$ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας περὶ τὸ $A\hat{B}B'$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ $A\hat{\Gamma}\Gamma'$.

183. Ἐάν $AB\Gamma\Delta EZ$ ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον νὰ δειχθῇ $(AB \parallel \Delta E) \wedge (B\Gamma \parallel EZ) \Longrightarrow \Gamma\Delta \parallel AZ$.

184. Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $O\Gamma$ κύκλου (O) διαμέτρου ΓE λαμβάνεται σημεῖον A. Ἡ περιφέρεια (A, AO) τέμνει τὴν (O) εἰς B ἡ δὲ εὐθεία BA τέμνει τὴν (O) εἰς Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta\hat{O}E = 3\,B\hat{O}\Gamma$.

185. Δίδεται κύκλος (O) διαμέτρου AB. Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ P τυχὸν σημεῖον τῆς AB. Ἐάν Ω καὶ Ω' τὰ κέντρα τῶν κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα APM καὶ BPM νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Ω, Ω', P, O, M εἶναι ὁμοκυκλικά.

186. Διὰ σημείου P περιφερείας (o) ἄγεται κάθετος PM ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς AB. Μὲ διαμέτρους MA καὶ MB γράφομεν περιφερείας αἱ ὁποῖαι ἐπανατέμνονται ὑπὸ τῶν PA, PB εἰς σημεῖα Γ, Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε α) ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ διχοτομεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα PM β) ἐφάπτεται τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν.

187. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 1^{\text{L}})$ ἄγεται τὸ ὕψος $A\Delta$.

Ἐὰν ρ, ρ_1, ρ_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $A\hat{B}\Gamma, A\hat{\Delta}B, A\hat{\Delta}\Gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\rho+\rho_1+\rho_2 = A\Delta$.

188. Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς ἐγγεγραμμένους κύκλους εἰς τὰ ἓξ τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τρίγωνον ΑΒΓ ὑπὸ τῶν ὑψῶν του τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέτρων τῶν ἐν λόγῳ κύκλων πύξημένον κατὰ τὴν περίμετρον τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ἄθροισμα τῶν ὑψῶν τοῦ $A\hat{B}\Gamma$.

189. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω Β' καὶ Γ' τὰ συμμετρικὰ τῶν Β καὶ Γ πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἐὰν Κ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν Β'Γ καὶ Γ'Β νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΚ διχοτομεῖ τὴν $B\hat{K}\Gamma$ καὶ διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $A\hat{B}\Gamma$.

190. Ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν περὶ τὸ τρίγωνον εἰς τὸ σημεῖον Ε νὰ δειχθῇ ὅτι ΒΔ = ΒΕ. (Θεώρημα τοῦ Casey).

191. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ περιφερείας ἄγονται αἱ κάθετοι ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΕΖ, ΜΗΘ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

192. Ἔστω περιφέρεια (ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ Γx ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (ο). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς Γx καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΜΔ τοῦ (ο). Ἡ ΑΔ καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνονται εἰς σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Β, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

193. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰς προβολὰς τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἐπὶ τῶν πλευρῶν εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον. Ἀκόμη νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ ἐν λόγῳ τετράπλευρον διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

194. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΒΔ, ΓΕ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Δ, Ε τοῦ κύκλου περὶ τὸ ΒΕΔΓ διέρχονται διὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΗ (Η ὀρθόκεντρον).

195. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι περιφέρειαι διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων

τομῆς τῶν περιφερειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν δύο ἄλλων σημείων τομῆς αὐτῶν.

196. Ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς κορυφὰς Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ τὴν ΑΓ εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΕΗ = ΗΖ.

197. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἔστω Δ, Ε τὰ μέσα τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ εὐθύγραμμον ΔΕ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

198. Παντὸς πολυγώνου $A_1A_2A_3\ldots A_{2\nu}$ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἔχοντος ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιττῆς τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἀρτίας τάξεως.

199. Ἐὰν πολύγωνον $A_1A_2\ldots A_{2\nu}$ (μὲ ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν) εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἐχουσῶν ἀρτίαν τάξιν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του ἐχουσῶν περιττὴν τάξιν.

200. Ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου λαμβάνομεν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB} = 100^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 70^\circ$, $\overset{\frown}{\Gamma Z} = 80^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων του καὶ αἱ γωνίαι αἵτινες σχηματίζονται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

201. Δίδεται περιφέρεια (ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτῆς. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ Ν τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $MN \leqslant \max[MA, MB]$.

202. Ἐπὶ περιφερείας λαμβάνομεν τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ διαδοχικῶς. Ἐὰν Κ, Λ, Μ, Ν τὰ μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{B\Gamma}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}, \overset{\frown}{\Delta A}$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ χορδαὶ ΚΜ, ΛΝ τέμνονται καθέτως.

203. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΒ κύκλου κατὰ μῆκος ΒΓ = ΑΒ καὶ φέρομεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην (χ) τοῦ κύκλου. Ἐὰν Ν, Δ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν Β, Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν (χ) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $3\cdot B\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta$.

204. Δίδονται ἐπ' εὐθείας (χ) τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Μὲ διαμέτρους ΑΓ, ΒΓ γράφομεν ἡμιπεριφερείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς (χ). Εἰς τὸ μέσον Ρ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν (χ) τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς Ε. Ἡ ΓΕ τέμνει τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΒΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΡΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς τελευταίας περιφερείας.

205. Ἔστω Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας (Ι) τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΔΕ μετὰ τῆς ΑΙ νὰ ἀποδειχθῇ α) ΒΘ ⊥ ΑΙ β) οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ $\hat{A}\Gamma Z$, $\hat{B}\Gamma Z$ ἐφάπτονται τῆς ΓΖ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

206. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Γ δοθείσης περιφερείας (ο) γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης διαμέτρου ΑΟΒ. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας (Γ). Ζητεῖται νὰ δειχθῇ ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

207. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ αὐτοῦ.

208. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. Δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

209. Ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ Β καὶ Γ τῆς περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Δ καὶ οἱ πόδες τῶν τριῶν αὐτῶν καθέτων εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

210. Πολύγωνον $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τυχόντος σημείου M_1 τοῦ τόξου A_1A_2 φέρομεν τὴν χορδὴν M_1M_2 παράλληλον πρὸς τὴν A_1A_2. Ἐκ τοῦ M_2 τὴν M_2M_3 παράλληλον πρὸς τὴν A_2A_3, κ.ο.κ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ χορδὴ M_1M_ν ἰσοῦται πρὸς τὴν $A_\nu A_1$ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἀναλόγως τοῦ ν περιττὸς ἢ ἄρτιος.

211. Εἰς τὰ ἄκρα εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρομεν τὰς καθέτους (x) καὶ (y). Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Γ τῆς (x) καὶ τὸ σημεῖον Δ τῆς (y) οὕτως ὥστε ἂν Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ νὰ εἶναι $\hat{\Gamma O \Delta} = 1^L$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ ἐφάπτεται τῆς ΓΔ.

212. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΒΔ καὶ ΓΕ τὰ ὕψη του, Η τὸ ὀρθόκεντρον καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν Ν τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΗ, ΜΝ ⊥ ΔΕ.

213. Πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τρία τρίγωνα ἰσοσκελῆ, ἐκ τῶν ὁποίων δύο τοὐλάχιστον εἶναι ἀμβλυγώνια.

214. Ἐὰν ἐκ σημείου Α ἀχθοῦν πρὸς εὐθεῖαν χψ κατὰ σειρὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ ὥστε $\hat{BAΓ} = \hat{ΔAE}$ νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΒ+ΑΕ > ΑΓ+ΑΔ.

215. Ἐὰν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπό μιᾶς πλευρᾶς ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τῆς ἀπέναντι ταύτης πλευρᾶς.

216. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΒΑΓ γράφομεν περιφέρειαν (Α, R < ΑΒ = ΑΓ) καί ἀπό τά σημεῖα Β καί Γ φέρομεν τάς ἐφαπτομένας τῆς (Α), τάς τεμνομένας εἰς τό ἡμιεπίπεδον (ΒΓ, Α), ἔστω εἰς σημεῖον Μ. Νά δειχθῇ ὅτι $\hat{M} = \hat{A}$.

217. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ. Μέ κέντρον τυχόν σημεῖον τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ καί ἀκτῖνα τήν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπό τήν χορδήν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν. Ἀπό τά σημεῖα Α καί Β φέρομεν τάς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας τεμνομένας εἰς σημεῖον Μ. Νά δειχθῇ ὅτι $\hat{M} = 1^L$.

218. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Λαμβάνομεν ἐπί τῆς ΒΓ τμήματα ΒΔ = = ΑΒ καί ΓΕ = ΑΓ. Δείξατε ὅτι ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τό $\hat{AB}Γ$ καί ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περί τό $\hat{AΔE}$ εἶναι ὁμόκεντροι.

219. Ἐπί τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου (ο) λαμβάνομεν σημεῖον Γ καί φέρομεν τήν ἐφαπτομένην ΓΔ τοῦ κύκλου. Ἔστω Ε ἡ προβολή τοῦ Ο ἐπί τήν διχοτόμον τῆς $\hat{AΓΔ}$. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπό τήν ΑΒ ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

220. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νά δειχθῇ ὅτι τό ὀρθικόν αὐτοῦ, τό τρίγωνον μέ κορυφάς τά συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου πρός τάς πλευράς καί τό τρίγωνον τό ὁποῖον ἔχει πλευράς τάς ἐφαπτομένας εἰς Α, Β, Γ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ἔχουν τάς πλευράς των παραλλήλους ἀντιστοίχως.

221. Δίδεται τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καί δύο εὐθεῖαι ΒΡ καί ΔΡ μή τεμνουσαι τό παραλληλόγραμμον καί ἔτι ὥστε $\hat{ΓBP} = \hat{ΓΔP}$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\hat{ΓPB} = \hat{ΔPA}$.

222. Ἔστω τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τό ἡμικύκλιον διαμέτρου ΒΓ ἐκτός τοῦ τριγώνου. Ἐάν τά σημεῖα Δ καί Ε τριχοτομοῦν τό ἡμικύκλιον αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΑΕ τριχοτομοῦν τήν πλευράν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

223. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀγομένη κάθετος ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἐπί μίαν πλευράν τοῦ τετραπλεύρου διχο-

τομεῖ τὴν ἀπέναντι πλευράν αὐτοῦ.

224. Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νά δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ ἐφάπτονται εἰς Ο.

225. Ἐντὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ τοιαῦται ὥστε: $A'\hat{A}\Delta = \frac{1}{3}\hat{A}$, $B'\hat{B}A = \frac{1}{3}\hat{B}$, $\Gamma'\hat{\Gamma}B = \frac{1}{3}\hat{\Gamma}$, $\Delta'\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{3}\hat{\Delta}$. Νά δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς ἀνὰ δύο τῶν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

226. Δύο περιφέρειαι (ο) καὶ (κ) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α ἄγονται δύο τέμνουσαι ΓΑΔ καὶ ΕΑΖ. Ἐὰν Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς διακέντρου οκ νά δειχθῇ ὅτι αἱ περιφέρειαι ΓΑΖ, (Ρ, ΡΑ), ΕΑΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

227. Διὰ τυχόντος σημείου Μ φέρομεν τὰς καθέτους $x_\alpha, x_\beta, x_\delta$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὰ συμμετρικὰ τῶν $x_\alpha, x_\beta, x_\delta$ πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ $A\hat{B}\Gamma$. Λαμβάνομεν οὕτω ἐννέα εὐθείας. Ζητεῖται νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἀνὰ τρεῖς τέμνονται εἰς τέσσερα συνολικὰ σημεῖα. Τί παρατηρεῖτε ἂν τὸ σημεῖον Μ ταυτίζεται πρὸς τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου;

228. Κανονικὸν ἑξάγωνον $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (ο). Διὰ τοῦ κέντρου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xx′ ἥτις ὁποία ἀφήνει εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον τὰς τρεῖς κορυφὰς A_1, A_2, A_3. Ἐὰν A_i' ἡ προβολὴ τοῦ A_i ἐπὶ τὴν xx′ νά δειχθῇ ὅτι ἰσχύει $A_1A_1' + A_2A_2' + A_3A_3' = A_4A_4' + A_5A_5' + A_6A_6'$.

229. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως χορδῆς ΑΒ περιφερείας λαμβάνομεν ΒΓ = ΑΒ. Ἐὰν Ρ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας νά δειχθῇ ὅτι ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου ἐκ τοῦ Β τοῦ τριγώνου ΒΓΡ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\hat{B}$ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας.

230. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν σημεῖον Α καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΒ καὶ ΖΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΒ.

231. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (ο). Ἐκ τοῦ σημείου Δ τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Β καὶ Γ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κά-

θετος ἐπί τήν ΕΖ.

232. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ καινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης.

ΟΜΑΣ Β'.

233. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καί διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ. Λαμβάνομεν σημεῖον Ε εἰς ἀπόστασιν $\frac{R}{2}$ ἀπό τήν ΑΒ. Εἰς τό σημεῖον Ε ἐπί τήν ΟΕ ὑψοῦμεν τήν κάθετον ἥτις τέμνει τήν ΑΒ εἰς Γ. Δείξατε

α) Τό σημεῖον Γ δέν δύναται νά εὑρίσκεται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου.

β) Ἡ συμμετρική εὐθεία τῆς ΑΒ ὡς πρός τήν ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

234. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καί διάμετρος ΑΒ. Πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΑΒ φέρομεν δύο ἀκτίνας καθέτους ΟΓ καί ΟΔ. Ἐάν Γ' καί Δ' αἱ προβολαί τῶν Γ,Δ ἐπί τήν ΑΒ, δείξατε

α) Ἡ διάκεντρος τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων (Κ) καί (Λ) εἰς τά τρίγωνα ΟΓΓ', ΟΔΔ' εἶναι ἴση πρός R.

β) Ἂν Ε τό μέσον τῆς ΓΔ, $\hat{K\Sigma\Lambda} = 1^L$.

235. Δύο περιφέρειαι (ο) καί (σ') τέμνονται ὑπό δύο τυχουσῶν εὐθειῶν εἰς τά σημεῖα Α,Β - Α',Β' καί Γ,Δ - Γ',Δ' ἀντιστοίχως. Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΓ, Α'Δ', Β'Γ' τέμνονται εἰς ἓξ σημεῖα ἐκ τῶν ὁποίων τά τέσσερα ἀποτελοῦν τάς κορυφάς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

236. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί τυχόν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι τά συμμετρικά τῶν περιφερειῶν ΒΜΓ, ΓΜΑ, ΑΜΒ πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

237. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγονται αἱ διχοτόμοι ΒΔ, ΓΕ τῶν γωνιῶν Β, Γ καί ἐκ τῶν Ε,Δ αἱ παράλληλοι πρός τάς ΒΔ, ΓΕ ἀντιστοίχως τέμνουσαι τήν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α εἰς τά σημεῖα Ζ,Θ. Νά δειχθῆ ὅτι τό τετράπλευρον ΒΘΖΓ εἶναι ἐγγράψιμον.

238. Ἐάν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κέντρου Ο τέμνωνται καθέτως εἰς τό σημεῖον Ρ, νά δειχθῆ ὅτι τά συμμετρικά τοῦ Ρ πρός τάς πλευράς τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυ-

φαι τετραπλεύρου ἐγγραμμίμου εἰς κύκλον κέντρου Ο.

239. Ἐπί δοθέντος τμήματος ὡς πλευρᾶς δυνάμεθα νά κατασκευάσουμε πρός τό αὐτό μέρος ἕξη τρίγωνα ἰσογώνια μεταξύ των. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ τρίται κορυφαί τῶν τριγώνων τούτων εἶναι σημεῖα ὁμοκυκλικά.

240. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (Κ),(Λ),(Μ). Ἔστω x,x′ αἱ κοιναί ἐσωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Κ),(Λ), y,y′ αἱ κοιναί ἐσωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Λ),(Μ) καί φ,φ′ αἱ κοιναί ἐσωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Μ),(Κ). Ἐάν x,y,φ διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τάς x′,y′,φ′.

241. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (Κ),(Λ),(Μ). Ἔστω x,x′ αἱ κοιναί ἐξωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Κ),(Λ), y,y′ αἱ κοιναί ἐξωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Λ),(Μ) καί φ,φ′ αἱ κοιναί ἐσωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν (Μ),(Κ). Ἐάν x,y,φ διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τάς x′,y′,φ′.

242. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καί ΑΑ′,ΒΒ′,ΓΓ′ τά ὕψη αὐτοῦ. Προβάλλομεν τάς κορυφάς Β,Γ ἐπί τῆς Β′Γ′ εἰς τά σημεῖα Δ,Ε ἀντιστοίχως. Νά δειχθῆ α) ΔΓ′ = ΕΒ′ β) ΔΕ = Α′Β′ + Α′Γ′.

243. Ἔστω Δ,Ε,Ζ τά συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ πρός τάς πλευράς. Τά σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ,ΔΕΖ ἀποτελοῦν τάς κορυφάς ἑνός ἑξαγώνου. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ διαγώνιοι αἱ ἑνώνουσαι τάς ἀπέναντι κορυφάς τοῦ ἑξαγώνου εἶναι παράλληλοι πρός τάς πλευράς τοῦ $\hat{\Delta E Z}$ ἀντιστοίχως καί ὅτι διέρχονται διά τοῦ Η.

244. Ἐκ τῶν μέσων Μ καί Ν δύο τόξων ΑΒ καί ΒΓ περιφερείας, φέρομεν τάς ΜΓ,ΝΑ,ΜΔ,ΝΔ ὅπου Δ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\Delta\hat{M}\Gamma, \Delta\hat{N}A$ εἶναι παράλληλοι ἐάν τό Δ κεῖται ἐπί τοῦ τόξου $M\widehat{B}N$, κάθετοι ἐάν τό Δ κεῖται ἐπί τοῦ ἄλλου τόξου.

245. Εἰς πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ἔστω Θ = ΑΒ∩ΔΓ, Η = ΒΓ∩ΕΔ, Ι = ΓΔ∩ΑΕ, Κ = ΔΕ∩ΒΑ, Ζ = ΕΑ∩ΓΒ. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ περιφέρειαι περί τά $\hat{ABZ}$, $\hat{B\Gamma\Theta}$, $\hat{\Gamma\Delta H}$, $\hat{\Delta EI}$, $\hat{AEK}$ τεμνόμεναι ἀνά δύο διαδοχικῶς ὁρίζουν πέντε σημεῖα ὁμοκυκλικά.

246. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καί ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τά ὕψη αὐτοῦ. Ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθικοῦ ΕΖ,ΖΔ,ΔΕ φέρομεν τάς καθέτους ἐπί τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ τοῦ $\hat{AB\Gamma}$. Νά δειχθῆ ὅτι διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

247. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὴν γωνίαν Α τῶν τριῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ καὶ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς ὀρθογωνίου.

248. Ἐπὶ τῆς ἀσκ. 129.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι τόξων $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma}, \overset{\frown}{\Delta A}$ εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου καὶ διέρκονται διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ.

249. Ἐπὶ τῆς ἀσκ. 107.

Θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτήν. Ἐὰν Σ, Ρ, Τ τὰ σημεῖα τομῆς μετὰ τῶν ἀντιστοίχων κύκλων νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ Σ, Ρ, Τ καὶ τὸ σημεῖον Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

250. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐντὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΑΓ. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (κ), (λ) οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Α καὶ ἐφάπτονται τοῦ (ο) ἀντιστοίχως εἰς Β καὶ Γ. Ἐὰν Δ τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς των νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\widehat{A\Delta O} = 1^L$.

251. Τετράπλευρον $A_1A_2A_3A_4$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐξωτερικῶς τοῦ τετραπλεύρου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $A_1K_1A_2, A_2K_2A_3, A_3K_3A_4, A_4K_4A_1$. Ἔστω $M = A_1K_2 \cap K_1A_3$, $N = A_2K_3 \cap K_2A_4$, $P = A_3K_4 \cap K_3A_1$, $\Sigma = A_4K_1 \cap K_4A_2$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΝΡΣ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

252. Δίδονται δύο κύκλοι (O_1) καὶ (O_2) τεμνόμενοι εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Α φέρομεν τρεῖς τυχούσας τεμνούσας P_1AP_1', P_2AP_2', P_3AP_3'. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα P_1BP_1', P_2BP_2', P_3BP_3' τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

253. Ἐκ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν δοθέντος τριγώνου φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ πόδες τῶν ἐν λόγῳ καθέτων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

(περιφέρεια τοῦ Taylor)

254. Τρίγωνον $A_1B\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (κ, R). Περιφέρεια (λ, ρ) διέρχεται διὰ τοῦ κ. Θεωροῦμεν τὰς περιφερείας (A_1R), (B_1R), (Γ, R) καὶ τὰς ἐκ τῶν A_1, B_1, Γ ἀγομένας παραλλήλους, ἐξ τὸν ἀριθμόν, πρὸς τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας τῶν κύκλων $(A_1R), (\lambda, \rho) - (B_1R), (\lambda, \rho) - (\Gamma, R), (\lambda, \rho)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐν λόγῳ ἐξ παράλληλοι εὐθεῖαι πρὸς τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτο-

μένας ἐφάπτονται τῆς αὐτῆς περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς (Λ, ρ).

255. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Μ ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοί του φαίνονται ὑπὸ ὀρθὰς γωνίας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τῶν διαγωνίων καὶ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

256. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Ἔστω Κ, Λ τὰ κέντρα αὐτῶν, Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς ΕΗ. Νὰ δειχθῇ α) Τὸ ΜΚΝΛ εἶναι τετράγωνον. β) Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ ΜΚΝΛ. Τὰ τετράγωνα ΒΓΘΙ, ΕΗΣΡ τὰ κατασκευαζόμενα πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ σχήματος ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς Ο.

257. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα ΑΒΔ, ΑΓΕ, πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ΒΓΖ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ ΒΓΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΚΕ εἶναι ἰσοσκελές.

258. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ο τοῦ ἐσωτερικοῦ του, μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΑΒΓ περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι μὲ πλευρὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κατασκευάζεται πάντοτε τρίγωνον καὶ ὅτι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι: $|B\hat{O}\Gamma - 60^\circ|$, $|\Gamma\hat{O}A - 60^\circ|$, $|A\hat{O}B - 60^\circ|$. Τί συμβαίνει ἂν τὸ Ο εἶναι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου;

259. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος αὐτοῦ. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΔ καὶ $B' = BP \cap A\Gamma$, $\Gamma' = \Gamma P \cap AB$. Ἂν $BB' = \Gamma\Gamma'$, τὸ $A\hat{B}\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές.

260. Διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τρεῖς εὐθείας παραλλήλους καὶ τρεῖς εὐθείας καθέτους πρὸς τὰς προηγουμένας. Σχηματίζονται οὕτω τρία ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαγωνίους ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἄλλαι διαγώνιοί των διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ 3

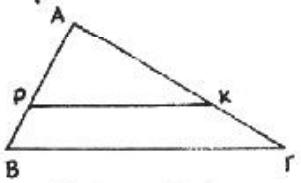
ΟΜΟΙΟΤΗΣ. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ. ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΤΕΤΡΑΔΕΣ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΞΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΜΒΛΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ, ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ, ΔΙΑΜΕΣΩΝ

3-1 Εὐθεῖες παράλληλες

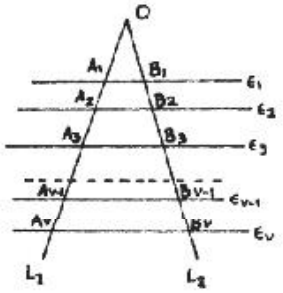
3-1.1 Τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (1)

Ἐὰν ἀπό σημεῖον Ρ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τήν παράλληλον πρὸς τήν ΒΓ τέμνουσαν εἰς Κ τήν ΑΓ θά ἔχωμεν $\frac{AP}{PB} = \frac{AK}{K\Gamma}$



Ἀντιστρόφως: Ἐάν Ρ καί Κ σημεῖα τῶν ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως καί $\frac{AP}{PB} = \frac{AK}{K\Gamma}$, τότε ἡ εὐθεῖα ΡΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τήν ΒΓ.

3-1.2 Θεώρημα. Ἔστω $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots \epsilon_\nu$ μία δέσμη παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπό δύο εὐθειῶν L_1 καί L_2 εἰς $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{\nu-1}, A_\nu$ καί $B_1, B_2, B_3, \dots B_{\nu-1}, B_\nu$ ἀντιστοίχως θά ἔχωμεν: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots\dots = \frac{A_{\nu-1}A_\nu}{B_{\nu-1}B_\nu}$



Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ τριγώνου A_2OB_2 ἔχομεν

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{OA_1 + A_1A_2}{OB_1 + B_1B_2} = \frac{OA_2}{OB_2} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου A_3OB_3 ἔχομεν

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) προκύπτει

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_2 + A_2A_3}{OB_2 + B_2B_3} = \frac{OA_3}{OB_3} \qquad (4)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως, μέ τό τρίγωνον A_4OB_4 καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (3) καί (4) ἔχομεν

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τελικῶς ἔχομεν

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots\dots = \frac{A_{\nu-1}A_\nu}{B_{\nu-1}B_\nu}$$

Παρατήρησις: Ἄν $L_1 // L_2$ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλουστάτη.

---

(1) Διά τήν ἀπόδειξιν ἴδε παρ/μα.

3-2 Ὁμοιότης

3-2.1 Ὁρισμός:

Ὀνομάζομεν ὁμοιότητα μίαν (1,1) ἀντιστοιχίαν μεταξύ τῶν κορυφῶν δύο πολυγώνων F καὶ F' καθ' ἣν αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ ἀνάλογοι.

τὰ πολύγωνα F καὶ F' λέγονται ὅμοια.

Συμβολισμός $F \sim F'$. Ἐὰν $F = A_1A_2 \dots A_\nu$ καὶ $F' = A'_1A'_2 \dots A'_\nu$ συμφωνοῦμεν ὁ συμβολισμὸς "$\sim$" νὰ δεικνύῃ καὶ τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν κορυφῶν, ἤτοι $A_1A_2 \dots A_\nu \sim A'_1A'_2 \dots A'_\nu$ σημαίνει ὅτι τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια καὶ $A_1 \to A'_1$, $A_2 \to A'_2$, $\dots$ $A_\nu \to A'_\nu$.

Ὅμοια τρίγωνα:

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' θὰ ὀνομάζωνται ὅμοια ἂν ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἀντιστοιχία (1,1) καθ' ἣν: $A \to A'$, $B \to B'$, $\Gamma \to \Gamma'$ καὶ

$$(\hat{A} = \hat{A}' \wedge \hat{B} = \hat{B}' \wedge \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}') \wedge \left(\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

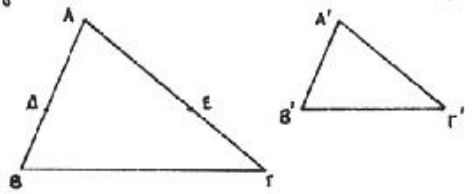
Συμβολισμός $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

3-2.2 Θεώρημα.

Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ καὶ $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ θὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ τμῆμα $A\Delta = A'B'$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα $AE = A'\Gamma'$. Τὰ τρίγωνα ΔΑΕ καὶ Β'Α'Γ' εἶναι ἴσα διότι $(A\Delta = A'B') \wedge (AE = A'\Gamma') \wedge (\hat{A} = \hat{A}')$. Κατόπιν τούτου $\hat{A\Delta E} = \hat{B}'$. Ἄρα $\hat{A\Delta E} = \hat{B}$. Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ συμφώνως πρὸς § 1 θὰ ἔχωμεν:



$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{E\Gamma} \text{ ἢ } \frac{A\Delta}{A\Delta + \Delta B} = \frac{AE}{AE + E\Gamma} \text{ ἢ } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \text{ ἢ } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$$

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}$$

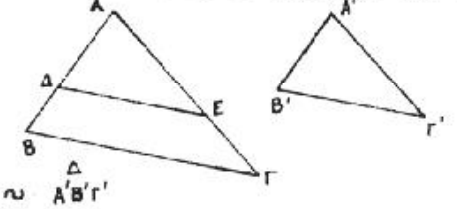
3-2.3 Θεώρημα.

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους, ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι ὅμοια.

Δηλαδὴ ἂν εἰς τὰ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ καὶ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ σημεῖον Δ ὥστε $A\Delta = A'B'$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς Ε. Θὰ ἔχωμεν $\overset{\Delta}{A\Delta E} \sim \overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Ἤτοι: $\frac{\gamma}{A\Delta} = \frac{\alpha}{\Delta E} = \frac{\beta}{AE}$ ἢ ἀκόμη $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\Delta E} = \frac{\beta}{AE}$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἐκ-



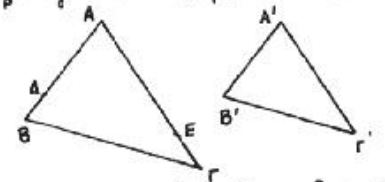
θέσεως καὶ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν ὅτι $\Delta E = \alpha'$ καὶ $AE = \beta'$. Ὅθεν $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ καὶ συνεπῶς $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

3-2.4 Θεώρημα

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἀπό μίαν γωνίαν ἴσην καί τάς πλευράς πού περιέχουν τήν γωνίαν ἀναλόγους θά εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις:

Ὑποθέσωμεν διά τά τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ὅτι $\hat{A}=\hat{A}'$ Λ $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$. Θά δείξωμεν ὅτι $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\sim\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Ἐπί τῆς ἡμιευθείας ΑΒ λαμβάνομεν τό σημεῖον Δ ὥστε ΑΔ=Α'Β'. Ἐπί τῆς ἡμιευθείας ΑΓ λαμβάνομεν τό σημεῖον Ε ὥστε ΑΕ=Α'Γ'. Παρατηροῦμεν ὅτι $\overset{\Delta}{A\Delta E}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Διότι ἔχουν ἀπό μίαν γωνίαν ἴσην καί τάς πλευράς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας. Βάσει τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ ἤ $\frac{\beta}{\Delta E}=\frac{\gamma}{A\Delta}$ ἤτοι ΔΕ // ΒΓ. Κατόπιν τούτου βλέπομεν ὅτι $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\sim\overset{\Delta}{A\Delta E}$ ἤ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\sim\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.



3-2.5 Θεώρημα

Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων εὐθ. τμημάτων εἰς δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὀνομάζεται λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα λ.

Εἶναι δηλαδή ἄν $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\sim\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

$$\lambda=\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\delta\alpha}{\delta\alpha'}=\frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'}=\frac{\rho\alpha}{\rho\alpha'}=\frac{\rho}{\rho'}=\cdots \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐάν συμβῆ νά εἶναι λ=1 τότε τά τρίγωνα ὡς διαπιστοῦται εὐκόλως εἶναι ἴσα.

3-2.6

Ἐπί τῇ βάσει τῶν θεωρημάτων 3-2.2, 3-2.3, 3-2.4 δύνανται ν' ἀποδειχθοῦν εὐκόλως τά κάτωθι πορίσματα.

(1) Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τάς πλευράς των παραλλήλους ἤ καθέτους (μίαν πρός μίαν) εἶναι ὅμοια.

(2) Ἐάν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ἀπό μίαν ὀξείαν γωνίαν ἴσην εἶναι ὅμοια.

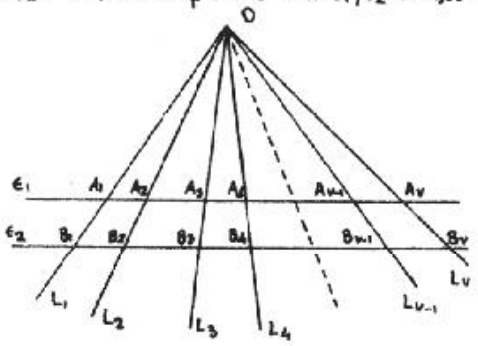
(3) Ἐάν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' ($\hat{A}=\hat{A}'=90°$) ἔχουν ἀπό μίαν κάθετον πλευράν καί τάς ὑποτεινούσας ἀναλόγους εἶναι ὅμοια. Δηλαδή ἄν $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}\Longrightarrow\overset{\Delta}{AB\Gamma}\sim\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

(4) Ἐάν $L_1, L_2, L_3, \ldots L_{(\nu-1)}, L_\nu$ κεντρική δέσμη εὐθειῶν διά τοῦ σημείου Ο καί ϵ_1, ϵ_2 ἓν ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν θά εἶναι

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\cdots=\frac{A_{\nu-1}A_\nu}{B_{\nu-1}B_\nu}=\lambda \quad (1)$$

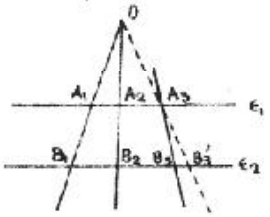
Ἀντιστρόφως:

Ἐάν ϵ_1, ϵ_2 ἓν ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν καί $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\nu \in \epsilon_1$, $B_1, B_2, B_3, \ldots B_\nu \in \epsilon_2$ καί ἰσχύει ἡ σχέσις (1), τότε αἱ εὐθεῖαι A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots A_\nu B_\nu$ ἀποτελοῦν κεντρικήν δέσμην κέντρου Ο, ἄν $\lambda\neq 1$. Ἂν λ=1 ἀποτελοῦν δέσμην παραλλήλων εὐθειῶν.



Απόδειξις διά $\lambda \neq 1$.

Υποθέτομεν ότι ή εύθεια A_3B_3 δέν διέρχεται διά τοῦ σημείου τομῆς O τῶν εὐθειῶν A_1B_1, A_2B_2.



Φέρω τήν OA_3 τέμνουσαν τήν ε_2 εἰς B'_3. Θά ἔχωμεν

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B'_3}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος καί τῆς (1) προκύπτει ὅτι

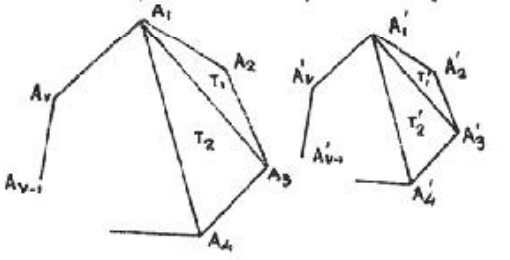
$$B_2B_3 = B_2B'_3$$

3-2.7 Θεώρημα.

Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια εἶναι ὅπως χωρίζονται διά διαγωνίων ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς εἰς ὅμοια τρίγωνα καί ὁμοίως κείμενα.

Απόδειξις:

Αναγκαίον. Ἔστω $F = A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ καί $F' = A'_1A'_2A'_3\ldots A'_\nu$ μέ $F \sim F'$. Φέρομεν τάς διαγωνίους ἀπό μίαν κορυφήν π.χ. τήν A_1, A_1A_3, A_1A_4, ... $A_1A_{\nu-1}$. Ἀντιστοίχως $A'_1A'_3$, $A'_1A'_4$, ... $A'_1A'_{\nu-1}$. Θέτομεν $\tau_i \equiv \overset{\triangle}{A_1A_iA_{i+1}}$ καί $\tau'_{i-1} \equiv \overset{\triangle}{A'_1A'_iA'_{i+1}}$ μέ $i = 2,3,\ldots \nu-1$. Παρατηροῦμεν ὅτι $\tau_1 \sim \tau'_1$ διότι $\left(\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3}\right) \wedge \left(\hat{A}_2 = \hat{A}'_2\right)$. Ἐπίσης $\tau_2 \sim \tau'_2$ διότι $\left(\frac{A_1A_3}{A'_1A'_3} = \frac{A_3A_4}{A'_3A'_4}\right) \wedge \left(\hat{A}_1\hat{A}_3A_4 = \hat{A}'_1\hat{A}'_3A'_4\right)$. Γενικῶς $\tau_i \sim \tau'_i$.



Ἱκανόν. Ἔστω $\tau_i \sim \tau'_i$ ἤτοι $\tau_1 \sim \tau'_1$, $\tau_2 \sim \tau'_2$, ..., $\tau_{\nu-2} \sim \tau'_{\nu-2}$. Θά δείξωμεν ὅτι $A_1A_2A_3\ldots A_\nu \sim A'_1A'_2A'_3\ldots A'_\nu$. Ἐκ τῶν τ_1, τ'_1 $\left(\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3}\right) \wedge \left(\hat{A}_2 = \hat{A}'_2\right)$. Ἐκ τῶν τ_2, τ'_2 $\frac{A_3A_4}{A'_3A'_4} = \frac{A_1A_3}{A'_1A'_3} = \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}$ καί $\hat{A}_3 = \hat{A}'_3$ (διότι $\hat{A}_3 = A_2\hat{A}_3A_1 + A_1\hat{A}_3A_4$ καί $\hat{A}'_3 = A'_2\hat{A}'_3A'_1 + A'_1\hat{A}'_3A'_4$).

Συνεχίζομεν μέ τά τ_3, τ'_3 κ.λ.π. ἤτοι τελικῶς.

$$\left(\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \cdots = \frac{A_\nu A_1}{A'_\nu A'_1}\right) \wedge \left(\hat{A}_1 = \hat{A}'_1,\ \hat{A}_2 = \hat{A}'_2,\ \ldots\ \hat{A}_\nu = \hat{A}'_\nu\right)$$

Ορισμός:

Ὁρίζομεν ὡς λόγον ὁμοιότητος δύο ὁμοίων πολυγώνων τόν λόγον δύο ὁμολόγων (ἀντιστοίχων) πλευρῶν: $\lambda = \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}$.

Διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι ὁ λόγος δύο ὁμολόγων εὐθ. τμημάτων δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

3-3 Ἁρμονική σημειοσειρά. Θεωρήματα διχοτόμων.

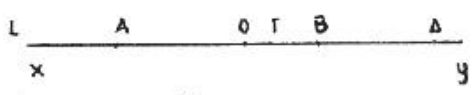
3-3.1 Θεώρημα.

Ἐπί εὐθείας L δίδονται τά σημεῖα A καί B καί ἔστω $\lambda \in R$. Ὑπάρχει ἓν ἀκριβῶς σημεῖον $\Gamma \in L$ ὥστε $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}} = \lambda$

Απόδειξις:

Ἀπό τό θεώρημα τοῦ Chasles [1] ἔχομεν $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0$. Ἄρα $\overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} - \overline{AB}$.

[1] Διά τάς βασικάς προτάσεις ἐπί τῶν διανυσμάτων ἴδε κεφάλαιον 7.



Η δοθείσα εκέεις γράφεται: $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{A\Gamma}-\overline{AB}}=\lambda$ και $\overline{A\Gamma}=\frac{\lambda}{\lambda-1}\overline{AB}$

Παρατηρούμεν ὅτι:

Διά $\lambda=0$ τό Γ ταυτίζεται μέ τό σημεῖον Α

Διά $\lambda=1$ τό Γ ταυτίζεται μέ τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς L.

Διά $\lambda=-1$ τό Γ ταυτίζεται μέ τό μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Διά $\lambda<0$ $\Gamma\in(A,B)$

Διά $\lambda>1$ Γ σημεῖον τῆς ἡμιευθείας By.

Διά $0<\lambda<1$ Γ σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Ax.

3-3.2 Ὁρισμός

Ἐάν Γ σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος (Α,Β) καί ὥστε $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}=-\lambda$ $(\lambda\in R^+\wedge\lambda\neq1)$ τότε τό σημεῖον Δ τῆς εὐθείας ΑΒ (L) τό ὁποῖον δίδεται ἀπό τήν ἐκέειν $\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}=\lambda$ καλεῖται συζυγές ἁρμονικόν τοῦ Γ πρός Α καί Β.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι τά σημεῖα Γ καί Δ χωρίζουν ἁρμονικῶς τό εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἄν

$$\boxed{\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}=-\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}} \qquad (1)$$

Ἡ τελευταία εκέεις γράφεται: $\frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Delta B}}=-\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Delta A}}$. Ὅπερ σημαίνει ὅτι ἄν τά σημεῖα Γ καί Δ χωρίζουν ἁρμονικῶς τό εὐθ. τμῆμα ΑΒ καί τά σημεῖα Α καί Β χωρίζουν ἁρμονικῶς τό εὐθ. τμῆμα ΓΔ.

Ἀκόμη λέγομεν ὅτι τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικήν σημειοσειράν ἤ ἁρμονικήν τετράδα.

Παρατηροῦμεν ὅτι τά εὐθ. τμήματα ΑΒ καί ΓΔ χωρίζονται· δηλαδή ἄν $\Gamma\in(A,B)$ τό Δ κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας ΑΒ καί ἐκτός τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Διότι ἄν $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}<0\Longrightarrow\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}>0$ καί συμφώνως πρός τήν σημείωσιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, τό Δ κεῖται ἐκτός τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι τά σημεῖα Γ καί Δ κεῖνται συγχρόνως, εἴτε ἐπί τῆς ἡμιευθείας Ox εἴτε ἐπί τῆς ἡμιευθείας Oy.

Διότι ἐάν $\lambda>1$ ἤτοι $\Gamma\in(O,B)$ $\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}>1$ ἤτοι Δ εἰς τήν ἡμιευθείαν Ox. Ἄν $\lambda<1$ ἤτοι $\Gamma\in(O,A)$ $\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}<1$ ἤτοι Δ εἰς τήν ἡμιευθείαν Oy.

3-3.3 Θεώρημα (Newton)

Ἄν τά σημεῖα Γ καί Δ χωρίζουν ἁρμονικῶς τό εὐθ. τμῆμα ΑΒ καί Ο τό μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ θά ἔχωμεν:

$$\boxed{OA^2=OB^2=\overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}} \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις:

Βάσει τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}=-\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}$ (α). Ἀλλά $\overline{A\Gamma}=\overline{AO}+\overline{O\Gamma}$, $\overline{B\Gamma}=\overline{O\Gamma}-\overline{AO}$, $\overline{A\Delta}=\overline{AO}+\overline{O\Delta}$, $\overline{B\Delta}=\overline{O\Delta}-\overline{AO}$.

Η εκείς (α) γίνεται $\frac{\overline{AO}+\overline{O\Gamma}}{\overline{O\Gamma}-\overline{AO}}=-\frac{\overline{AO}+\overline{O\Delta}}{\overline{O\Delta}-\overline{AO}} \Longrightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{O\Gamma}}=\frac{\overline{O\Delta}}{\overline{AO}}$

Αντιστρόφως.

Εάν Α,Β,Γ,Δ σημεία εύθείας L και διά το μέσον Ο του εύθ. τμήματος ΑΒ έχωμεν $OA^2=OB^2=\overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}$, τα σημεία Γ και Δ χωρίζουν αρμονικώς τα Α και Β.

Απόδειξις:

Έστω Δ' το αρμονικόν συζυγές του Γ προς Α και Β. Θα έχωμεν $OA^2=OB=\overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta'}$. Εκ της υποθέσεως και της τελευταίας εκέσεως συνάγεται ότι $\overline{O\Delta}=\overline{O\Delta'}$ ήτοι $\Delta=\Delta'$.

Παρατηρήσεις:

Αν εις μίαν αρμονικήν σημειοσειράν τρία σημεία είναι ωρισμένα επί μιάς ευθείας, και το τέταρτον επίσης είναι ωρισμένον.

3-3.4 Θεώρημα (Descartes)

Αν Α,Β,Γ,Δ αρμονική τετράς, τότε $\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}$ (3)

Απόδειξις:

Εκ της υποθέσεως έχομεν $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}=-\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}$ (1). Θέτομεν $\overline{B\Gamma}=\overline{BA}-\overline{\Gamma A}$ και $\overline{B\Delta}=\overline{A\Delta}-\overline{AB}$, ότε η (1) γίνεται:

$$\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{AB}-\overline{A\Gamma}}=\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{A\Delta}-\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{\overline{A\Delta}-\overline{A\Gamma}}{\overline{A\Gamma}}=\frac{\overline{A\Delta}-\overline{AB}}{\overline{A\Delta}} \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A\Gamma}}-1=1-\frac{\overline{AB}}{\overline{A\Delta}} \Longrightarrow \frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}$$

Αντιστρόφως.

Εάν Α,Β,Γ,Δ σημεία εύθείας L και υφίσταται η εκέσις $\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}$ τα σημεία Γ και Δ χωρίζουν αρμονικώς το εύθ. τμήμα ΑΒ. Η απόδειξις επαφίεται ως άσκησις διά τον μαθητήν.

Παρατηρήσεις:

Εάν αντί των αλγεβρικών τιμών λάβωμεν τα μέτρα των εύθ. τμημάτων η εκέσις (1) γράφεται $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Delta}$.

3-4 Θεωρήματα Διχοτόμων

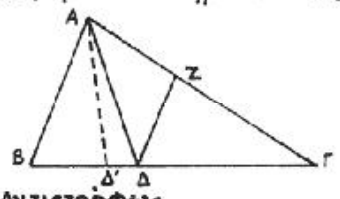
3-4.1 Θεώρημα

Η διχοτόμος μιάς γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευράν εις δύο μέρη των οποίων ο λόγος, είναι ως ο λόγος των προσκειμένων πλευρών.

Δηλαδή: Αν ΑΔ η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ θά έχωμεν: $\boxed{\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{A\Gamma}}$

Απόδειξις:

Φέρομεν την ΔΖ//ΑΒ. Το τρίγωνον ΑΖΔ είναι ισοσκελές και ΑΖ=ΖΔ. Εκ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΖ έχομεν $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AZ}{Z\Gamma}=\frac{Z\Delta}{Z\Gamma}$ (1)



Εκ των όμοίων τριγώνων ΖΔΓ, ΑΒΓ έχομεν $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$ (2). Αί εκέσεις (1), (2) δίδουν το ζητούμενον.

Αντιστρόφως.

Έστω Δ σημείον της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Υποθέσωμεν ότι $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{A\Gamma}$: Θά δείξωμεν

ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$.

Ἀπόδειξις:

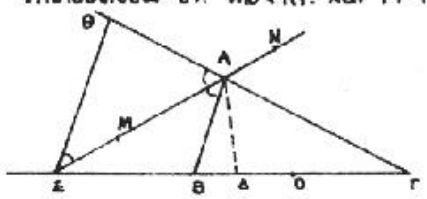
Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ' τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ εἶναι ὡς γνωστὸν $\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'} = \frac{AB}{A\Gamma}$, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως, $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}$ μὲ $\Delta, \Delta' \in B\Gamma$. Ἄρα $\Delta = \Delta'$.

3-4.2 Θεώρημα

Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ($AB \neq A\Gamma$) τέμνει τὴν εὐθείαν ΒΓ εἰς σημεῖον $E \notin B\Gamma$ ὥστε $\boxed{\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{AB}{A\Gamma}}$

Ἀπόδειξις:

Ὑποτεθείσθω ὅτι $AB < A\Gamma$. καὶ Μ-Α-Ν ἡ διάταξις τῶν σημείων Μ,Α,Ν ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. $M\hat{A}B = \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2}$. Ἔχομεν



ἐξ. $\hat{B} + M\hat{A}B = \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} + A + \Gamma < \frac{B}{2} + \frac{B}{2} + A + \Gamma = 2^L$.

Ἤτοι ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τέμνει τὴν εὐθείαν ΒΓ εἰς σημεῖον Ε ταυτοῦτον ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ διάταξις Ε-Β-Γ (Πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς ΑΒ ὅπως συνηθίζομεν νὰ λέγωμεν).

Φέρομεν τὴν ΕΘ//ΑΒ. Τὸ τρίγωνον ΕΘΑ εἶναι ἰσοσκελές. Ἔχομεν $\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{A\Theta}{\Gamma\Theta} = \frac{\Theta E}{\Gamma\Theta}$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΘΓ, ΒΑΓ $\frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} = \frac{AB}{A\Gamma}$. Ὅθεν $\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παρατηρήσεις:

① Εἰς πᾶν τρίγωνον δύο κορυφαὶ καὶ οἱ πόδες τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῆς ἢ ἐξωτερικῆς) τῆς ἀπέναντι γωνίας ἀποτελοῦν ἁρμονικὴ τετράδα. Διότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Gamma E}$ ἢ $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Gamma\Delta}} = -\frac{\overline{BE}}{\overline{\Gamma E}}$

② Οἱ πόδες τῶν διχοτόμων κεῖνται εἰς τὴν ἡμιευθείαν ΟΒ ($AB < A\Gamma$).

3-4.3 Ὑπολογισμὸς τῶν εὐθ. τμημάτων ΒΔ, ΓΔ, ΒΕ, ΓΕ, ΔΕ συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου ἔχομεν: $\frac{B\Delta}{\gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \Rightarrow$

$\frac{B\Delta}{\gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} = \frac{B\Delta + \Gamma\Delta}{\beta + \gamma} \Rightarrow \boxed{B\Delta = \frac{a\gamma}{\beta+\gamma}}$ (1) $\boxed{\Gamma\Delta = \frac{a\beta}{\beta+\gamma}}$ (2)

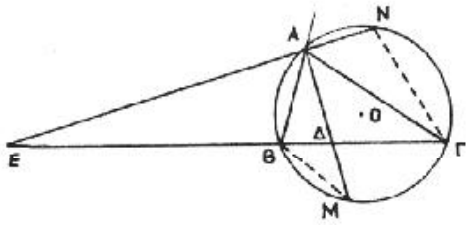
Ἐπίσης $\frac{BE}{\gamma} = \frac{\Gamma E}{\beta} = \frac{\Gamma E - BE}{\beta - \gamma} \Rightarrow \boxed{BE = \frac{a\gamma}{\beta-\gamma}}$ (3) $\boxed{\Gamma E = \frac{a\beta}{\beta-\gamma}}$ (4)

$\Delta E = B\Delta + BE = \frac{a\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{a\gamma}{\beta-\gamma} \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{2a\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}}$ (5)

3-4.4 Ὑπολογισμὸς τῆς ἐσωτερικῆς δ_a καὶ ἐξωτερικῆς δ_a διχοτόμου συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου

1. Ὑπολογισμὸς τῆς δ_a. Ἔστω (ο) ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος. Ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Μ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΜ, ΑΔΓ ἔχομεν:

$$B\gamma = A\Delta \cdot AM = \delta_a(\delta_a + \Delta M) = \delta_a^2 + \delta_a \Delta M$$



Ἀλλὰ $\delta_\alpha \cdot \Delta M = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$. διότι $\overset{\Delta}{A\Delta B} \sim \overset{\Delta}{\Gamma\Delta M}$

Ὅθεν $\boxed{\delta_\alpha^2 = \beta\gamma - B\Delta \cdot \Gamma\Delta}$ (1)

Τὰ εὐθ. τμήματα $B\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta$ ἠδη ὑπελογίσθησαν συναρτήσει τῶν πλευρῶν (§ 3-4.3) ὅτε: $\delta_\alpha^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} \Longrightarrow \delta_\alpha^2 = \beta\gamma\left[\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right] =$

$= \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} 2\tau \cdot 2(\tau-\alpha)$ καὶ $\boxed{\delta_\alpha = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}}$ (2)

2. Ὑπολογισμὸς τῆς Δ_α. $\overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{AN\Gamma} \Longrightarrow AB \cdot A\Gamma = AE \cdot AN = \Delta_\alpha(EN - \Delta_\alpha)$. Ἀλλὰ $\overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{\Gamma NE} \Longrightarrow \Delta_\alpha \cdot EN = BE \cdot \Gamma E$ καὶ $\boxed{\Delta_\alpha^2 = BE \cdot \Gamma E - \beta\gamma}$ (3).

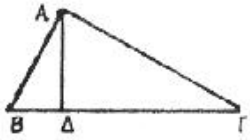
Λαμβανομένων τῶν τύπων τῆς προηγουμένης παραγράφου:

$\Delta_\alpha^2 = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \beta\gamma$ καὶ τελικῶς $\boxed{\Delta_\alpha = \frac{2}{|\beta-\gamma|}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ (4)

3-5 Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

3-5.1 Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.



Ἀπόδειξις:

Τὰ τρίγωνα $A\Delta B$ καὶ ΓAB εἶναι ὅμοια. Ἄρα $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$ ἤτοι

Τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἤτοι: $\boxed{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ ὁμοίως $\boxed{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$

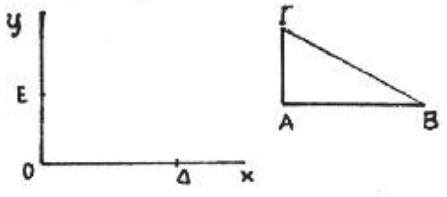
Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐκβάσεις κατὰ μέλη διαπιστώνομεν ὅτι:

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ: $\boxed{B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2}$

Ἀντιστρόφως.

Ἂν εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Longrightarrow \hat{A} = 90^\circ$

Ἀπόδειξις:



Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy ὀρθῆς γωνίας xOy λαμβάνομεν σημεῖα E καὶ Δ ὥστε $O\Delta = AB$ καὶ $OE = A\Gamma$. Βάσει τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $EO\Delta$ ἔχομεν $OE^2 + O\Delta^2 = E\Delta^2$ ἢ $AB^2 + A\Gamma^2 = \Delta E^2$ ἢ $\Delta E = B\Gamma$. Ἤτοι τὰ τρίγωνα $O\Delta E$ καὶ $AB\Gamma$ εἶναι ἴσα.

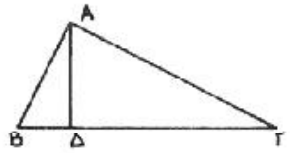
3-5.2 Θεώρημα

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) τὸ τετράγωνον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἴχνος τοῦ ἐν λόγῳ

ὕψους χωρίζει τὴν ὑποτείνουσαν

Ἀπόδειξις:

$\overset{\Delta}{A\Delta B} \sim \overset{\Delta}{\Gamma\Delta A} \Longrightarrow \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{A\Delta} \Longrightarrow \boxed{A\Delta^2 = \Gamma\Delta \cdot \Delta B}$



Ἀντιστρόφως.

3-5.3 Θεώρημα

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ἂν ΑΔ τὸ ὕψος:

$$\boxed{A\Delta \cdot B\Gamma = AB \cdot A\Gamma}$$

Ἡ ἀπόδειξις ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΒ, ΓΑΒ

Ἀντιστρόφως.

3-5.4 Θεώρημα

Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ἂν ΑΔ τὸ ὕψος:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{A\Delta^2}$$

Ἀπόδειξις:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{AB^2 + A\Gamma^2}{AB^2 \cdot A\Gamma^2} = \frac{B\Gamma^2}{B\Gamma^2 \cdot A\Delta^2} = \frac{1}{A\Delta^2}$$

3-6 Θεωρήματα προκύπτοντα ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος

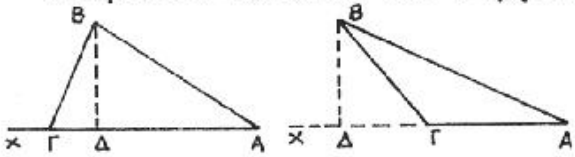
3-6.1 Τὸ θεώρημα τῆς ὀξείας καὶ Ἀμβλείας γωνίας

Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπ' αὐτήν.

Ἰσχύει ἡ ἰδία πρότασις μὲ ἀντικατάστασιν τῆς λέξεως: ὀξείας μὲ τὴ λέξιν ἀμβλείας, ἠλαττωμένον μὲ τὴν λέξιν πύξημένον.

Ἀπόδειξις:

Ἡ περίπτωσις τῆς ὀξείας. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\hat{A} < 90^\circ$. Ἔστω $\hat{A} < 90^\circ \wedge \hat{\Gamma} < 90^\circ$.



Ἡ προβολὴ Δ τοῦ σημείου Β εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

$B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 + AB^2 - A\Delta^2$ καὶ

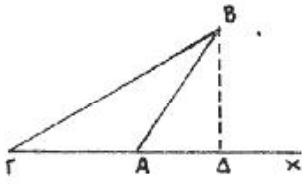
$\Gamma\Delta = A\Gamma - A\Delta$ ὅτε: $B\Gamma^2 = (A\Gamma - A\Delta)^2 + AB^2 - A\Delta^2$

ἢ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ Α $\boxed{B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\,A\Gamma \cdot A\Delta}$ (1)

Ἐὰν $\hat{A} < 90^\circ \wedge \hat{\Gamma} > 90^\circ$. Ἡ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Γx. Τότε $\Gamma\Delta = A\Delta - A\Gamma$. Τελικῶς καταλήγομεν εἰς τὸν ἴδιον τύπον (1).

Ἡ περίπτωσις τῆς ἀμβλείας. Ἔστω $\hat{A} > 90^\circ$

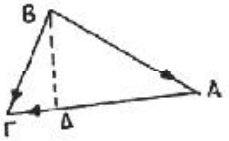
Ἡ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τῆς ΑΓ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ax.



$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 + (A\Gamma + A\Delta)^2$. τελικῶς

$$\boxed{B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 \cdot A\Gamma \cdot A\Delta} \quad (2)$$

Τό Θεώρημα τῆς ὀξείας καί ἀμβλείας γωνίας ὡς θέμα προσανατολισμένης Γεωμετρίας.



$$\vec{B\Gamma} = \vec{BA} + \vec{A\Gamma} \Longrightarrow B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2 + 2\vec{BA}\cdot\vec{A\Gamma}$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{A\Gamma} = \vec{A\Gamma}\cdot\vec{\Delta A} = -\vec{A\Gamma}\cdot\vec{A\Delta}$$

$$\boxed{B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2 - 2\vec{A\Gamma}\cdot\vec{A\Delta}} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διά πᾶσαν γωνίαν Α.

Πόρισμα:

Ἄν $A < 90^\circ \Longrightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$. Προκύπτει ἀμέσως ἀπό τόν τύπον (1)

Ἄν $A > 90^\circ \Longrightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$. Προκύπτει ἀπό τόν τύπον (2).

Ἀντιστρόφως.

Ἄν εἰς τρίγωνον $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2 \Longrightarrow \hat{A} < 90^\circ$.

Δυνάμεθα νά δώσωμεν μίαν σύντομον λύσιν διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ὑπάρχουν τρία ἐνδεχόμενα: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{A} > 90^\circ$, $\hat{A} < 90^\circ$. Διά τό πρῶτον θά ἦτο $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, διά τό δεύτερον $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$. Ἀντιφάσκουν καί αἱ δύο σχέσεις πρός τήν ὑπόθεσιν. Ὅθεν $A < 90^\circ$.

Ὁμοίως: Ἄν $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \Longrightarrow A > 90^\circ$. Συναγίζομεν τελικῶς, εἰς τό διάγραμμα.

$$\boxed{B\Gamma^2 \lessgtr AB^2 + A\Gamma^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} A < 90^\circ \\ A = 90^\circ \\ A > 90^\circ \end{cases}} \qquad (4)$$

Σχετικῶς πρός τό εἶδος τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι χρήσιμος καί αἱ κάτωθι προτάσεις:

Η (ὀρθόκεντρον) ∈ εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \Longleftrightarrow \hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma} < 90^\circ$.

Η ∈ εἰς τήν περίμετρον τοῦ $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \Longleftrightarrow$ Τρίγωνον ὀρθογώνιον. (Τό Η ταυτίζεται πρός τήν κορυφήν τῆς ὀρθῆς).

Η ∈ εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ τριγώνου $\Longleftrightarrow$ Τρίγωνον ἀμβλυγώνιον.

Αἱ ἴδιες ἀκριβῶς προτάσεις ἰσχύουν ἄν ἀντί τοῦ ὀρθοκέντρου Η λάβωμεν τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου Ο. Ἐάν συμβῇ τό Ο νά κεῖται ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἀναγκαστικῶς, θά ταυτίζεται μέ τό μέσον μιᾶς πλευρᾶς.

Θεωρήματα τῶν διαμέσων

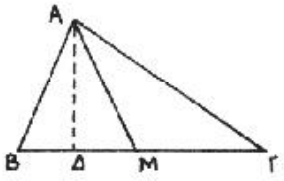
3-6.2 Τό θεώρημα τῆς διαμέσου

Ἔστω τό τρίγωνον ΑΒΓ καί ΑΜ ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Θά δείξωμεν ὅτι:

$$\boxed{AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις:

Ἄν $AB = A\Gamma$, τά τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ εἶναι ὀρθογώνια καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εἰς αὐτά προκύπτει ὁ τύπος (1).



Θά ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν $AB < A\Gamma$ χωρίς ταῦτα νά μειώνῃ τήν γενικότητα τοῦ προβλήματος. Διά τά τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ ἔχομεν: ΑΜ κοινή, $MB = M\Gamma$, $AB < A\Gamma$. Ἄρα συμφώνως πρός 1-2.6 $\angle AMB < \angle AM\Gamma$.

ήτοι $\hat{AMΓ}$ άμβλεία.

$\hat{AMB}$: Θεώρημα βξείας $\hat{AMB}$: $AB^2 = AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{4} - 2BM \cdot \Delta M$ (2)

$\hat{AMΓ}$: Θεώρημα άμβλείας $\hat{AMΓ}$: $A\Gamma^2 = AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{4} + 2\Gamma M \cdot \Delta M$ (3)

Εάν προσθέσωμεν τά (2), (3) έχωμεν τό ζητούμενον.

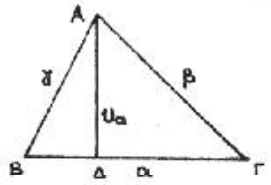
Εάν άφαιρέσωμεν άπό τήν (3) τήν (2) προκύπτει:

$$\boxed{A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M} \quad (4)$$

Ο τελευταίος τύπος εἰς τήν προσανατολισμένην Γεωμετρίαν γράφεται:

$$\boxed{A\Gamma^2 - AB^2 = 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Delta M}} \quad (5)$$

3-6.3 Υπολογισμός τοῦ ὕψους τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ



Ἀπό τό $\hat{A\Delta B}$: $\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$

Ἐκ τοῦ τύπου 3(α), $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta}$, $B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$

Ἄρα $\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2} =$

$= \frac{(\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma-\beta^2)(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{[(\alpha+\gamma)^2-\beta^2][\beta^2-(\alpha-\gamma)^2]}{4\alpha^2} =$

$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{2\tau \cdot 2(\tau-\alpha) \cdot 2(\tau-\beta) \cdot 2(\tau-\gamma)}{4\alpha^2}$ καί τελικῶς,

$$\boxed{\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \quad (1)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α΄.

261. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$, $A\Delta$ ἡ διάμεσος αὐτοῦ, ΔE καὶ ΔZ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $A\Delta B$, $A\Delta\Gamma$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ EZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$.

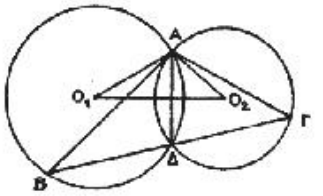
Ἀπόδειξις:

Διὰ τὸ τρίγωνον $A\Delta B$ κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου: $\frac{AE}{EB}=\frac{A\Delta}{B\Delta}$ (1). Ἀπὸ τὸ $A\hat{\Delta}\Gamma$: $\frac{AZ}{Z\Gamma}=\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ (2). Ἀλλὰ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα. Ἄρα $\frac{AE}{EB}=\frac{AZ}{Z\Gamma}$ καὶ βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ $EZ\parallel B\Gamma$.

262. Τριγώνου $AB\Gamma$, Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς $B\Gamma$. Ἐὰν ρ_1,ρ_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta B$, $A\Delta\Gamma$ ἀντιστοίχως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:

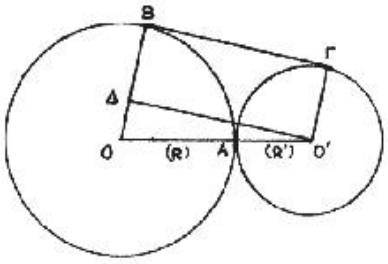
Ἔστω (O_1,ρ_1), (O_2,ρ_2) οἱ κύκλοι περὶ τὰ $A\hat{B}\Delta$, $A\hat{\Gamma}\Delta$. Φέρομεν τὴν διάκεντρον O_1O_2 αὐτῶν. Θὰ ἔχωμεν: $A\hat{O}_1O_2=A\hat{B}\Gamma$ καὶ $A\hat{O}_2O_1=A\hat{\Gamma}B$, ἄρα $O_1\hat{A}O_2\sim B\hat{A}\Gamma\Rightarrow\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{AB}{A\Gamma}$.



263. Δύο κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς A. Ἂν $B\Gamma$ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν θὰ εἶναι $B\Gamma^2=4RR'$.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὴν $O'\Delta\perp OB$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $O\Delta O'$ βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος θὰ ἔχωμεν $OO'^2=O\Delta^2+O'\Delta^2$. Ἀλλὰ $OO'=R+R'$, $O\Delta=R-R'$, $O'\Delta=B\Gamma$. Συνεπῶς $(R+R')^2=(R-R')^2+B\Gamma^2\Rightarrow B\Gamma^2=4RR'$.



264. Δίδεται τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ μὲ βάσεις $AB=\beta$, $\Gamma\Delta=B$. Ἐὰν $M\in A\Delta$ ὥστε $\frac{AM}{M\Delta}=\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $N=(\varepsilon)\cap B\Gamma$ ὅπου (ε) ἡ ἐκ τοῦ M παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, νὰ δειχθῇ ὅτι $MN=\frac{\mu B+\nu\beta}{\mu+\nu}$.

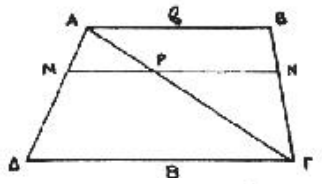
Ἀπόδειξις:

Ἔστω $P = MN \cap A\Gamma$. $\overset{\triangle}{MAP} \sim \overset{\triangle}{\Delta A\Gamma} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{MP}{B} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \Rightarrow MP = \frac{\mu B}{\mu+\nu}$ (1).

Ὁμοίως $PN = \frac{\nu\beta}{\mu+\nu}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow MN = \frac{\mu B+\nu\beta}{\mu+\nu}$.



265. Εἰς πᾶν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἐὰν E, Z τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἰσχύει: $AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2+4EZ^2$.

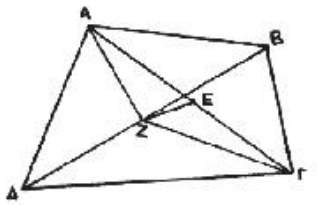
Ἀπόδειξις:

Θεώρ. διαμέσων $\overset{\triangle}{BA\Delta}$: $AB^2+A\Delta^2 = 2AZ^2+\frac{B\Delta^2}{2}$ (1). Θεώρ. διαμέσων $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$: $B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2 = 2\Gamma Z^2+\frac{B\Delta^2}{2}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = 2(AZ^2+\Gamma Z^2)+B\Delta^2$ (3).

Θεώρ. διαμέσων $\overset{\triangle}{AZ\Gamma}$: $AZ^2+\Gamma Z^2 = 2EZ^2+\frac{A\Gamma^2}{2}$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2+4EZ^2$



266. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων δύο καθέτων χορδῶν κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω E τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ A. $(\Gamma\Delta \perp AB) \wedge (BE \perp AB) \Longrightarrow \Gamma\Delta \parallel BE \Longrightarrow$

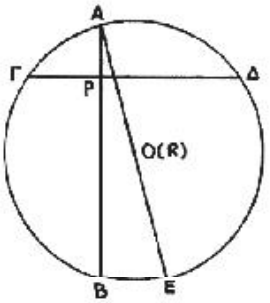
$\Longrightarrow B\Gamma = \Delta E$.

$\overset{\triangle}{A\Delta E}$: $A\Delta^2+\Delta E^2 = 4R^2$ (1)

$A\Delta^2 = PA^2+P\Delta^2$ (2)

$\Delta E^2 = B\Gamma^2 = PB^2+P\Gamma^2$ (3)

(1), (2), (3) $\Longrightarrow PA^2+PB^2+P\Gamma^2+P\Delta^2 = 4R^2$.



267. Δίδεται γωνία xOy καὶ μία ἀκολουθία περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Δείξατε ὅτι αἱ ἀκτῖνες των ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἀπόδειξις:

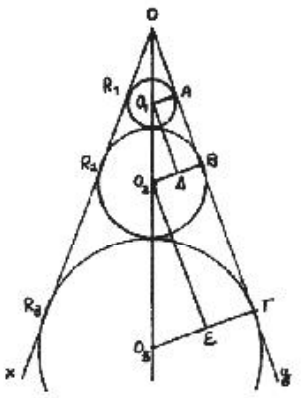
Ἔστω $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ τρεῖς διαδοχικαὶ περιφέρειαι τῆς ἀκολουθίας. Θὰ δείξωμεν ὅτι $R_2^2 = R_1R_2$.

$\overset{\triangle}{O_1AO_2} \sim \overset{\triangle}{O_2EO_3} \Longrightarrow \frac{O_1O_2}{O_2O_3} = \frac{O_2\Delta}{O_3E}$ (1)

$O_1O_2 = R_1+R_2$, $O_2O_3 = R_2+R_3$, $O_2\Delta = R_2-R_1$, $O_3E = R_3-R_2$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1). Θὰ ἔχωμεν $\frac{R_1+R_2}{R_2+R_3} = \frac{R_2-R_1}{R_3-R_2} = \frac{2R_2}{2R_3} = \frac{2R_1}{2R_2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow R_2^2 = R_1R_3$.



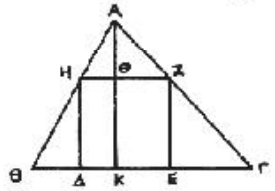
268. Νά ὑπολογισθῆ ἡ πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἐπί τῆς ὁποίας κεῖται ἡ μία πλευρά τοῦ τετραγώνου καί τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

Λύσις:

Ἔστω x ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου ΔΕΖΗ, καί $AK = \upsilon_\alpha$.

$\hat{HAZ} \sim \hat{BA\Gamma} \Longrightarrow \frac{HZ}{B\Gamma} = \frac{A\Theta}{AK} \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{\upsilon_\alpha - x}{\upsilon_\alpha} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha + \upsilon_\alpha}$.



269. Νά δειχθῆ ὅτι τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τυχόντος σημείου ἑνός τόξου ἀπό τήν χορδήν αὐτοῦ ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπό τῶν ἐφαπτομένων εἰς τά ἄκρα τῆς χορδῆς.

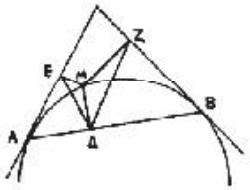
Ἀπόδειξις:

Ἐγγράψιμον $EA\Delta M \Longrightarrow \hat{M\Delta E} = \hat{MAE}$ (1)

Ὑπό χορδῆς καί ἐφαπτομένης: $\hat{MAE} = \hat{MBA}$ (2)

Ἐγγράψιμον $ZB\Delta M \Longrightarrow \hat{MBA} = \hat{MZ\Delta}$ (3)

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \hat{M\Delta E} = \hat{MZ\Delta}$. Ὁμοίως $\hat{ME\Delta} = \hat{M\Delta Z}$. Ἄρα $\hat{M\Delta E} \sim \hat{MZ\Delta} \Longrightarrow M\Delta^2 = ME \cdot MZ$.



270. Δύο περιφέρειαι (O, R) καί (O', R') ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τό Α. Θεωρήσωμεν δύο καθέτους τεμνούσας ΒΑΒ′ καί ΓΑΓ′. Ἐάν Δ, Δ′ τά σημεῖα ὅπου ἡ διάκεντρος ΟΟ′ τέμνει τάς περιφερείας, δείξατε ὅτι $BB'^2 + \Gamma\Gamma'^2 = \Delta\Delta'^2$.

Ἀπόδειξις:

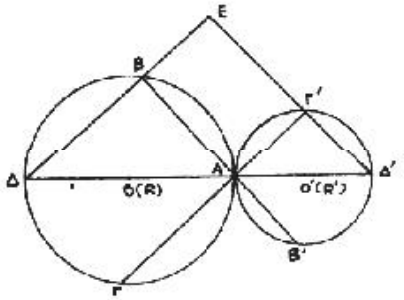
Αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, Δ′Γ′ τέμνονται εἰς Ε.

Τά τετράπλευρα ΑΒΕΓ′, ΔΓΓ′Ε καί ΟΟ′Δ′Ε εἶναι ὀρθογώνια καί συνεπῶς

$\Delta E^2 + \Delta' E^2 = \Delta\Delta'^2$.

Ἀλλά $\Delta E = \Gamma\Gamma'$, $\Delta' E = BB'$ ἤτοι

$BB'^2 + \Gamma\Gamma'^2 = \Delta\Delta'^2$.



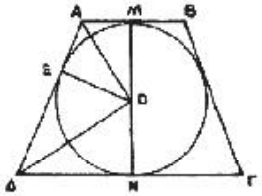
271. Τό γινόμενον τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπεζίου περιγεγραμμένου περί κύκλον (O, R) ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ ὕψους.

Ἀπόδειξις:

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $AB \cdot \Gamma\Delta = 4R^2$.

$B\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}A = 2^L \Longrightarrow O\hat{A}\Delta + O\hat{\Delta}A = 1^L$.

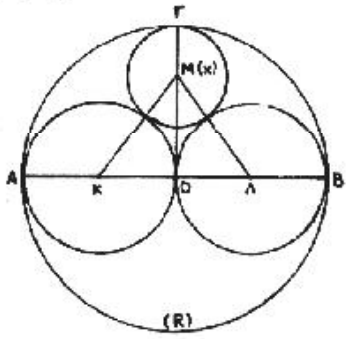
$A\hat{O}\Delta$: $AE \cdot \Delta E = OE^2$ ἤ $AM \cdot \Delta N = \frac{A\Delta}{2} \cdot \frac{\Gamma\Delta}{2} = R^2 \Longrightarrow AB \cdot \Gamma\Delta = 4R^2$.



272. Δίδεται κύκλος (O) διαμέτρου ΑΒ. Θεωροῦμεν τούς κύκλους (K) καί (Λ) μέ διαμέτρους ἀντιστοίχως ΟΑ, ΟΒ. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τοῦ

κύκλου ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν (O), (K), (Λ).

Λύση:



Θά ὑπολογίσωμεν τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου (M, x).

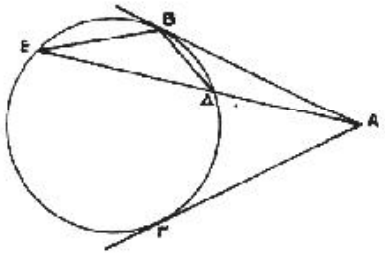
Τό $\hat{KMA}$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ἡ διάκεντρος OM εἶναι μεσοκάθετος ἐπί τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΛ.

$\hat{KOM}$: $KM^2 = KO^2 + OM^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\frac{R}{2}+x)^2 = \frac{R^2}{4} + (R-x)^2 \Rightarrow x = \frac{R}{3}$.

273. Ἐκ σημείου Α ἐκτός περιφερείας (O) φέρομεν τάς ἐφαπτομένας ΑΒ καί ΑΓ. Ἐάν ΑΔΕ τυχούσα τέμνουσα νά δειχθῇ $BE \cdot \Gamma\Delta = B\Delta \cdot \Gamma E$.

Ἀπόδειξις:



Ὑπό χορδῆς καί ἐφαπτομένης :

$A\hat{B}\Delta = A\hat{E}B$. $\hat{A\Delta B} \sim \hat{ABE} \Longrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{B\Delta}{BE}$ (1).

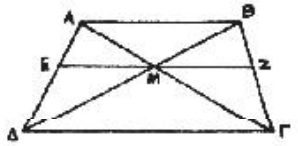
Ὁμοίως $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \Longrightarrow BE \cdot \Gamma\Delta =$

$= B\Delta \cdot \Gamma E$.

274. Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς Μ τῶν διαγωνίων τραπεζίου φέρομεν τήν παράλληλον πρός τάς βάσεις ἡ ὁποία τέμνει τάς μή παραλλήλους πλευράς εἰς Ε καί Ζ. Δείξατε ὅτι ΜΕ = ΜΖ.

Ἀπόδειξις:



$\hat{\Delta ME} \sim \hat{\Delta BA} \Longrightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{\Delta E}{\Delta A}$ (1).

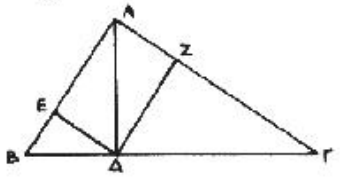
$\hat{\Gamma MZ} \sim \hat{\Gamma AB} \Longrightarrow \frac{MZ}{AB} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma B}$ (2).

Ἀλλά ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν $\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma B}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{MZ}{AB} \Longrightarrow ME = MZ$.

275. Ἐκ τοῦ ποδός Δ τοῦ ὕψους ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται αἱ κάθετοι ΔΕ, ΔΖ ἐπί τάς καθέτους πλευράς ΑΒ καί ΑΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$.

Ἀπόδειξις:



$\hat{AB\Gamma} \Longrightarrow AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ (1)

$\hat{AB\Gamma} \Longrightarrow A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \Longrightarrow \frac{AB^4}{A\Gamma^4} = \frac{B\Delta^2}{\Gamma\Delta^2}$ (3).

$\hat{B\Delta A} \Longrightarrow B\Delta^2 = BE \cdot AB$ (4)

$\hat{\Gamma\Delta A} \Longrightarrow \Gamma\Delta^2 = \Gamma Z \cdot A\Gamma$ (5)

(4), (5) $\Longrightarrow \frac{B\Delta^2}{\Gamma\Delta^2} = \frac{AB}{A\Gamma} \cdot \frac{BE}{\Gamma Z}$ (6)

(3), (6) $\Longrightarrow \frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$.

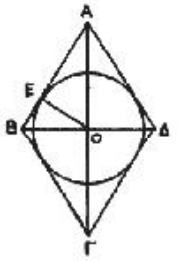
276. Ἐάν ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος περιγεγραμμένος περί κύκλον (O, R)

νά δειχθῆ $\frac{1}{A\Gamma^2}+\frac{1}{B\Delta^2}=\frac{1}{4R^2}$.

Ἀπόδειξις:

$\overset{\triangle}{AOB} \Longrightarrow \frac{1}{AO^2}+\frac{1}{BO^2}=\frac{1}{OE^2} \Longrightarrow \frac{1}{4AO^2}+\frac{1}{4BO^2}=$

$=\frac{1}{4R^2} \Longrightarrow \frac{1}{A\Gamma^2}+\frac{1}{B\Delta^2}=\frac{1}{4R^2}$.



277. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια (O,R) διαμέτρου AB. Μέ διάμετρον AO γράφομεν ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν περιεκομένην ἐντὸς τῆς πρώτης. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν καὶ τῆς OB, συναρτήσει τοῦ R.

Λύσις:

$\overset{\triangle}{K\Gamma\Lambda} \Longrightarrow K\Lambda^2=K\Gamma^2+\Lambda\Gamma^2$ (1)

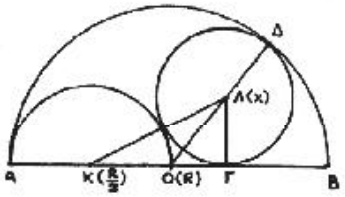
$K\Lambda=\frac{R}{2}+x$, $K\Gamma=\frac{R}{2}+O\Gamma$, $\Lambda\Gamma=x$ (2)

$\overset{\triangle}{O\Gamma\Lambda} \Longrightarrow O\Lambda^2=O\Gamma^2+\Lambda\Gamma^2 \Longrightarrow (R-x)^2=$

$=O\Gamma^2+x^2 \Longrightarrow O\Gamma=\sqrt{R^2-2Rx}$ (3)

$(1),(2),(3) \Longrightarrow \left(\frac{R}{2}+x\right)^2=$

$=\left[\frac{R}{2}+\sqrt{R^2-2Rx}\right]^2+x^2 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}R$.



278. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια (O,R) μέ διάμετρον AB. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον ἀκτῖνα OΓ ἐπὶ τὴν AB καὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου OA, ἡ ὁποία περιέκεται ἐντὸς τῆς προηγουμένης. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν καὶ τῆς OΓ.

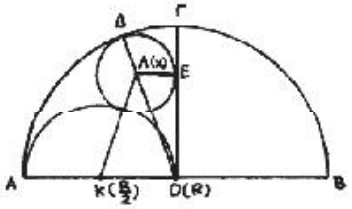
Λύσις:

Ὡς γνωστὸν (Γ Ἀσκ. 263)

$OE^2=4\frac{R}{2}x=2Rx$.

$\overset{\triangle}{OE\Lambda} \Longrightarrow O\Lambda^2=\Lambda E^2+OE^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (R-x)^2=x^2+2Rx \Longrightarrow x=\frac{R}{4}$.



279. Τραπέζιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς παραλληλόγραμμον (ἑκάστη κορυφὴ τοῦ τραπεζίου εἰς μίαν πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου). Νά δειχθῆ ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται ἐπὶ μιᾶς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἀπόδειξις:

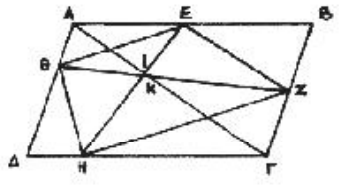
Ἔστω ὅτι $I=A\Gamma\cap EH$ καὶ $K=A\Gamma\cap\Theta Z$.

$\overset{\triangle}{AEI}\sim\overset{\triangle}{\Gamma IH} \Longrightarrow \frac{AI}{\Gamma I}=\frac{AE}{\Gamma H}$ (1)

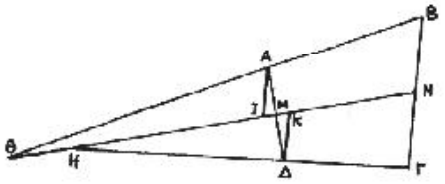
$\overset{\triangle}{A\Theta K}\sim\overset{\triangle}{\Gamma ZK} \Longrightarrow \frac{AK}{\Gamma K}=\frac{A\Theta}{\Gamma Z}$ (2)

$\overset{\triangle}{EA\Theta}\sim\overset{\triangle}{H\Gamma Z} \Longrightarrow \frac{AE}{\Gamma H}=\frac{A\Theta}{\Gamma Z}$ (3)

$(1),(2),(3) \Longrightarrow \frac{AI}{\Gamma I}=\frac{AK}{\Gamma K} \Longrightarrow I\equiv K$.



280. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Ἔστω Θ καὶ Η τὰ σημεῖα ὅπου ἡ εὐθεία ΜΝ τέμνει τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ δειχθῇ $\frac{AΘ}{BΘ} = \frac{ΔH}{ΓH}$.



Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὰς $AI \parallel BN$, $ΔK \parallel ΓN$.

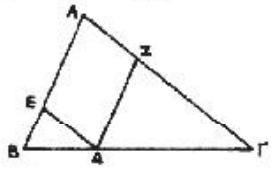
Θὰ ἔχωμεν $\hat{AMI} = \hat{ΔMK} \Longrightarrow AI = ΔK$.

$\hat{ΘAI} \sim \hat{ΘBN} \Longrightarrow \frac{AΘ}{BΘ} = \frac{AI}{BN}$ (1)

$\hat{HΔK} \sim \hat{HΓN} \Longrightarrow \frac{ΔH}{ΓH} = \frac{ΔK}{ΓN}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{AΘ}{BΘ} = \frac{ΔH}{ΓH}$.

281. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΓ. Ἐὰν Ζ καὶ Ε τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῶν μετὰ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ $\frac{ΔE}{AΓ} + \frac{ΔZ}{AB} = 1$.



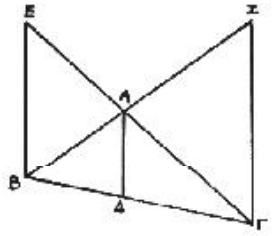
Ἀπόδειξις:

$\hat{ΔBE} \sim \hat{ΓBA} \Longrightarrow \frac{ΔE}{AΓ} = \frac{BΔ}{BΓ}$ (1)

$\hat{ΔΓZ} \sim \hat{BΓA} \Longrightarrow \frac{ΔZ}{AB} = \frac{ΓΔ}{BΓ}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{ΔE}{AΓ} + \frac{ΔZ}{AB} = \frac{BΔ+ΓΔ}{BΓ} = 1$.

282. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{BE} + \frac{1}{ΓZ} = \frac{1}{AΔ}$.



Ἀπόδειξις:

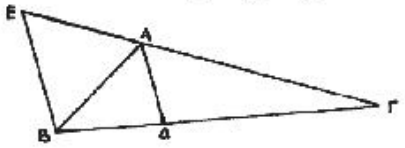
$\hat{AΔΓ} \sim \hat{EΓB} \Longrightarrow \frac{AΔ}{BE} = \frac{AΓ}{BΓ}$ (1)

$\hat{ABΔ} \sim \hat{ZBΓ} \Longrightarrow \frac{AΔ}{ΓZ} = \frac{BΔ}{BΓ}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{AΔ}{BE} + \frac{AΔ}{ΓZ} = \frac{AΓ+BΔ}{BΓ} = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{BE} + \frac{1}{ΓZ} = \frac{1}{AΔ}$.

283. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{A} = 120°$ τότε $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\delta_a}$.



Ἀπόδειξις:

Ἐπὶ τῆς ΓΑ λαμβάνομεν $AE = AB$.

Τὸ $\hat{AEB}$ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα

$\hat{EBA} = \hat{BAΔ} = 60°$ ἤτοι $EB \parallel AΔ$.

$\hat{AΔΓ} \sim \hat{EΓB} \Longrightarrow \frac{AΔ}{BE} = \frac{AΓ}{ΓE} \Longrightarrow \frac{\delta_a}{\gamma} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\delta_a}$.

284. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $2\beta^2 = a^2+\gamma^2$ τότε ὑπάρχει τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς διαμέσους τοῦ προηγουμένου ὅμοιον πρὸς αὐτό.

Ἀπόδειξις:

$\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2} \Longrightarrow a^2+\gamma^2+2\gamma^2 = 4\mu_a^2 + a^2 \Longrightarrow \frac{\mu_a}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

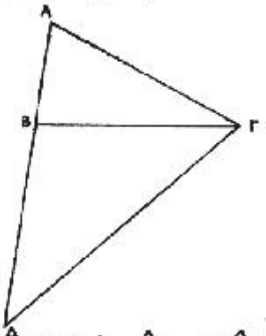
$a^2+\beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \Longrightarrow 2a^2+a^2+\gamma^2 = 4\mu_\gamma^2+\gamma^2 \Longrightarrow \frac{\mu_\gamma}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

$\alpha^2+\gamma^2 = 2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2} \Rightarrow 2\theta^2 = 2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2} \Rightarrow \frac{\mu_\beta}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3).

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) προκύπτει τὸ συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχει τρίγωνον μέ πλευράς $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ (διότι $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \xrightarrow{(1),(2),(3)} |\mu_\alpha-\mu_\beta|<\mu_\beta<\mu_\alpha+\mu_\beta$) καί ὅτι εἶναι ὅμοιον πρός τό $\hat{AB\Gamma}$.

285. Ἄν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ τότε $\theta^2=\gamma(\alpha+\gamma)$. Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις:



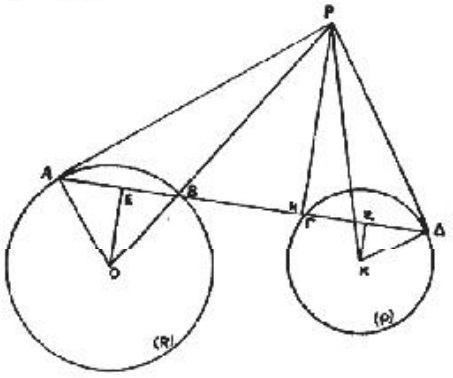
Προεκτείνομεν τήν ΑΒ κατά τμῆμα $B\Delta=B\Gamma$. Θά εἶναι $B\hat{\Delta}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma}$. Ἄρα εἶναι $\hat{BA\Gamma} \sim \hat{\Gamma A\Delta} \Rightarrow \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{A\Delta} = \frac{\theta}{\alpha+\gamma} \Rightarrow \theta^2=\gamma(\alpha+\gamma)$.

Ἀντιστρόφως:

Λαμβάνομεν $B\Delta=\alpha$. Ἡ ὑπόθεσις $\theta^2=\gamma(\alpha+\gamma)$ γράφεται $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$ (1). Τά τρίγωνα $\hat{BA\Gamma}$, $\hat{\Gamma A\Delta}$ ἔχουν τήν γωνίαν Α κοινήν καί τάς πλευράς τάς προσκειμένας ἀναλόγους, ἄρα εἶναι ὅμοια. Συνεπῶς $A\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Ἀλλά $\hat{B}=2A\hat{\Delta}\Gamma$ διότι τό $\hat{\Gamma B\Delta}$ ἐκ κατασκευῆς εἶναι ἰσοσκελές.

286. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο,R) καί (Κ,ρ) καί εὐθεία τέμνουσα τόν (Ο) εἰς Α, Β καί τόν (Κ) εἰς Γ, Δ ὥστε ΑΒ = ΓΔ (Β, Γ μεταξύ τῶν Α, Δ). Νά δειχθῇ ὅτι ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Α καί Δ οἱ δύο κύκλοι φαίνονται ὑπό ἴσας γωνίας.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Ρ τό σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Α, Δ. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $A\hat{P}O = \Delta\hat{P}K$, ἤ $\hat{APO} \sim \hat{\Delta PK}$. Φέρομεν τάς ΟΕ, ΡΗ, ΚΖ καθέτους ἐπί τήν εὐθεῖαν ΑΔ. $P\hat{A}H = A\hat{O}E \Rightarrow \hat{PAH} \sim \hat{AOE} \Rightarrow \frac{PA}{OA} = \frac{PH}{AE}$ (1). Ὁμοίως ἐκ τῶν $\hat{PDH} \sim \hat{\Delta KZ} \Rightarrow \frac{P\Delta}{K\Delta} = \frac{PH}{\Delta Z}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \frac{PA}{OA} = \frac{P\Delta}{K\Delta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{APO} \sim \hat{\Delta PK}$.

Εὐκόλως δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν καί τό ἀντίστροφον. Ἀκόμη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομενική ἀπόστασις τοῦ Α ἀπό τόν (Κ) εἶναι ἴση πρός τήν ἐφαπτομενικήν ἀπόστασιν τοῦ Γ ἀπό τόν (Ο) (διότι $A\Gamma\cdot A\Delta = \Delta B\cdot\Delta A$).

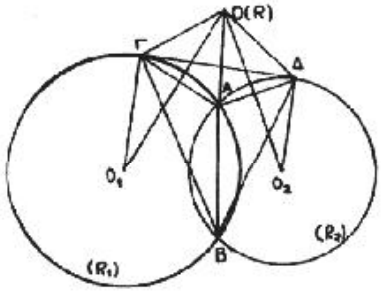
287. Δύο κύκλοι (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) τέμνονται εἰς Α καί Β. Ἔστω ΓΔ ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη αὐτῶν. Νά δειχθῇ: α) Οἱ κύκλοι περί τά τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΒΔ εἶναι ἴσοι β) Ἐάν R ἡ ἀκτίς τῶν ἴσων κύκλων $R^2 = R_1R_2$.

Ἀπόδειξις:

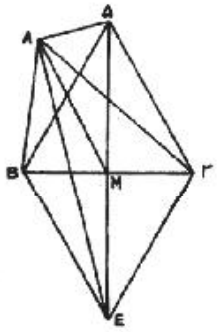
α) Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $\Gamma\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{B}\Delta = 2^L$. Πράγματι: $\Delta\hat{\Gamma}A = A\hat{B}\Gamma$ (1) $\Gamma\hat{\Delta}A = A\hat{B}\Delta$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \Gamma\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}A + \Gamma\hat{\Delta}A = 2^L - \Gamma\hat{A}\Delta$.

β) Εὑρίσκομεν τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου περὶ τὸ $\hat{\Gamma A \Delta}$. Φέρομεν δηλαδὴ τὰς μεσοκαθέτους ἐπὶ τῶν $A\Gamma, A\Delta$ αἱ ὁποῖαι προφανῶς διέρχονται διὰ τῶν O_1, O_2. Εἶναι $\Gamma\hat{O_1}O = \frac{A\hat{O}\Delta}{2} = A\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{O_2}O$. Ἐπίσης $\Gamma\hat{O}O_1 = \Delta\hat{O_2}O$. Ἄρα $O_1\hat{\Gamma}O \sim O\hat{\Delta}O_2 \Longrightarrow R^2 = R_1R_2$.



288. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ δίδεται ὅτι $2\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$. Μὲ πλευρὰν τὴν $B\Gamma$ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ καὶ $BE\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\hat{\Delta AE} = 1^L$.



Ἀπόδειξις:

Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, ἔχομεν $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ καὶ βάσει τῆς ὑποθέσεως $2\alpha^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Longrightarrow 3\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2 \Longrightarrow \mu_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$. Ἀλλὰ καὶ $M\Delta = ME = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$, ἄρα $\hat{\Delta AE} = 1^L$.

Παρατηρήσεις:

Ἂν $\hat{AB\Gamma}$ τυχόν, θὰ εἶναι $A\Delta^2 + AE^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

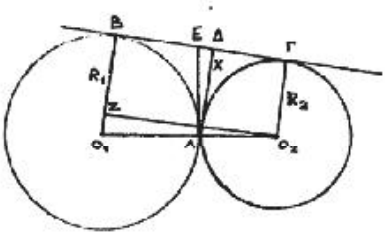
289. Δύο κύκλοι (O_1, R_1) καὶ (O_2, R_2) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς Α. Ἔστω $B\Gamma$ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν καὶ x ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ αὐτήν. Θὰ δείξωμεν ὅτι $x(R_1+R_2) = 2R_1R_2$.

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τῆς Ἀσκ. 264 ἔχομεν διὰ τὸ τραπέζιον $O_1B\Gamma O_2$:

$$x = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot R_1 + \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot R_2}{\frac{R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_1}{R_1+R_2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(R_1+R_2) = 2R_1R_2.$$



Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν καὶ ἑτέραν λύσιν διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων $A\hat{\Delta}E$, $O_2\hat{O_1}Z$ (Μὲ ποῖον τρόπον;).

290. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$: $\beta^2+\gamma^2 = 5\alpha^2 \Longrightarrow \mu_\beta \perp \mu_\gamma$.

Ἀπόδειξις:

$\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Longrightarrow 5\alpha^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\mu_\alpha}{3}$, ἄρα ἂν Κ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τὸ $\hat{BK\Gamma}$ εἶναι ὀρθογώνιον.

291. Τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του νὰ δειχθῇ ὅτι $AB\cdot B\Gamma\cdot\Delta E = A\Delta\cdot\Delta\Gamma\cdot BE$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω BZ καὶ ΓH αἱ ἀποστάσεις τῶν Β καὶ Δ ἀπὸ τὴν $A\Gamma$, καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Διὰ τὸ $\hat{AB\Gamma}$ θὰ ἔχωμεν: $AB\cdot B\Gamma = 2R\cdot BZ$ (1). Διὰ τὸ $\hat{A\Delta\Gamma}$ ἐπίσης $A\Delta\cdot\Delta\Gamma = 2R\cdot\Delta H$ (2).

$(1),(2) \Longrightarrow \frac{AB\cdot B\Gamma}{A\Delta\cdot\Delta\Gamma} = \frac{BZ}{\Delta H}$ (3).

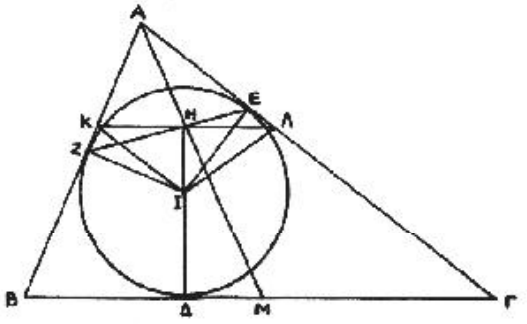
Αλλά έκ των ομοίων τριγώνων $H\hat{E}\Delta$ και $Z\hat{E}B$ προκύπτει ότι $\frac{BZ}{\Delta H} = \frac{BE}{\Delta E}$ (4).

Έκ των (3) και (4) λαμβάνομεν το ζητούμενον.

292. Εἰς τριγώνου $AB\Gamma$ Δ, E, Z εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως. Ἐὰν I τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ $H = \Delta I \cap EZ$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα AH διχοτομεῖ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

Απόδειξις:

Ἔστω $M = AH \cap B\Gamma$. Ἐκ τοῦ H φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$ τέμνουσα τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς K καὶ Λ. Θὰ εἶναι $\frac{HK}{H\Lambda} = \frac{MB}{M\Gamma}$. Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δείξωμεν ὅτι H τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $K\Lambda$.

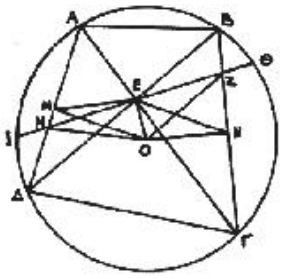


$K\hat{Z}I = K\hat{H}I = 1^L \Longrightarrow KZIH$ ἐγγράψιμον, ὁμοίως $EIIH$ ἐγγράψιμον. $KZIH \Longrightarrow H\hat{K}I = H\hat{Z}I$ (1) $EIIH \Longrightarrow$ $\Longrightarrow H\hat{\Lambda}I = H\hat{E}I$ (2). Ἀλλὰ $H\hat{Z}I = H\hat{E}I$ (3). (1),(2),(3) $\Longrightarrow H\hat{K}I = H\hat{\Lambda}I$, ἤτοι τὸ $K\hat{I}\Lambda$ ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ $IH \perp K\Lambda$ τὸ H θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς $K\Lambda$.

293. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ἐγγραψίμου εἰς κύκλον (O) E εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων. Φέρομεν χορδὴν μέσου E. Ἐὰν Z, H τὰ σημεῖα τομῆς τῆς χορδῆς μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ E εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ZH.

Απόδειξις:

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $H\hat{O}Z$ ἰσοσκελές. Φέρομεν τὰς OM καὶ ON καθέτους ἐπὶ τὰς $A\Delta, B\Gamma$.

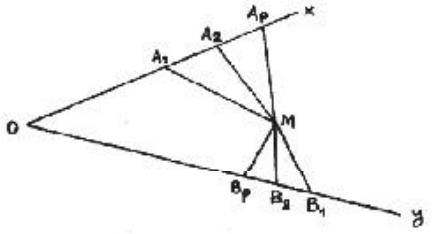


Προφανῶς τὰ $OEMH$, $OEZN$ εἶναι ἐγγράψιμα. Ἄρα $E\hat{H}O = E\hat{M}O$, $E\hat{Z}O = E\hat{N}O$. Τὰ $A\hat{E}\Delta, B\hat{E}\Gamma$ εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους διαμέσους EM, EN αὐτῶν θὰ ἔχωμεν $E\hat{M}\Delta = E\hat{N}\Gamma$ ἤτοι $E\hat{M}O = E\hat{N}O$.

294. Δίδεται γωνία xOy καὶ σημεῖον M. Θεωροῦμεν τὴν σειρὰν τῶν κύκλων $(O_1), (O_2), \ldots, (O_\nu)$ οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τῶν O καὶ M τέμνουν δὲ ἀντιστοίχως τὰς Ox, Oy εἰς $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_\nu, B_\nu)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \ldots = \frac{A_1A_\nu}{B_1B_\nu}$.

Απόδειξις:

Ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων OA_1MB_1, OA_2MB_2 διαπιστώνομεν ὅτι $\hat{MA_1A_2} = \hat{MB_1B_2}$, $\hat{MA_2A_1} = \hat{MB_2B_1}$, ἤτοι $\triangle MA_1A_2 \sim \triangle MB_1B_2$. Ἄρα: $\frac{MA_1}{MB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ (1). Ὁμοίως: $\frac{MA_1}{MB_1} = \frac{A_1A_\rho}{B_1B_\rho}$ (2) $(\rho \leqslant \nu)$.

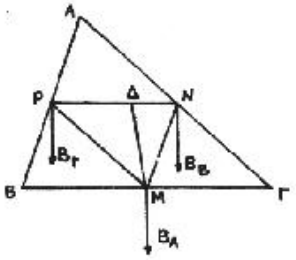


$(1),(2) \Longrightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_\rho}{B_1B_\rho}$.

295. Νά εὑρεθῇ τό κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου ἑνός τριγώνου.

Λύσις:

Ὡς γνωστόν ἐάν Δ τό σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν B_B, B_Γ θά εἶναι $B_\Gamma \cdot P\Delta = B_B \cdot N\Delta \Longrightarrow \frac{B_\Gamma}{B_B} = \frac{N\Delta}{P\Delta}$ (1). Ἀλλά ὁ λόγος τῶν βαρῶν εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν. Ἤτοι $\frac{B_\Gamma}{B_B} = \frac{\delta}{\beta}$ (2).



$(1),(2) \Longrightarrow \frac{N\Delta}{P\Delta} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{MN}{MP}$ ἤτοι τό κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας PMN τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $\hat{AB\Gamma}$. Διά λόγους συμμετρίας διαπιστοῦμεν ὅτι τό κέντρον βάρους εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{PNM}$ καί συνεπῶς ταυτίζεται μέ τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τοῦ $\hat{PMN}$.

296. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νά δειχθῇ ὅτι $\beta\gamma = AI \cdot AI_a$.

Ἀπόδειξις:

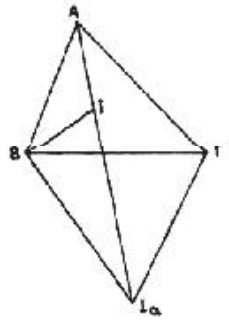
$\hat{BAI} = \hat{\Gamma AI_a}$ (1).

$\hat{AIB} = 1^L + \frac{\hat{\rho}}{2}$, $\hat{A\Gamma I_a} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} = 1^L + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

ἤτοι $\hat{AIB} = \hat{A\Gamma I_a}$ (2).

$(1),(2) \longrightarrow \triangle AIB \sim \triangle A\Gamma I_a \longrightarrow$

$\Longrightarrow \beta\gamma = AI \cdot AI_a$.



297. $\Gamma\Delta \perp AB \Longleftrightarrow A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = A\Delta^2 - B\Delta^2$.

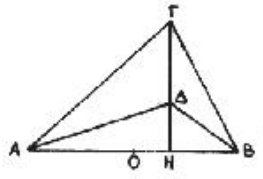
Ἀπόδειξις:

Ἔστω Ο τό μέσον τῆς ΑΒ.

$\triangle A\Gamma B$ (ἔστω $A\Gamma > B\Gamma$): $A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 2AB \cdot \rho$ (1) ὅπου ρ ἡ προβολή τῆς ΟΓ ἐπί τήν ΑΒ.

$\triangle A\Delta B$: $A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2AB \cdot \rho$ (2).

$(1),(2) \Longrightarrow A\Gamma^2 - AB^2 = A\Delta^2 - B\Delta^2$.



Ἀντιστρόφως:

Ἔστω $A\Gamma^2 - B\Gamma^2 > 0$.

$\triangle A\Gamma B$: $A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 2\,AB \cdot OH$ (1)

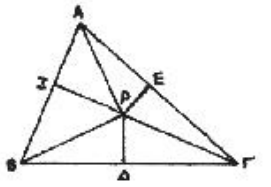
$\triangle A\Delta B$: $A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2\,AB \cdot OH'$ (2)

(1),(2) $\Longrightarrow$ $2AB\cdot OH = 2AB\cdot OH' \Longrightarrow OH = OH' \Longrightarrow H \equiv H'$.

298. Θεώρημα τοῦ Carnot.

Σημεῖον Ρ προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ^2 + B\Delta^2 + \Gamma E^2 = AE^2 + BZ^2 + \Gamma\Delta^2$. Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις:



$\hat{B}P\Delta$, $\hat{\Gamma}P\Delta \Longrightarrow B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2 = BP^2 - \Gamma P^2$ (1)

$\hat{\Gamma}PE$, $\hat{A}PE \Longrightarrow \Gamma E^2 - AE^2 = \Gamma P^2 - AP^2$ (2)

$\hat{A}PZ$, $\hat{B}PZ \Longrightarrow AZ^2 - BZ^2 = AP^2 - BP^2$ (3)

(1),(2),(3) $\Longrightarrow B\Delta^2 + \Gamma E^2 + AZ^2 = \Gamma\Delta^2 + AE^2 + BZ^2$.

Ἀντιστρόφως.

Ἔστω Δ, Ε, Ζ σημεῖα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ὑποτιθεμένου ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $AZ^2 + B\Delta^2 + \Gamma E^2 = AE^2 + BZ^2 + \Gamma\Delta^2$ (4) θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

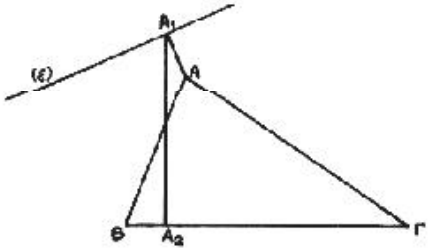
Φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τῶν ΑΓ, ΒΓ εἰς Δ, Ε· ἔστω Ρ τὸ σημεῖον τομῆς των. Ἡ ἐκ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἔστω ἡ ΡΖ′. θὰ εἶναι βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος:

$B\Delta^2 + \Gamma E^2 + AZ'^2 = \Gamma\Delta^2 + AE^2 + BZ'^2$. (5)

(4),(5) $\Longrightarrow AZ'^2 - BZ'^2 = AZ^2 - BZ^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι $Z \equiv Z'$.

299. Ἔστω AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τυχούσαν εὐθεῖαν (ε). Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐκ τῶν A_1, B_1, Γ_1 ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



Ἐκ τῶν A_1, B_1, Γ_1 ἄγονται ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν αἱ κάθετοι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$.

Βάσει τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι

$A\Gamma_2^2 + BA_2^2 + \Gamma B_2^2 = AB_2^2 + B\Gamma_2^2 + \Gamma A_2^2$.

Πράγματι, ὡς εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται, ἔχομεν

$$BA_2^2 - \Gamma A_2^2 = BA_1^2 - \Gamma A_1^2 = BB_1^2 + B_1A_1^2 - \Gamma\Gamma_1^2 - A_1\Gamma_1^2 \quad (1)$$

Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν Α, Β, Γ λαμβάνομεν

$$\Gamma B_2^2 - AB_2^2 = \Gamma B_1^2 - AB_1^2 = \Gamma\Gamma_1^2 + \Gamma_1B_1^2 - AA_1^2 - B_1A_1^2 \quad (2)$$

$$A\Gamma_2^2 - B\Gamma_2^2 = A\Gamma_1^2 - B\Gamma_1^2 = AA_1^2 + A_1\Gamma_1^2 - BB_1^2 - \Gamma_1B_1^2 \quad (3)$$

(1),(2),(3) $\Longrightarrow BA_2^2 - \Gamma A_2^2 + \Gamma B_2^2 - AB_2^2 + A\Gamma_2^2 - B\Gamma_2^2 = 0$.

300. Εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἡ παράλληλος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β τέμνει τὴν ΒΓ εἰς Δ, ἐνῷ ἡ παράλληλος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς Γ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς Ε.

Νά δειχθῆ ὅτι $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma E}$.

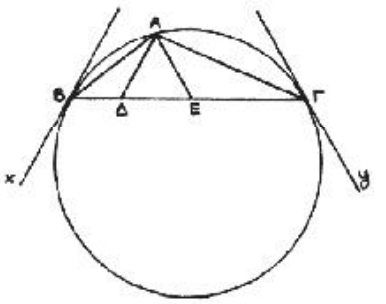
Ἀπόδειξις:

$x\hat{B}\Delta = \hat{A}$ } $\Longrightarrow B\hat{\Delta}A \sim B\hat{A}\Gamma$ (1)
$x\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Lambda$ }

(1) $\Longrightarrow \frac{B\Delta}{AB} = \frac{AB}{B\Gamma} \Longrightarrow AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ (2)

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $A\Gamma^2 = \Gamma E \cdot B\Gamma$ (3)

(2), (3) $\Longrightarrow \frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma E}$.



301. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. καταασκευάζομεν ν ἴσους κύκλους οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μεταξύ των καί τῆς ΒΓ. Ὁ πρῶτος ἐφάπτεται τῆς ΑΒ ὁ δέ τελευταῖος τῆς ΑΓ. Ὑπολογίσατε τήν ἀκτίνα των συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α, τοῦ ν καί τῆς ἀκτίνος τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ρ.

Λύσις:

Ἔστω x ἡ ἀκτίς τῶν ν ἴσων κύκλων.

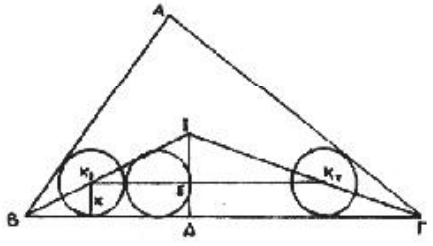
$K_1\hat{I}K_\nu \sim B\hat{I}\Gamma \Longrightarrow \frac{K_1K_\nu}{B\Gamma} = \frac{IE}{I\Delta}$ (1)

$K_1K_\nu = \nu \cdot 2x - 2x = 2(\nu-1)x$

$IE = \rho - x$, $I\Delta = \rho$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1)

$\frac{2(\nu-1)x}{\alpha} = \frac{\rho-x}{\rho} \Longrightarrow x = \frac{\alpha\rho}{\alpha+2(\nu-1)\rho}$.



302. Εἰς πᾶν τρίγωνον $4v_\alpha^2 \leqslant (\beta+\gamma)^2 - \alpha^2$.

Ἀπόδειξις:

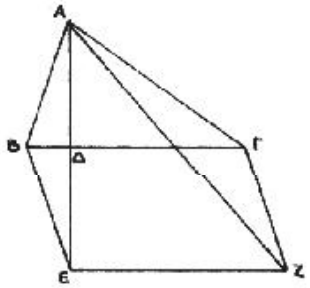
Ἔστω Ε τό συμμετρικόν τοῦ Α πρός τήν ΒΓ. Σχηματίζομεν τό παραλληλόγραμμον ΒΓΖΕ.

$A\hat{E}Z \longrightarrow AE^2 - AZ^2 \; EZ^2$ ἤ $4v_\alpha^2 - AZ^2 = \alpha^2$.

Ἀλλά $AZ \leqslant A\Gamma + \Gamma Z = \beta+\gamma$. Ὅθεν $4v_\alpha^2 \leqslant (\beta+\gamma)^2 - \alpha^2$.

Ἡ ἰσότης διά τό ἰσοσκελές.

Μία ἄλλη σύντομος λύσις μπορεῖ νά δοθῆ ἐάν λάβωμεν τό συμμετρικόν τοῦ Β ὡς πρός τήν παράλληλον διά τοῦ Α πρός τήν ΒΓ.



303. Ἔστω Δ, Ε, Ζ τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (Ι) εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΒΑΓ μετά τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐάν Μ τυχόν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ι) καί $H = ME \cap B\Gamma$, $\Theta = MZ \cap B\Gamma$ νά δειχθῆ ὅτι $B\Gamma^2 = 4H\Gamma \cdot B\Theta$.

Ἀπόδειξις:

$M\hat{\Theta}H = E\hat{Z}M$ (1)

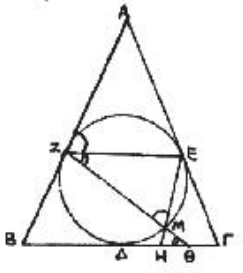
$E\hat{M}Z = A\hat{Z}E = \hat{B}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow B\hat{Z}\Theta \sim M\hat{E}Z$ (3)

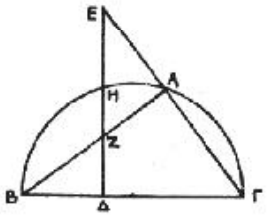
Ἐπίσης $\Gamma\hat{E}H \sim M\hat{Z}E$ (4)

(3), (4) $\Longrightarrow B\hat{Z}\Theta \sim \Gamma\hat{H}E \Longrightarrow \frac{BZ}{\Gamma H} = \frac{B\Theta}{\Gamma E} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Gamma H \cdot B\Theta = BZ^2 = \frac{B\Gamma^2}{4}$.



304. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια (ο) διαμέτρου ΒΓ. Ἔστω Α τυχόν σημεῖον αὐτῆς καὶ Δ τυχόν σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Ἡ εἰς τὸ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Ζ τὴν ΑΓ εἰς Ε καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta H^2 = \Delta Z \cdot \Delta E$.

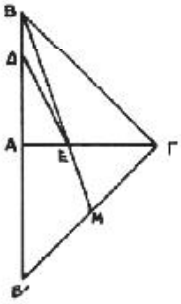


Ἀπόδειξις:

$B\hat{\Delta}Z \sim E\hat{\Delta}\Gamma$ διότι $\Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$.

Ἄρα $\frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma}$ ἢ $\Delta E \cdot \Delta Z = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = \Delta H^2$.

305. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ ($A = 1^L$). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ὥστε $A\Delta = \frac{2}{3}AB$, $AE = \frac{A\Gamma}{3}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $A\hat{\Delta}E = E\hat{B}\Gamma$.

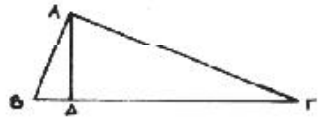


Ἀπόδειξις:

Ἔστω Β' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς ΑΓ. Τὸ $B\hat{\Gamma}B'$ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον. Τὸ σημεῖον Ε ἐκ τῆς κατασκευῆς εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ $B\hat{\Gamma}B'$. Ἄρα ἡ ΒΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς Β'Γ.

Διὰ τὸ $\Delta\hat{A}E$: $\frac{A\Delta}{AE} = 2$. Διὰ τὸ $B\hat{\Gamma}M$: $\frac{B\Gamma}{\Gamma M} = 2$ ἄρα $\Delta\hat{A}E \sim B\hat{\Gamma}M$.

306. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἔστω ρ_1, ρ_2, ρ οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τὰ ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$. Ἀντιστρόφως.



Ἀπόδειξις:

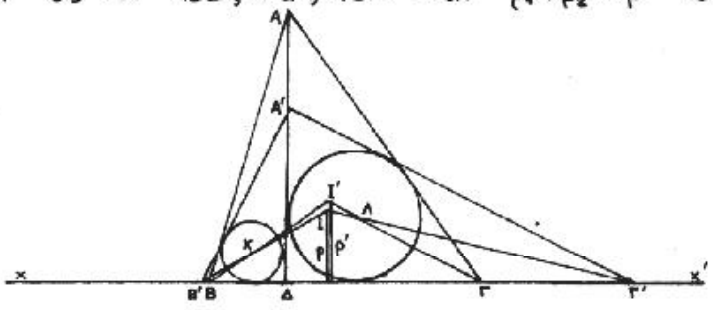
Εἶναι $\Delta\hat{A}B \sim \Gamma\hat{A}\Delta \sim B\hat{A}\Gamma$

Ἄρα $\frac{\rho_1}{\delta} = \frac{\rho_2}{\beta} = \frac{\rho}{a} \Longrightarrow \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{\rho^2}{a^2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$.

Ἀντιστρόφως:

Διατύπωσις: Εἰς τὸ $A\hat{B}\Gamma$ ΑΔ τὸ ὕψος, ρ_1, ρ_2, ρ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $A\hat{B}\Delta$, $A\hat{\Gamma}\Delta$, $A\hat{B}\Gamma$. Ἐὰν $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2$ τότε $\hat{A} = 1^L$.



Ἔστω $\hat{A} < 1^L$. Τότε ἐὰν γράψωμεν τόξον χορδῆς ΚΛ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν 45° ἡ τομὴ Α' τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ τῆς

εὐθείας ΑΔ εἶναι σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ. Αἱ ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α' εἰς τοὺς (κ), (Λ) εἶναι κάθετοι. Διά τὸ $\hat{B'A'\Gamma'}$ εἶναι $\rho_1^2+\rho_2^2=\rho'^2$. Προφανῶς $\rho<\rho'$, (ἴδε σχῆμα). Ἄρα δι' ὀξυγώνιον τρίγωνον ($\hat{A}<1^L$) καὶ τοῦ ὁποίου $\Delta\in B\Gamma$ $\rho_1^2+\rho_2^2>\rho^2$.

Ἐὰν Δ σημεῖον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι $\rho_1^2+\rho_2^2<\rho^2$

Ἐὰν $\hat{A}>1^L$ μέ τόν ἴδιον τρόπον διαπιστώνομεν ὅτι $\rho_1^2+\rho_2^2<\rho^2$. Ἐφόσον λοιπόν ἰσχύει $\rho_1^2+\rho_2^2=\rho^2$ καὶ ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις $\hat{A}<1^L$, $\hat{A}>1^L$ ἕπεται ὅτι $\hat{A}=1^L$.

307. Δίδονται τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ($A=A'=1^L$). Δεδομένου ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια $\hat{AB\Gamma}\sim\hat{A'B'\Gamma'}$ νά δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{\beta\beta'}+\frac{1}{\gamma\gamma'}=\frac{1}{v_a v_a'}.$$

Ἀπόδειξις:

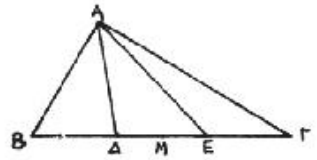
$\hat{AB\Gamma}\sim\hat{A'B'\Gamma'}\Rightarrow\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{v_a}{v_a'}\Rightarrow\frac{\beta^2}{\beta\beta'}=\frac{\gamma^2}{\gamma\gamma'}=\frac{v_a^2}{v_a v_a'}$ (1).

Ἀλλά ὡς γνωστόν $\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{v_a^2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow\frac{1}{\beta\beta'}+\frac{1}{\gamma\gamma'}=\frac{1}{v_a v_a'}$.

308. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Τά σημεῖα Δ καὶ Ε χωρίζουν τήν ὑποτείνουσαν εἰς τρία ἴσα μέρη. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $A\Delta^2+\Delta E^2+AE^2=\frac{2}{3}B\Gamma^2$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Μ τό μέσον τῆς ὑποτεινούσης. Θά εἶναι καὶ $M\Delta=ME$.

$\hat{\Delta AE}$: $A\Delta^2+AE^2=2AM^2+\frac{\Delta E^2}{2}$ (1)

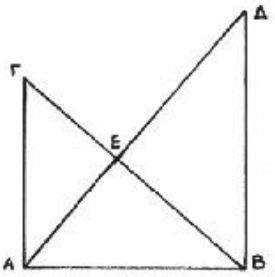
Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) τό $\Delta E^2=\frac{B\Gamma^2}{9}$. Θά ἔχωμεν $A\Delta^2+\Delta E^2+AE^2=2AM^2+\frac{\Delta E^2}{2}+\frac{B\Gamma^2}{9}=2\frac{B\Gamma^2}{4}+\frac{B\Gamma^2}{18}+\frac{B\Gamma^2}{9}=\frac{2}{3}B\Gamma^2$.

309. Εἰς τά ἄκρα εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὑψοῦμεν τάς καθέτους ΑΓ καὶ ΒΔ ὥστε $A\Gamma\cdot B\Delta=AB^2$. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι κάθετοι. Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις:

$A\Gamma\cdot B\Delta=AB^2\Rightarrow\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{AB}{B\Delta}\Rightarrow$

$\Rightarrow\hat{\Gamma AB}\sim\hat{ABA}\Rightarrow\hat{A\Gamma B}=\hat{BA\Delta}$ (1). Ἀλλά $\hat{A\Gamma B}+\hat{AB\Gamma}=1^L$. Ἄρα $\hat{BA\Delta}+\hat{AB\Gamma}=1^L$.



Ἀντιστρόφως:

Ἔστω $A\Delta\perp B\Gamma$. Θά δείξωμεν ὅτι $AB^2=A\Gamma\cdot B\Delta$. Αἱ γωνίαι $\hat{BA\Delta}$, $\hat{A\Gamma B}$ εἶναι ἴσαι διότι ἔχουν τάς πλευράς καθέτους, ἄρα $\hat{\Gamma AB}\sim\hat{AB\Delta}\Rightarrow AB^2=A\Gamma\cdot B\Delta$.

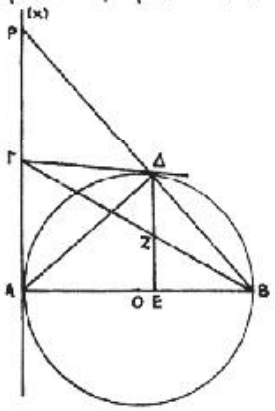
310. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Εἰς τό Α φέρομεν τήν ἐφαπτομένην καὶ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Γ αὐτῆς. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τήν ἐφαπτομένην ΓΔ τοῦ (Ο) καὶ τήν ΔΕ κάθετον ἐπί τήν

ΑΒ. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΕ.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τήν ΒΔ τέμνουσαν τήν (x) εἰς Ρ. Θά εἶναι $\frac{\Gamma P}{A\Gamma} = \frac{\Delta Z}{ZE}$ (1).

Τό $\hat{A\Delta P}$ εἶναι ὀρθογώνιον καί ΓΔ = ΓΑ. Ἄρα τό σημεῖον Γ εἶναι τό μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΑΡ ἤτοι $\frac{\Gamma P}{\Gamma A} = 1$.



311. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (x),(y) τεμνόμεναι ἐπί σημείου Ο. Ἔστω Αε(x) καί Βε(y). Εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ = α ἔχει προβολάς a_x, a_y ἐπί τῶν (x),(y) ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ΜΝ ⊥ ΑΒ εἶναι ὅπως $\frac{OA}{a_y} = \frac{OB}{a_x} = \kappa$. Ἀκόμη ὅτι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περί τό $\hat{AOB}$ ἔχει ἀκτῖναν $R = \frac{1}{2}\kappa\alpha$.

Ἀπόδειξις:

Δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεία ΜΝ διέρχεται διά τοῦ Ο χωρίς νά μειωθῆ ἡ γενικότης τοῦ προβλήματος. (Διατί;)

Ἱκανόν: Ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $\frac{OA}{a_y} = \frac{OB}{a_x} = \kappa$ (1). Φέρομεν τάς MZ′ ∥ EZ, MΔ′ ∥ ΓΔ. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\frac{OA}{MZ'} = \frac{OB}{M\Delta'}$ (2). Ἀκόμη εἶναι καί $\hat{\Delta' MZ'} = \hat{AOB}$ (3).

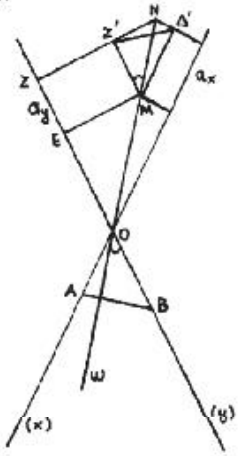
(2), (3) $\Longrightarrow \hat{AOB} \sim \hat{\Delta' MZ'} \Longrightarrow \hat{OBA} = \hat{Z'\Delta' M}$ (4).

Ἐκ τοῦ ἐγγραμμίου τετραπλεύρου Δ′MZ′N ⇒

⇒ $\hat{Z'\Delta' M} = \hat{Z'NM}$ (5). Ἀλλά $\hat{Z'NM} + \hat{Z'MN} = 1^L$ (6).

Ἐπειδή δέ $\hat{Z'MN} = \hat{\omega OB}$ (7) ἕπεται ἐκ τῶν (4),(5),(6),(7) ὅτι $\hat{OBA} + \hat{\omega OB} = 1^L$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀναγκαίου εὔκολος.



Ἀκόμη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περί τό $\hat{AOB}$ καί τό ἐγγράψιμο MΔ′NZ′ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν $\hat{AOB}$, $\hat{\Delta' MZ'}$. Ἤτοι $\frac{2R}{MN} = \kappa \Longrightarrow R = \frac{1}{2}\kappa\alpha$.

312. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἐάν Η τό ὀρθόκεντρον καί ΑΔ τό ὕψος θά ἔχωμεν $A\Delta \cdot H\Delta = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

Ἀπόδειξις:

$\hat{B\Delta H} \sim \hat{A\Delta\Gamma} \Longrightarrow \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{\Delta H}{\Gamma\Delta} \Longrightarrow A\Delta \cdot H\Delta = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

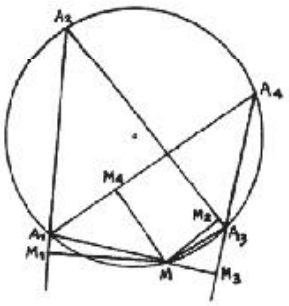
313. Θεώρημα τοῦ Πάππου.

Δίδεται τετράπλευρον $A_1A_2A_3A_4$ (κυρτόν ἤ μή) ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (o, R). Ἐάν Μ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας καί

M_1, M_2, M_3, M_4 αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ἐπὶ τῶν πλευρῶν A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι $MM_1 \cdot MM_3 = MM_2 \cdot MM_4$.

Ἀπόδειξις:

α) Ἔστω $A_1A_2A_3A_4$ ἐγγεγραμμένον μὴ κυρτὸν τετράπλευρον.



$\overset{\triangle}{MM_1A_1} \sim \overset{\triangle}{MM_2A_3} \Rightarrow \frac{MM_1}{MA_1} = \frac{MM_2}{MA_3}$ (1)

$\overset{\triangle}{MM_4A_1} \sim \overset{\triangle}{MM_3A_3} \Rightarrow \frac{MM_3}{MA_3} = \frac{MM_4}{MA_1}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow MM_1 \cdot MM_3 = MM_2 \cdot MM_4$.

Ἡ ἀπόδειξις ὁμοίως καὶ διὰ τὸ κυρτὸν τετράπλευρον.

β) Μίαν ἁπλῆν ἀκόμη ἀπόδειξιν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὡς ἑξῆς. Ἐκ τοῦ τριγώνου MA_1A_2 εἶναι ὡς γνωστὸν: $MA_1 \cdot MA_2 = 2R \cdot MM_1$ (3). Ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{MA_3A_4} \Rightarrow MA_3 \cdot MA_4 = 2R \cdot MM_3$ (4).

(3), (4) $\Rightarrow MM_1 \cdot MM_3 = \frac{MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \cdot MA_4}{4R^2}$. Ὅθεν $MM_1 \cdot MM_3 = MM_2 \cdot MM_4$.

γ) Ἀκόμη μίαν λύσιν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀσκ. 269, ἐὰν φέρωμεν εἰς τὰ A_1, A_2, A_3, A_4 τὰς ἐφαπτομένας.

Παρατηρήσεις:

Ἐὰν $A_4 \equiv A_3$, ἡ εὐθεῖα A_3A_4 θὰ γίνῃ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς A_3. Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ.

Διατυπώσατε τὸ θεώρημα διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καθὼς καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $(A_3 \equiv A_4) \wedge (A_2 \equiv A_1)$.

Γενίκευσις:

Ἐπὶ περιφερείας (O, R) δίδονται τὰ σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2\nu}$. Ἐὰν τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας προβάλλεται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{2\nu-1}A_{2\nu}$, $A_{2\nu}A_1$ κατὰ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \ldots M_{2\nu-1}, M_{2\nu}$ ἀντιστοίχως καὶ θέσωμεν $MM_i = x_i$ νὰ δειχθῇ ὅτι $x_1x_3x_5 \cdots x_{2\nu-1} = x_2x_4x_6 \cdots x_{2\nu}$

Ἀπόδειξις:

Ἡ ἀπόδειξις β' τοῦ θεωρήματος τοῦ Πάππου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἐνταῦθα. Θέτομεν $MA_i = \lambda_i$.

$$\begin{aligned} &\overset{\triangle}{MA_1A_2} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 2Rx_1 \\ &\overset{\triangle}{MA_3A_4} \Rightarrow \lambda_3\lambda_4 = 2Rx_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\overset{\triangle}{MA_{2\nu-1}A_{2\nu}} \Rightarrow \lambda_{2\nu-1}\lambda_{2\nu} = 2Rx_{2\nu-1} \end{aligned} \qquad (5)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (5) ἔχομεν

$$x_1x_3x_5 \cdots x_{2\nu-1} = \frac{1}{2^\nu R^\nu} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_{2\nu-1}\lambda_{2\nu} \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις (6) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παρατηρήσεις:

α) Εἶναι εὔκολον ἐπίσης νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς γ' ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τοῦ Πάππου.

β) Ἐὰν $A_i \equiv A_{i+1}$, x_i θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς A_i.

314. Θεώρημα τοῦ Dejark.

Τετράπλευρον $A_1A_2A_3A_4$ (κυρτὸν ἢ μή) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε) τέμνουσαν τὸν (O,R) εἰς δύο σημεῖα M καὶ M' καὶ τὰς εὐθείας $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ εἰς τὰ σημεῖα P_1, P_2, P_3, P_4 ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{MP_1 \cdot MP_3}{MP_2 \cdot MP_4} = \frac{M'P_1 \cdot M'P_3}{M'P_2 \cdot M'P_4}$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $MP_i = \rho_i$, $M'P_i = \rho_i'$, x_i καὶ x_i' τὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως τῶν σημείων M καὶ M' ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν A_iA_{i+1}.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων MM_iP_i, $M'M_i'P_i$ προκύπτει ὅτι: $\frac{x_i}{x_i'} = \frac{\rho_i}{\rho_i'}$ (1)

Βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Πάππου ἔχομεν $(x_1x_3 = x_2x_4) \wedge (x_1'x_3' = x_2'x_4')$ (2).

$(1), (2) \Longrightarrow \frac{P_1P_3}{P_2P_4} = \frac{P_1'P_3'}{P_2'P_4'}$.

Παρατηρήσεις:

Ἐάν δύο σημεῖα ταυτισθοῦν ἡ ἀντίστοιχος πλευρὰ ἀντικαθίσταται μὲ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ.

Γενίκευσις:

Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_{2\nu}$ ἐπὶ τῆς περιφερείας. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν (O,R) εἰς δύο σημεῖα M καὶ M' καὶ τὴν εὐθεῖαν A_iA_{i+1} εἰς τὸ σημεῖον P_i. Ἐὰν θέσωμεν $MP_i = \rho_i$ καὶ $M'P_i = \rho_i'$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{P_1P_3P_5\cdots P_{2\nu-1}}{P_2P_4P_6\cdots P_{2\nu}} = \frac{P_1'P_3'P_5'\cdots P_{2\nu-1}'}{P_2'P_4'P_6'\cdots P_{2\nu}'}$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν x_i, x_i' τὰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως τῶν M, M' ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν A_iA_{i+1}.

Εἶναι προφανὲς ὅτι $\widehat{MM_iP_i} \sim \widehat{M'M_i'P_i}$ (3).

$(3) \Longrightarrow \frac{x_i}{x_i'} = \frac{\rho_i}{\rho_i'}$ (4).

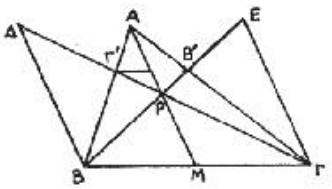
Ἀλλ' ἐκ τοῦ γενικευμένου θεωρήματος τοῦ Πάππου ἔχομεν

$$(x_1x_3\cdots x_{2\nu-1} = x_2x_4\cdots x_{2\nu}) \wedge (x_1'x_3'\cdots x_{2\nu-1}' = x_2'x_4'\cdots x_{2\nu}') \quad (5)$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) προκύπτει ἡ ζητουμένη σχέσις.

315. Ἐπὶ τῆς διαμέσου AM τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον P. Ἔστω $B' = BP \cap A\Gamma$, $\Gamma' = \Gamma P \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$.

Ἀπόδειξις:



Αἱ παράλληλοι ἐκ τῶν B, Γ πρὸς AM τέμνουν τὰς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ ἀντιστοίχως εἰς Δ καὶ E.

Εἶναι προφανὲς ὅτι: $\Delta B = 2PM$ καὶ $\Gamma E = 2PM$.

Ἀκόμη: $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'B} = \frac{AP}{\Delta B}$ καὶ $\frac{AB'}{B'\Gamma} = \frac{AP}{\Gamma E}$.

Ἀλλὰ τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἤτοι $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'B} = \frac{AB'}{B'\Gamma}$.

316. Ἐπὶ τοῦ ὕψους $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον E. Ἔστω $Z = BE \cap A\Gamma$ καὶ $\Theta = \Gamma E \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $Z\hat{\Delta}E = \Theta\hat{\Delta}E$.

Ἀπόδειξις:

α) Ἐκ τῆς δέσμης $(BA, BE, B\Delta)$ ἔχομεν $\frac{\Theta I}{I\Theta'} = \frac{AE}{E\Delta}$ (1).

Ἐκ τῆς δέσμης $(\Gamma A, \Gamma E, \Gamma\Delta)$ ἔχομεν $\frac{ZK}{KZ'} = \frac{AE}{E\Delta}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{\Theta I}{I\Theta'} = \frac{ZK}{KZ'} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\Theta I + I\Theta'}{\Theta I} = \frac{ZK + KZ'}{ZK} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\Theta\Theta'}{\Theta I} = \frac{ZZ'}{ZK} \Longrightarrow \frac{\Theta\Theta'}{ZZ'} = \frac{\Theta I}{ZK}$ (3).

Ἀλλὰ ἐκ τῶν $\triangle\Theta EI \sim \triangle KEZ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\Theta I}{ZK} = \frac{\Theta E}{EK}$ (4).

Ἐκ τῶν παραλλήλων $\Theta\Theta', A\Delta, ZZ'$ ἔχομεν $\frac{\Theta E}{EK} = \frac{\Theta'\Delta}{\Delta Z'}$ (5). Τέλος ἐκ τῶν (3), (4), (5) $\Longrightarrow \frac{\Theta\Theta'}{ZZ'} = \frac{\Theta'\Delta}{Z'\Delta}$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἀναλογίας προκύπτει ὅτι τὰ τρίγωνα $\Theta\Theta'\Delta$, $ZZ'\Delta$ εἶναι ὅμοια καὶ κατὰ συνέπειαν $\hat{\Theta'\Theta\Delta} = \hat{Z'ZA}$ ἢ $\hat{\Theta\Delta E} = \hat{Z\Delta E}$.

β) Μία διαφορετικὴ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης στηριζομένη εἰς τὰ θεωρήματα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἡ κάτωθι:

$\frac{\Delta E}{ZZ'} = \frac{B\Delta}{BZ'}$, $\frac{\Theta\Theta'}{\Delta E} = \frac{\Gamma\Theta'}{\Gamma\Delta}$. Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη $\cdot \frac{\Theta\Theta'}{ZZ'} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{\Gamma\Theta'}{BZ'}$ (1).

$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{(AEB)}{(AE\Gamma)} = \frac{(AEB)}{(AB\Gamma)} \cdot \frac{(AB\Gamma)}{(AE\Gamma)} = \frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} \cdot \frac{BZ}{EZ} = \frac{\Delta\Theta'}{\Gamma\Theta'} \cdot \frac{BZ'}{\Delta Z'}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{\Theta\Theta'}{ZZ'} = \frac{\Delta\Theta'}{\Delta Z'} \Longrightarrow \triangle\Theta\Theta'\Delta \sim \triangle ZZ'\Delta$.

γ) Μία ἁπλῆ λύσις βασιζομένη ἐπὶ τῶν θεωρημάτων τῶν πολικῶν εἶναι ἡ κάτωθι:

Ἐκ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου $B\Gamma Z\Theta$ βλέπομεν ὅτι ἡ δέσμη $(\Delta A, \Delta P - \Delta Z, \Delta\Theta)$ εἶναι ἁρμονικὴ καὶ ἐπειδὴ $\hat{E\Delta P} = 1^L$ ἕπεται ὅτι $\hat{\Theta\Delta E} = \hat{Z\Delta E}$.

317. Θεώρημα τοῦ Fermat.

Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ εἰς τὸ ὁποῖον $AB = B\Gamma\sqrt{2}$. Ἔστω E τυχὸν σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου AB καὶ Z, H τὰ σημεῖα τομῆς τῆς AB μετὰ τῶν ΓE καὶ ΔE ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ^2 + BH^2 = AB^2$

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $AH = \alpha$, $HZ = \beta$, $Z\Delta = \gamma$.

Ἡ ζητουμένη σχέσις γίνεται:

$(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Longleftrightarrow \beta^2 = 2\alpha\gamma$ (1).

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν τὴν σχέσιν (1). Εἰς τὰ σημεῖα H καὶ Z φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν AB τεμνούσας τὰς AE, BE εἰς Θ καὶ I ἀντιστοίχως. Ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως τὸ ΘIZH εἶναι ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma\Delta$. Ἤτοι $\Theta I = \Theta H\sqrt{2}$ (3). Ἀλλὰ $\triangle AH\Theta \sim \triangle IZB \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Theta H^2 = \alpha\gamma$ (4).

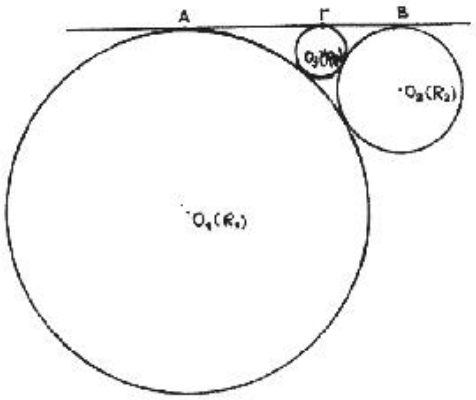
(3), (4) $\Longrightarrow \beta^2 = 2\alpha\gamma$.

ΟΜΑΣ Β'.

318. Τρεῖς κύκλοι (O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3) ἐφάπτονται μεταξύ των καί μιᾶς εὐθείας xy. Νά δειχθῆ ὅτι $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}=2\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)$.

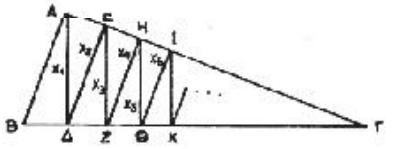
Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν (Ἄθκ. 263) $AB=2\sqrt{R_1R_2}$, $B\Gamma=2\sqrt{R_2R_3}$, $A\Gamma=2\sqrt{R_1R_3}$. Εἶναι ὅμως $AB=A\Gamma+\Gamma B$ (ἴδε σχῆμα). Ἄρα $\sqrt{R_1R_2}=\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}$ (1). Διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) διά $\sqrt{R_1R_2R_3}$, θά ἔχωμεν $\frac{1}{\sqrt{R_3}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}$ (2). Τετραγωνίζομεν (2) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow \frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{2}{\sqrt{R_1R_2}} \Longrightarrow \frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}=\frac{2}{\sqrt{R_1R_2}}$. Τετραγωνίζομεν ἐκ νέου καί ἔχομεν τό ζητούμενον.



319. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καί ἔστω ΑΔ τό ὕψος αὐτοῦ ἐπί τήν ὑποτείνουσαν. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τήν κάθετον ΔΕ ἐπί τήν πλευράν ΑΓ. Ἐκ τοῦ Ε τήν κάθετον ΕΖ ἐπί τήν ΒΓ, τήν ΖΗ κάθετον ἐπί τήν ΑΓ κ.τ.λ. Σχηματίζεται οὕτω ἡ πολυγωνική τεθλασμένη γραμμή ΑΔΕΖΗ... τῆς ὁποίας τό ἕτερον ἄκρον πλησιάζει τό σημεῖον Γ. Νά εὑρεθῆ τό μῆκος αὐτῆς.

Λύσις:



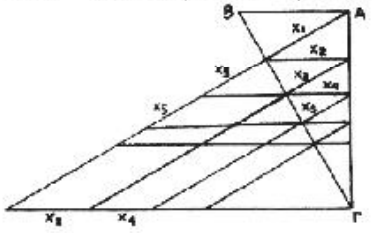
Θέτομεν $A\Delta=x_1$, $\Delta E=x_2$, $EZ=x_3$ κ.τ.λ. θά ὑπολογίσωμεν τό ἄθροισμα $S=x_1+x_2+x_3+\cdots$.

Συμφωνοῦμεν κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ σχήματος νά συμβολίζωμεν διά τῆς ὑποτεινούσης του καί μιᾶς καθέτου πλευρᾶς του π.χ. $AB\Gamma=(\overset{\Delta}{\alpha},\beta)$.

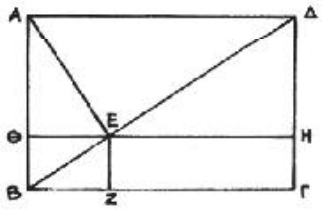
Παρατηροῦμεν ὅτι $(\overset{\Delta}{\alpha},\beta)\sim(\overset{\Delta}{x_1},x_2)\sim(\overset{\Delta}{x_2},x_3)\sim\cdots\sim(\overset{\Delta}{x_{\rho-1}},x_\rho)\sim(\overset{\Delta}{x_\rho},x_{\rho+1})\sim\cdots$ Ἤτοι: $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\cdots=\frac{x_{\rho-1}}{x_\rho}=\frac{x_\rho}{x_{\rho+1}}=\cdots$

Ὅθεν τά $x_1,x_2,x_3,\ldots$ ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικήν πρόοδον καί συνεπῶς $S=\frac{x_1}{1-\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\beta\gamma}{\alpha-\beta}$.

Μία ἄλλη λύσις τοῦ ἰδίου προβλήματος φαίνεται εἰς τό κατωτέρω σχῆμα.



320. Ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, AE ἡ κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς A ἐπὶ τὴν διαγώνιον $B\Delta$. Ἐὰν EZ καὶ EH αἱ ἀποστάσεις τοῦ E ἀπὸ τὰς $B\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $EZ^{2/3} + EH^{2/3} = B\Delta^{2/3}$.



Ἀπόδειξις:

$\hat{BEA} \Rightarrow BE^2 = B\Theta \cdot AB \Rightarrow B\Theta = EZ = \frac{BE^2}{AB}$ (1)

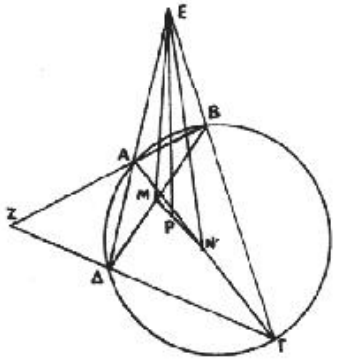
$\hat{BZE} \sim \hat{B\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{EZ}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{B\Delta} \Rightarrow EZ = \frac{BE \cdot \Gamma\Delta}{B\Delta}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow EZ^2 = \frac{BE^3}{B\Delta} \Rightarrow EZ^{2/3} = \frac{BE}{B\Delta^{1/3}}$ (3)

Ὁμοίως καὶ $EH^{2/3} = \frac{\Delta E}{B\Delta^{1/3}}$ (4).

(3), (4) $\Rightarrow EZ^{2/3} + EH^{2/3} = \frac{BE + \Delta E}{B\Delta^{1/3}} = \frac{B\Delta}{B\Delta^{1/3}} = B\Delta^{2/3}$.

321. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ἐγγραμμένου εἰς κύκλον αἱ προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τέμνονται εἰς E καὶ Z. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν E καὶ Z τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.



Ἀπόδειξις:

$\hat{EAB} = \hat{E\Gamma A} \Rightarrow \hat{EAB} \sim \hat{E\Gamma A}$. EM, EN αἱ ἀντιστοιχοι διάμεσοι τῶν ὁμοίων τριγώνων, ἄρα $M\hat{E}\Delta = N\hat{E}\Gamma$. Συνεπῶς ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{E}$ διχοτομεῖ καὶ τὴν $M\hat{E}N$.

Θεώρημα διχοτόμων $\hat{MEN}$:

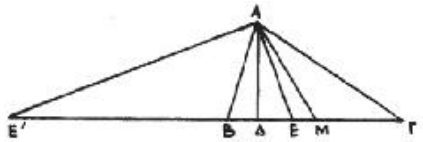
$\frac{MP}{NP} = \frac{ME}{NE}$ (1) ἀλλὰ $\frac{ME}{NE} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \frac{MP}{NP} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (3).

Ὁμοίως ἐὰν P' τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{Z}$ τέμνει τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα MN θὰ εἴχωμεν $\frac{MP'}{NP'} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$ (4).

(3), (4) $\Rightarrow \frac{MP}{NP} = \frac{MP'}{NP'} \Rightarrow P \equiv P'$.

322. Τριγώνου $AB\Gamma$, $A\Delta$ τὸ ὕψος, AE ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$, AE' ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$ καὶ AM ἡ διάμεσος. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) $4 ME \cdot M\Delta = (\beta - \gamma)^2$ β) $4 ME' \cdot M\Delta = (\beta + \gamma)^2$.



Ἀπόδειξις:

$\hat{AB\Gamma}: \beta^2 - \gamma^2 = 2a \cdot M\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow M\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2a}$ (1)

$\hat{AB\Gamma}: \frac{\gamma}{\beta} = \frac{BE}{\Gamma E} = \frac{\frac{a}{2} - ME}{\frac{a}{2} + ME} \Rightarrow$

$\Rightarrow ME = \frac{a(\beta - \gamma)}{2(\beta + \gamma)}$ (2)

$\hat{AB\Gamma}: \frac{\gamma}{\beta} = \frac{BE'}{\Gamma E'} = \frac{ME' - \frac{a}{2}}{ME' + \frac{a}{2}} \Rightarrow ME' = \frac{a(\beta + \gamma)}{2(\beta - \gamma)}$ (3)

α) (1), (2) $\Rightarrow 4 \cdot ME \cdot M\Delta = (\beta - \gamma)^2$

β) (1), (3) $\Rightarrow 4 \cdot ME' \cdot M\Delta = (\beta + \gamma)^2$.

323. Ἔστω τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ (I, ρ) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος αὐτοῦ. Ἐὰν Δ, E, Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως καὶ φέρωμεν τὴν $\Delta\Theta$ κάθετον ἐπὶ τὴν EZ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\rho}{\Delta\Theta} = \frac{AI}{v_a}$.

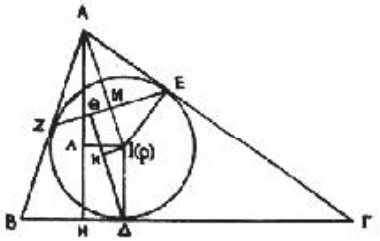
Απόδειξις:

Φέρομεν τάς ΙΚ, ΙΛ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπί τάς ΑΘ, ΑΗ (=$υ_α$).

$\hat{IAΛ} = \hat{IΔK} \Longrightarrow \triangle IAΛ \sim \triangle IΔK \Rightarrow \frac{ρ}{AI} = \frac{KΔ}{AΛ}$ (1).

$\triangle AEI \Rightarrow ρ^2 = IM \cdot AI \Longrightarrow \frac{ρ}{AI} = \frac{IM}{ρ}$ (2).

$(1),(2) \Longrightarrow \frac{ρ}{AI} = \frac{KΔ}{AΛ} = \frac{IM}{ρ} = \frac{KΔ+IM}{AΛ+ρ} = \frac{ΔΘ}{υ_α}$



324. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Μέ κέντρον Α καί ἀκτίνα τήν πλευράν ΑΒ = α γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια (Ο,y) ἐφάπτεται τῆς προηγουμένης καί τῶν πλευρῶν ΒΓ καί ΓΔ τοῦ τετραγώνου, ἡ δέ (κ,x) τῆς (Ο,y), τῆς (Α,α) καί τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς x συναρτήσει τοῦ α.

Λύσις:

$AΓ = AE + y + OΓ = α + y + y\sqrt{2}$. Ἀλλά $AΓ = α\sqrt{2}$, ἤτοι $α\sqrt{2} = α + y + y\sqrt{2} \Longrightarrow$

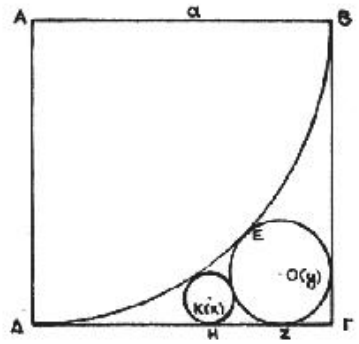
$\Longrightarrow y = \frac{α(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{2}}$ (1).

$ΓΔ = ΓZ + ZH + HΔ$. Ἀλλά $ΓZ = y$, $HZ = 2\sqrt{xy}$, $ΔH = 2\sqrt{αx}$ (Ἄλκ. 263).

Ἄρα $α = y + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{αx} \Longrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}-1} =$

$= \frac{α-y}{\sqrt{α}+\sqrt{y}} = \sqrt{α} - \sqrt{y} \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{α} - \sqrt{α}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} \Longrightarrow$

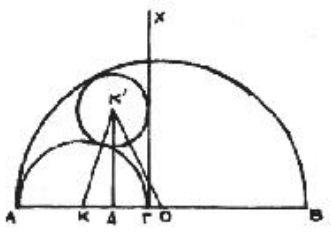
$\Longrightarrow x = \frac{α(\sqrt{2}-1)}{2(1+\sqrt{2})}$.



325. Εἰς τυχόν σημεῖον Γ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἡμιπεριφερείας (Ο,R) ὑψοῦμεν τήν κάθετον Γx. Μέ διαμέτρους τάς ΑΓ καί ΓΒ γράφομεν ἡμιπεριφερείας (Κ) καί (Λ) ἐντός τῆς ἡμιπεριφερείας (Ο,R). Ἔστω (κ′) ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς (Κ), τῆς (Ο) καί τῆς ἡμιευθείας Γx καί (λ′) ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς (Λ), τῆς (Ο) καί τῆς Γx. Θά δείξωμεν ὅτι οἱ κύκλοι (κ′) καί (λ′) εἶναι ἴσοι.

Απόδειξις:

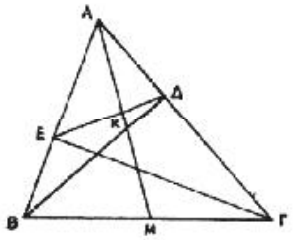
Θέτομεν ΑΓ = α, ΒΓ = β. Ὑποθέσωμεν ὅτι Γ ∈ ΑΟ. Τότε $\hat{KOK'} < 1^L$. Ἀπό τό θεώρημα τῆς ὀξείας γωνίας εἰς τό $\triangle KOK'$ διά τήν $\hat{KOK'}$ ἔχομεν $KK'^2 = OK'^2 + OK^2 - 2\,OK \cdot OΔ$ (1) ὅπου Δ ἡ προβολή τοῦ κ′ ἐπί τῆς ΑΟ. Ἐάν x ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου (κ′) θά ἔχωμεν $KK' = \frac{α}{2} + x$, $OK' = R - x$, $OK = R - \frac{α}{2}$, $OΔ = R - α + x$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1). Μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν ὅτι $x = \frac{αβ}{4R}$. Ἐκ τῆς ὑφισταμένης συμμετρίας διαπιστώνομεν ὅτι αἱ ἀκτῖνες τῶν (κ′) καί (λ′) εἶναι ἴσαι.



326. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $2α^2 = β^2 + γ^2$. Ἄν ΒΔ καί ΓΕ τά ὕψη,

νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ διχοτομεῖ τὴν διάμεσον ΑΜ αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Κ τὸ μέσον τῆς διαμέσου ΑΜ. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $EK + K\Delta = E\Delta$.

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως προκύπτει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{A} < 1^L$.

Θεώρημα ὀξείας $\hat{A}$ διὰ τὸ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$:
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2AE\cdot\gamma \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2AE\cdot\gamma \Rightarrow AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma}$ (1).

Θεώρημα διαμέσων $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\alpha^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$.

Θεώρημα διαμέσων $\overset{\triangle}{AEM}$: $EK^2 = \frac{2AE^2 + 2EM^2 - AM^2}{4} \Rightarrow EK^2 = \frac{2\cdot\frac{\alpha^4}{4\gamma^2} + 2\frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{4}\alpha^2}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow EK^2 = \frac{2\alpha^4 - \alpha^2\gamma^2}{16\gamma^2} = \frac{\alpha^2(2\alpha^2 - \gamma^2)}{16\gamma^2} = \frac{\alpha^2\beta^2}{16\gamma^2} \Rightarrow EK = \frac{\alpha\beta}{4\gamma}$ (2).

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν $K\Delta = \frac{\alpha\gamma}{4\beta}$ (3), ὅθεν $EK + K\Delta = \frac{\alpha\beta}{4\gamma} + \frac{\alpha\gamma}{4\beta} = \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{4\beta\gamma} =$
$= \frac{\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (4).

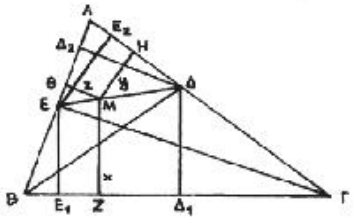
Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\overset{\triangle}{EA\Delta}$, $\overset{\triangle}{\Gamma AB}$ ἔχομεν $\frac{E\Delta}{\alpha} = \frac{AE}{\beta}$ (5).

(1), (5) $\Rightarrow E\Delta = \frac{\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (6).

(4), (6) $\Rightarrow EK + K\Delta = E\Delta$.

327. Ἔστω ΒΔ καὶ ΓΕ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔΕ. Ἐὰν x,y,z αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς α,β,γ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $x = y + z$.

Ἀπόδειξις:



Ὑποθέσωμεν ὅτι $\frac{EM}{M\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$.

Αἱ ἀποστάσεις τῶν Δ,Ε ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν Β,Γ ἀντιστοίχως εἶναι ἴσαι. Δηλαδὴ $\Delta\Delta_1 = \Delta\Delta_2$ καὶ $EE_1 = EE_2$.

Ἀπὸ τὸ τραπέζιον $\Delta\Delta_1 E_1 E$ βάσει τῆς ἀσκήσεως 264 ἔχομε $x = \frac{\mu\Delta\Delta_1 + \nu EE_1}{\mu+\nu}$ (1).

Ἀπὸ τὸ $\overset{\triangle}{\Delta EE_2}$: $\frac{y}{EE_2} = \frac{\nu}{\mu+\nu} \Rightarrow y = \frac{\nu EE_2}{\mu+\nu} = \frac{\nu EE_1}{\mu+\nu}$ (2).

Ἀπὸ τὸ $\overset{\triangle}{\Delta E\Delta_2}$: ὁμοίως $z = \frac{\mu\cdot\Delta\Delta_1}{\mu+\nu}$ (3).

Αἱ (1), (2), (3) δίδουν τὸ ζητούμενον.

328. Δύο τρίγωνα δύνανται νὰ ἔχουν, χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα, τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας καὶ δύο πλευρὰς ἴσας ἀνὰ μίαν.

Ἀπόδειξις:

Θέσωμεν x,y,z τὰς πλευρὰς τοῦ ἑνὸς καὶ y,z,ω τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Τὰ τρίγωνα προφανῶς θὰ εἶναι ὅμοια, ἄρα $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{\omega} = \lambda$ (1) $(\lambda \neq 1)$.

Ἐκ τῶν ἐκ. (1) προκύπτει $x = \lambda^3\omega$, $y = \lambda^2\omega$, $z = \lambda\omega$ (2). Διὰ τὰ μήκη x,y,z ἰσχύει ἡ τριγωνικὴ ἀνισότης $x - y < z < x + y$ (3).

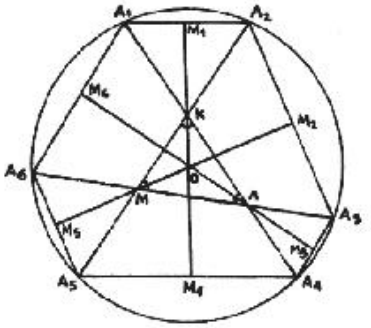
(2), (3) $\Rightarrow \lambda^2(\lambda-1) < \lambda < \lambda^2(\lambda+1) \Rightarrow \lambda^2 - \lambda < 1 < \lambda^2 + \lambda$ τελικῶς ἔχομεν $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \lambda < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ Λ $\lambda \neq 1$.

Προσδιορίσαμεν συνεπῶς τὴν τιμὴν τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν δύο τριγώνων, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι διὰ τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς x,y,z

ἰσχύῃ ἡ σχέσις $y^2 = xz$ (ἀπό τήν (1)) εἶναι εὔκολος ἡ κατασκευή δύο παρομοίων τριγώνων.

329. Ἐάν αἱ διαγώνιοι αἱ συνδέουσαι τάς ἀπέναντι κορυφάς ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι καί αἱ ἀπέναντι πλευραί παράλληλοι τό ἑξάγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις:



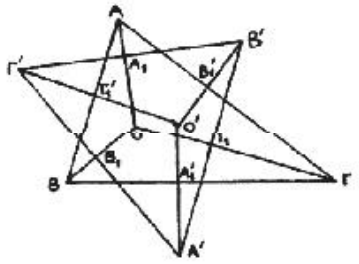
Ἔστω $K = A_1A_4 \cap A_2A_5$.

$A_1\hat{K}A_2 \sim A_5\hat{K}A_4 \Longrightarrow \frac{A_1K}{KA_4} = \frac{A_2K}{KA_5} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{A_1K}{A_1A_4} = \frac{A_2K}{A_2A_5} \Longrightarrow A_1K = A_2K$. Συνεπῶς $A_1\hat{K}A_2$ καί $A_5\hat{K}A_4$ ἰσοσκελῆ τρίγωνα καί ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας κορυφῆς των M_1M_4 μεσοκάθετος ἐπί τῶν A_1A_2, A_4A_5. Ὁμοίως ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{\Lambda}$ (ἴδε σχῆμα) μεσοκάθετος τῶν A_2A_3, A_5A_6. Διά τό σημεῖον Ο τομῆς τῶν διχοτόμων τοῦ $\hat{KLM}$ ἔχομεν ἐπί πλέον $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \cdots = OA_6$ ἤτοι εἶναι τό κέντρον περιφερείας περιγεγραμμένης περί τό ἑξάγωνον.

330. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′. Ἄν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ πρώτου τριγώνου ἀντιστοίχως ἐπί τῶν πλευρῶν Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ τοῦ δευτέρου τριγώνου διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου τότε καί αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν Α′, Β′, Γ′ τοῦ δευτέρου τριγώνου ἀντιστοίχως ἐπί τάς πλευράς τοῦ πρώτου θά διέρχωνται ἐπίσης διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α, Β, Γ ἐπί τῶν Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ ἀντιστοίχως καί $A'A_1'$, $B'B_1'$, $\Gamma'\Gamma_1'$ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α′, Β′, Γ′ ἐπί τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως.

Διά τό $A'\hat{B}'\Gamma'$ ἐκ τῆς ὑποθέσεως καί βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Carnot ἔχομεν $A'B_1^2 - \Gamma'B_1^2 + \Gamma'A_1^2 - B'A_1^2 + B'\Gamma_1^2 - A'\Gamma_1^2 = 0$ (1). Ἀλλά $A'B_1^2 - \Gamma'B_1^2 = A'B^2 - \Gamma'B^2$, $\Gamma'A_1^2 - B'A_1^2 = \Gamma'A^2 - B'A^2$, $B'\Gamma_1^2 - A'\Gamma_1^2 = B'\Gamma^2 - A'\Gamma^2$ (2).

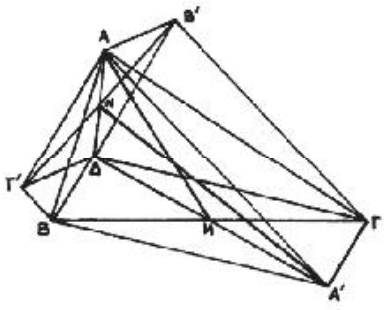
(1), (2) $\Longrightarrow A'B^2 - \Gamma'B^2 + \Gamma'A^2 - B'A^2 + B'\Gamma^2 - A'\Gamma^2 = 0$ (3).

Ἐπίσης $A'B^2 - A'\Gamma^2 = BA_1'^2 - \Gamma A_1'^2$, $B'\Gamma^2 - B'A^2 = \Gamma B_1'^2 - AB_1'^2$, $\Gamma'A^2 - \Gamma'B^2 = A\Gamma_1'^2 - B\Gamma_1'^2$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow BA_1'^2 + \Gamma B_1'^2 + A\Gamma_1'^2 = \Gamma A_1'^2 + AB_1'^2 + B\Gamma_1'^2$ καί συνεπῶς συμφώνως πάλιν μέ τό θεώρημα τοῦ Carnot αἱ $A'A_1'$, $B'B_1'$, $\Gamma'\Gamma_1'$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

331. Ἐπί ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρίγωνα ὅμοια $B\hat{\Gamma}A'$, $\Gamma\hat{A}B'$, $A\hat{B}\Gamma'$, τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, ὅλα πρός τό ἐξωτερικόν ἤ ὅλα πρός τό ἐσωτερικόν τοῦ $A\hat{B}\Gamma$. Νά δειχθῇ ὅτι τά δύο τρίγωνα $A\hat{B}\Gamma$ καί $A'\hat{B}'\Gamma'$ ἔχουν τό αὐτό κέντρον βάρους.

Απόδειξις:



Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $BA'\Gamma\Delta$. Θὰ εἶναι $\hat{B\Gamma'\Delta} \sim \hat{BA\Gamma}$ (1) διότι $\frac{B\Gamma'}{\Gamma A'} = \frac{\Delta\Gamma'}{B\Delta} = \frac{AB}{B\Gamma}$ καὶ $\Gamma'\hat{B}\Delta = \Gamma'\hat{B}A + A\hat{B}\Delta =$ $= A'\hat{\Gamma}B + A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma$.

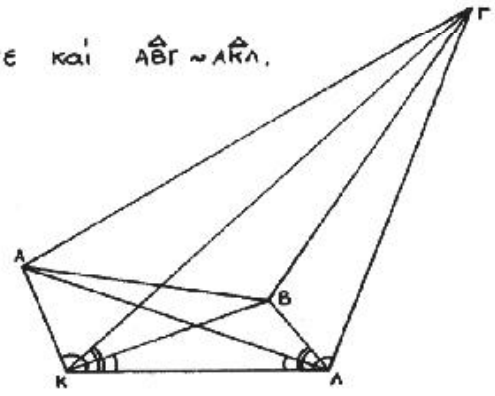
(1) $\Longrightarrow A\hat{\Gamma'}\Delta = A\hat{\Gamma'}B - \hat{A} = 2^L - \Gamma'\hat{A}B - \Gamma'\hat{B}A - \hat{A} =$ $= 2^L - \Gamma'\hat{A}B - B'\hat{A}\Gamma - \hat{A} = 2^L - \Gamma'\hat{A}B'$. Ἤτοι $AB' \| \Gamma'\Delta$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $A\Gamma' \| \Delta B'$. Ἤτοι $\Gamma'AB'\Delta$ παραλληλόγραμμον. Ἄρα τὰ κέντρα βάρους τῶν $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{A'B'\Gamma'}$ ταυτίζονται πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\hat{A\Delta A'}$.

Παρατήρησις:

Εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A', B', Γ' ἀντιστοίχως ὥστε $\frac{BA'}{\Gamma A'} = \frac{\Gamma B'}{AB'} = \frac{A\Gamma'}{B\Gamma'}$. Τὰ κέντρα βάρους τῶν $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{A'B'\Gamma'}$ συμπίπτουν.

332. Ἐὰν $\hat{AK\Lambda} \sim \hat{\Lambda BK} \sim \hat{K\Lambda\Gamma}$ τότε καὶ $\hat{AB\Gamma} \sim \hat{AK\Lambda}$.



Απόδειξις:

$A\hat{K}B = A\hat{K\Lambda} - B\hat{K\Lambda}$ (1)

$A\hat{\Lambda\Gamma} = K\hat{\Lambda\Gamma} - K\hat{\Lambda}A$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow A\hat{K}B = A\hat{\Lambda\Gamma}$ (3)

$\hat{AK\Lambda} \sim \hat{\Lambda BK} \Longrightarrow \frac{AK}{A\Lambda} = \frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ (4)

$\hat{\Lambda BK} \sim \hat{K\Lambda\Gamma} \Longrightarrow \frac{\Lambda B}{K\Lambda} = \frac{BK}{\Lambda\Gamma}$ (5).

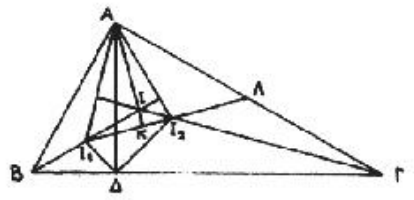
(4), (5) $\Longrightarrow \frac{AK}{A\Lambda} = \frac{BK}{\Lambda\Gamma}$ (6),

(3), (6) $\Longrightarrow \hat{AKB} \sim \hat{A\Lambda\Gamma}$ (7).

(7) $\Longrightarrow K\hat{A\Lambda} = B\hat{A\Gamma}$ Λ $\frac{AK}{A\Lambda} = \frac{AB}{A\Gamma} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \hat{AK\Lambda} \sim \hat{AB\Gamma}$.

333. Ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, $A\Delta$ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. I_1, I_2, I τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $AB\Gamma$ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ α) τὸ σημεῖον I εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{AI_1I_2}$ β) ἡ ἀπόστασις AK τοῦ A ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν I_1I_2 ἰσοῦται πρὸς $A\Delta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Απόδειξις:



α) $A\hat{BI_1} + B\hat{AI_2} = 1^L \Longrightarrow BI_1 \perp AI_2$.

Ὁμοίως $\Gamma I_2 \perp AI_1$. Ἤτοι τὸ I ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{AI_1I_2}$.

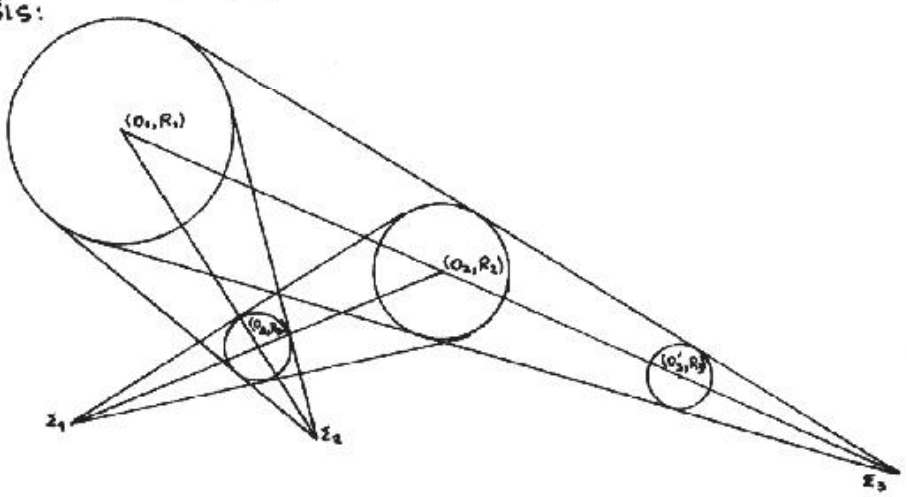
β) $\hat{AK\Lambda}$ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές. Ὅθεν $K\Lambda = AK = A\Lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(\Delta\hat{AI_2} = \Lambda\hat{AI_2}) \wedge (A\hat{\Delta}I_2 = A\hat{\Lambda}I_2 = 45°) \Longrightarrow A\hat{\Delta}I_2 = A\hat{\Lambda}I_2 \Longrightarrow A\Lambda = A\Delta$.

334. Δίδονται τρεῖς ἄνισοι κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) Αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. β) Τὰ σημεῖα τομῆς τῶν κοινῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν

$(O_1,R_1),(O_2,R_2)-(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν $(O_3,R_3),(O_1,R_1)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:



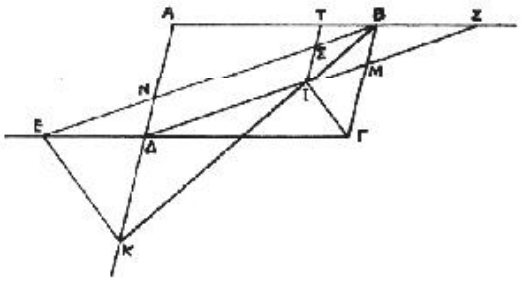
α) Κατασκευάζομεν κύκλον (O'_3,R_3) ἐφαπτόμενον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$. Εἶναι $\frac{R_1}{R_3}=\frac{O_1\Sigma_3}{O'_3\Sigma_3}=\frac{O_2\Sigma_1}{O_3\Sigma_1}\Longrightarrow$ $\Longrightarrow \Sigma_1\Sigma_3\parallel O_3O'_3$. Ὁμοίως $\Sigma_3\Sigma_2\parallel O_3O'_3$.

β) Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου.

335. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας τεμνομένας εἰς Ι. Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν τέμνει τὴν ΑΔ εἰς Κ, ἡ ἄλλη τὴν ΑΒ εἰς Ζ. Ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ Δ εὐθείαν τέμνει τὴν ΓΔ εἰς Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma I\parallel KE$.

Ἀπόδειξις:

Εἶναι προφανὲς ὅτι $EN=MZ$ καὶ $AN=M\Gamma$ (1) (ἴδε σημ.). Εἶναι ἀρκετὸν νὰ δείξωμεν ὅτι $E\hat{N}K\sim I\hat{M}\Gamma$. Φέρομεν ἐκ τοῦ Ι τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ. Θὰ ἔχωμεν $\frac{AN}{NK}=\frac{T\Sigma}{I\Sigma}=$ $=\frac{TB}{BZ}=\frac{IM}{MZ}$ (2).



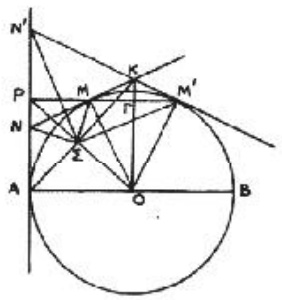
(1),(2) $\Longrightarrow \frac{M\Gamma}{NK}=\frac{IM}{EN}\Longrightarrow E\hat{N}K\sim I\hat{M}\Gamma$.

336. Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (κ) εἰς τὸ Α καὶ τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς Μ, Μ' καὶ τὴν (κ) εἰς Ρ. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Μ, Μ' τέμνουν τὴν (κ) εἰς Ν, Ν' ἡ δὲ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΡ ἔστω Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $M\hat{\Sigma}N=M'\hat{\Sigma}N'=1^L$.

Ἀπόδειξις:

$O\hat{M}'K\Longrightarrow OM'^2=O\Gamma\cdot OK\Longrightarrow OA^2=AP\cdot OK$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι (Ἄσκ. 309) $AK\perp OP$, ἤτοι Α, Σ, Κ ἐπ' εὐθείας.

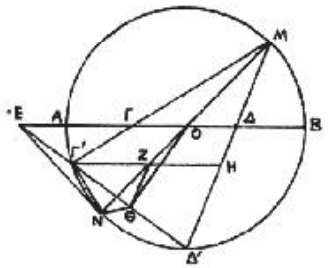
$\hat{PNM} = \hat{NKO}$. Τά τετράπλευρα ΜΚΜ'Ο, ΣΚΜ'Ο εἶναι ἐγγράψιμα. Ἄρα $\hat{NKO} = \hat{M\Sigma P}$ ἤτοι ΡΜΣΝ ἐγγράψιμον καί $\hat{M\Sigma N} = 1^L$. Ἐπίσης $\hat{N'M'\Sigma} = \hat{K\Sigma O} = \hat{OPA} \Rightarrow N'PSM'$ ἐγγράψιμον ἤτοι $\hat{M'\Sigma N'} = \hat{M'PN'} = 1^L$.



337. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καί διάμετρος ΑΒ αὐτῆς. Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπί τῆς ΑΒ τμήματα ΟΓ = ΟΔ. Φέρομεν τάς ΜΓ, ΜΔ τεμνούσας τήν περιφέρειαν εἰς Γ', Δ' ἀντιστοίχως. Ἐάν Ε τό σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας Γ'Δ' μετά τῆς ΑΒ καί Ν τό ἀντιδιαμετρικόν σημεῖον τοῦ Μ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεία ΕΝ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο).

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ Γ' φέρομεν τήν παράλληλον πρός τήν ΑΒ. Θά εἶναι (ἴδε σχῆμα) $\frac{O\Gamma}{O\Delta} = \frac{Z\Gamma'}{ZH} \Rightarrow Z\Gamma' = ZH$. Ἔστω Θ τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Γ'Δ'. $Z\Theta \parallel \Delta'H \Rightarrow \hat{Z\Theta\Gamma'} = \hat{\Gamma'\Delta'M} = \hat{\Gamma'NM} \Rightarrow \Gamma'NZ\Theta$ ἐγγράψιμον. $\Gamma'NZ\Theta \Rightarrow \hat{ON\Theta} = \hat{Z\Gamma'\Theta}$ (1). Ἀλλά $EB \parallel \Gamma'H$ ἄρα $\hat{Z\Gamma'\Theta} = \hat{OE\Theta}$ (2). (1), (2) $\Rightarrow \hat{ON\Theta} = \hat{OE\Theta} \Rightarrow OEN\Theta$ ἐγγράψιμον $\Rightarrow \hat{EN O} = \hat{E\Theta O} = 1^L$.



338. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπί τῆς διχοτόμου ΑΔ αὐτοῦ καί τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν (ἑκατέρωθεν τοῦ Α) τά σημεῖα Ρ καί Κ ὥστε $AP^2 = AK^2 = AB \cdot A\Gamma$. Νά δειχθῇ α) Τό τετράπλευρον ΒΡΓΚ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον β) Ἐάν Μ τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ $A\hat{P}B = M\hat{P}\Gamma$.

Ἀπόδειξις:

α) $AP^2 = AB \cdot A\Gamma \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{A\Gamma}{AP}$ (1)

$B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (2). (1), (2) $\Rightarrow A\hat{B}P \sim A\hat{P}\Gamma$.

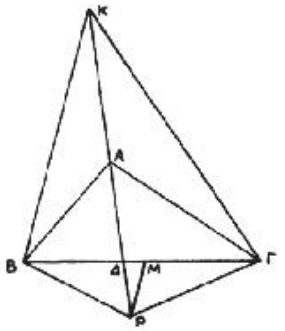
Ὁμοίως εὑρίσκομεν $A\hat{B}K \sim K\hat{A}\Gamma$.

$\hat{A} = A\hat{B}K + B\hat{K}\Gamma + A\hat{\Gamma}K = 2B\hat{K}\Gamma \Rightarrow$

$B\hat{K}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$ (3). $B\hat{P}\Gamma = B\hat{P}A + A\hat{P}\Gamma = B\hat{P}A + A\hat{B}P =$

$= 2^L - \frac{\hat{A}}{2}$ (4).

(3), (4) $\Rightarrow B\hat{K}\Gamma + B\hat{P}\Gamma = 2^L \Rightarrow$ ΒΡΓΚ ἐγγράψιμον.



β) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $B\hat{P}\Gamma \sim K\hat{A}\Gamma$ καί συνεπῶς $\frac{BP}{2BM} = \frac{AK}{K\Gamma} \Rightarrow \frac{BP}{BM} = \frac{KP}{K\Gamma}$ (5), $P\hat{B}\Gamma = P\hat{K}\Gamma$ (6).

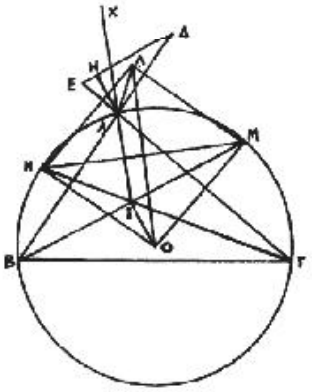
(5), (6) $\Rightarrow B\hat{P}M \sim K\hat{P}\Gamma \Rightarrow B\hat{P}M = K\hat{P}\Gamma \Rightarrow A\hat{P}B = M\hat{P}\Gamma$.

339. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΑ καί ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τά σημεῖα Δ καί Ε ὥστε $B\Delta = \Gamma E = B\Gamma$. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεία ἡ ὁποία ἑνώνει τό κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ μέ τό κέν-

τρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $\hat{ABΓ}$ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΔΕ καὶ ἀκόμη ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΙΟ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $\hat{ΔAE}$

Ἀπόδειξις:

Α' λύσις: Εἶναι ὡς γνωστὸν ΜΑ=ΜΙ=ΜΓ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ $\hat{ΔBΓ}$ (ΒΔ=ΒΓ) $\Longrightarrow$ ΜΔ=ΜΓ. Ἄρα τὰ Δ,Α,Ι,Γ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (Μ). Ἡ μεσοκάθετος εἰς ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ Μ. Διὰ τὸ ΛΜΟΝ, ΛΜ∥ΟΝ, ΛΝ∥ΟΜ, ΟΜ=ΟΝ ἤτοι ΛΜΟΝ ρόμβος, ὅθεν ΜΝ μεσοκάθετος εἰς ΟΛ. Οἱ κύκλοι (Μ) καὶ (Ν) ἔχουν τὴν ΑΙ κοινὴν χορδήν, ἄρα ΜΝ μεσοκάθετος εἰς ΑΙ. Δηλαδὴ τὸ ΑΛΟΙ ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ συνεπῶς ΛΑ=ΙΟ. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἡ ΙΟ εἶναι ἰσοκλινὴς τῆς ΑΛ πρὸς τὴν διχοτόμον Αx τῆς $\hat{ΔAE}$. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν καὶ τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ $\hat{ΔAE}$ εἶναι ἰσοκλινὲς τῆς ΑΛ πρὸς τὴν διχοτόμον Αx, ἤτοι ΙΟ∥ΑΗ.



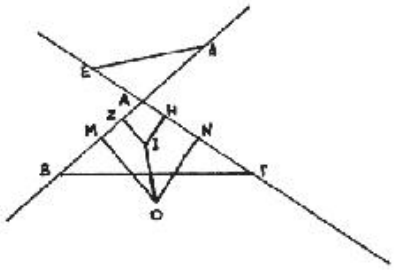
Β' λύσις:

Παραθέτομεν ἀκόμη μίαν λύσιν θέσει τῆς ἀσκήσεως 311.

$HN = AN - AH = \frac{β}{2} - (τ-α) = \frac{β}{2} - \frac{β+γ-α}{2} = \frac{α-γ}{2}$ (1). $AΔ = α-γ$ (2).

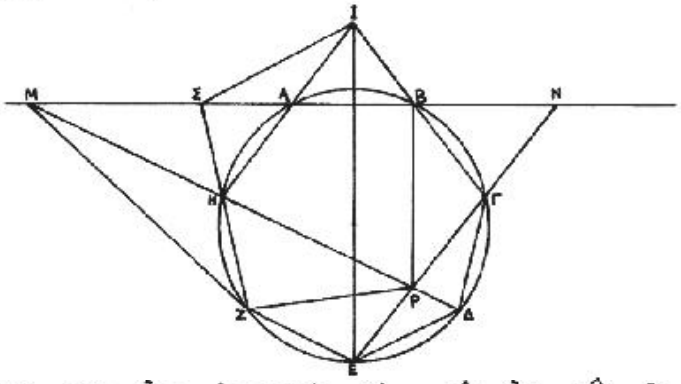
(1),(2) $\Longrightarrow \frac{AΔ}{HN} = 2$. Ὁμοίως $\frac{AE}{MZ} = 2$, ἄρα $\frac{AΔ}{HN} = \frac{AE}{MZ}$ καὶ συνεπῶς ΙΟ⊥ΕΔ.

Ἀκόμη $R_{EAΔ} = \frac{1}{2} κ·α = \frac{1}{2}·2·ΙΟ = ΙΟ$.



340. Ἰσόπλευρον ἐπτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Θέτομεν Μ = ΑΒ∩ΔΗ, Ν = ΓΕ∩ΑΒ, Ρ = ΔΗ∩ΓΕ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΜΝΡ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ζ.

Ἀπόδειξις:



Τὸ τρίγωνον ΡΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $\hat{PΔΓ} = \frac{3π}{7}$, $\hat{ΓPΔ} = \frac{3π}{7}$. Ἄρα ΓΡ=ΓΔ=ΓΒ. Διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΓΡ εὑρίσκομεν $\hat{PBΓ} = \frac{1,5π}{7}$, ἀλλὰ $\hat{NBΓ} = \frac{2π}{7}$, ὅθεν $\hat{PBΓ} + \hat{NBΓ} = \frac{3,5π}{7} = \frac{π}{2}$, ἤτοι ΒΓ⊥ΑΒ $\Longrightarrow$ ΒΡ∥ΙΕ. $\frac{PE}{ZE} = \frac{PE}{PΓ} = \frac{ΙΔ}{BΓ} = \frac{AΣ}{AH}$ (1). Διὰ τὸ $\hat{AHM}$ εἶναι ΗΣ διχοτόμος τῆς $\hat{AHM}$, ὡς φαίνεται εὐκόλως διὰ τοῦ ὑπο-

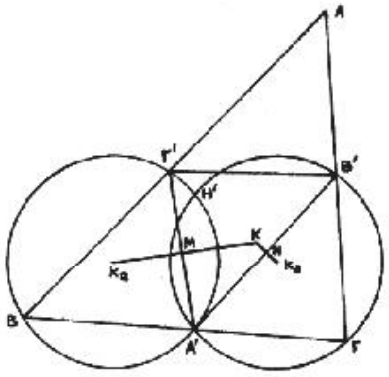
λογισμοῦ τῶν $\hat{AH\Sigma} = \hat{MH\Sigma} = \frac{2\pi}{7}$. θά ἔχωμεν λοιπόν $\frac{A\Sigma}{AH} = \frac{\Sigma M}{MH}$ (2).

Τά τρίγωνα ΜΣΗ, ΙΣΗ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν ΣΗ κοινήν, $\hat{\Sigma HM} = \hat{\Sigma HI}$ καί $\hat{M\Sigma H} = \hat{I\Sigma H} = \frac{4\pi}{7}$, ἄρα MH = IH. Εἶναι προφανές δέ ὅτι IH = ΣΖ ἄρα MH = ΣΖ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \frac{PE}{ZE} = \frac{\Sigma M}{\Sigma Z}$ (4). Εὐκόλως εὑρίσκομεν ἀκόμη ὅτι $\hat{ZEP} = \hat{Z\Sigma M} = \frac{4\pi}{7}$ (5) καί (4), (5) $\longrightarrow \hat{ZEP} \sim \hat{Z\Sigma M} \Longrightarrow \hat{ZPE} = \hat{ZMZ} \Longrightarrow$ M, Z, P, N ὁμοκυκλικά.

341. Τό τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τό $\hat{AB\Gamma}$ καί ὅμοιο πρός αὐτό. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ προβολή ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ $\hat{A'B'\Gamma'}$ ἐπί τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ $\hat{AB\Gamma}$ εἶναι ἴση πρός τό ἥμισυ τῆς τελευταίας.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $\hat{AB\Gamma} \sim \hat{A'B'\Gamma'}$. Θεωροῦμεν τούς περιγεγραμμένους κύκλους περί τά τρίγωνα Α'Β'Γ', ΑΒ'Γ', Α'ΒΓ', Α'Β'Γ. Εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι οὗτοι εἶναι ἴσοι. Ἄρα οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τά ΑΒ'Γ', ΒΓ'Α', ΓΑ'Β' εἶναι συμμετρικοί τοῦ κύκλου περί τό Α'Β'Γ' ὡς πρός τάς πλευράς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντιστοίχως καί διέρχονται διά τοῦ ὀρθοκέντρου Η' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'. Ἐάν Κ τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό $\hat{A'B'\Gamma'}$ τά συμμετρικά K_2, K_3 αὐτοῦ πρός Α'Γ', Α'Β' εἶναι τά κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περί τά $\hat{B\Gamma'A'}$, $\hat{\Gamma A'B'}$. Εἶναι $(MN = \frac{1}{2} B'\Gamma') \wedge (MN \parallel B'\Gamma')$ (1) ὁμοίως $(MN = \frac{1}{2} K_2K_3) \wedge (MN \parallel K_2K_3)$ (2) Ἤτοι $K_2K_3 \equiv B'\Gamma'$. Ἀλλά ἡ προβολή τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος K_2K_3 ἐπί τήν ΒΓ εἶναι προφανῶς τό ἥμισυ τῆς ΒΓ, ὅθεν καί ἡ προβολή τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Β'Γ' εἶναι τό ἥμισυ τῆς ΒΓ, δεδομένου ὅτι τά τμήματα K_2K_3, Β'Γ' εἶναι ἴσα καί παράλληλα.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

342. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ : $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2$.

343. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\frac{\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{3}{4}$.

344. Ἂν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τραπεζίου εἶναι κάθετοι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν βάσεων.

345. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια (ο), διαμέτρου ΑΒ. Ἡμιπεριφέρεια (κ) διαμέτρου ΟΑ περιέχεται εἰς τὴν (ο). Ἡ κάθετος εἰς τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΑ τέμνει τὰς (κ) καὶ (ο) εἰς Δ καὶ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AE^2 = 2\,A\Delta^2$.

346. Ἔστω τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ κέντρου Ο. Διὰ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τόξου ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς Α′ καὶ τὴν ΟΒ εἰς Β′. Νὰ δειχθῇ ὅτι $MA'^2 + MB'^2 = AB^2$.

347. Εἰς παραλληλόγραμμον ἄγεται διὰ τοῦ Α τυχούσα εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΒΔ, ΓΔ, ΒΓ εἰς σημεῖα Ε, Η, Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AE^2 = EH \cdot EZ$.

348. Ἐὰν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AA'}{MA^2} = \frac{BB'}{MB^2} = \frac{\Gamma\Gamma'}{M\Gamma^2}$.

349. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ ΒΓ διάμετρος αὐτοῦ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς ΒΓ καὶ φέρομεν χορδὴν ΔΑΕ τέμνουσα τὴν ΒΓ ὑπὸ γωνίαν 45°. Νὰ δειχθῇ ὅτι $A\Delta^2 + AE^2 = 2R^2$.

350. Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ Ε εἶναι τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τῆς ΑΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Δ παράλληλοι πρὸς τὰς ΕΓ καὶ ΕΒ τέμνονται ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τῆς ΒΓ.

351. Περιφέρεια (κ, ρ) ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ περιφερείας (Ο, R). Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς (κ) τέμνει τὴν (ο) εἰς Β, Γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $KB \cdot K\Gamma = 2Rp$.

352. Ἐὰν εἰς τρίγωνον $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $2AH^2 = BH^2 + \Gamma H^2$.

353. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Ο τὸ κέντρον βάρους καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Ο, R). Νὰ δειχθῇ ὅτι $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 + O\Delta^2 + 4R^2$.

354. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ νὰ δειχθῇ ὅτι $B\Gamma^2 = 2B\Delta^2 - 2\Delta\Gamma^2$.

355. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεων.

356. Ἔστω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Μ ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

357. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τέμνωνται καθέτως εἶναι ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων.

358. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε νὰ δειχθῇ ὅτι $BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot \Delta E$.

359. Δίδεται κύκλος (ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ΓΔ χορδὴ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

360. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 12R^2$.

361. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΒΓ. Φέρομεν ἐκ τοῦ Β τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ τέμνουσαν τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma Z \parallel AE$.

362. Δίδεται περιφέρεια (ο) καὶ διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Ἡ κάθετος εἰς Μ ἐπὶ τὴν ΜΡ τέμνει τὰς ἐφαπτομένας εἰς Α καὶ Β εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $A\Gamma \cdot B\Delta = PA \cdot PB$.

363. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΜ ἡ διάμεσος καὶ Δ τὸ μέσον αὐτῆς. Ἡ ΒΔ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς σημεῖον Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma E = 2 \cdot AE$.

364. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{A} = 90^\circ + \hat{\Gamma}$. Ἐὰν Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ ΒΔ τὸ ὕψος του νὰ δειχθῇ ὅτι $BH^2 = 4\,A\Delta \cdot \Gamma\Delta$.

365. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

366. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἄγονται ἡ διὰ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ ἡ διὰ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ τέμνουσα τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι $MN \parallel AB$.

367. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλα τὰ περιγεγραμμένα ὀρθογώνια τετράπλευρα περὶ τὸ ΑΒΓΔ εἶ-

ναι ἄμοια.

368. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ ἡ βάσις του ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος του ΑΔ, ἴση πρὸς λ. Ἤτοι $ΒΓ = ΑΔ = λ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου συναρτήσει τοῦ λ.

369. Ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Α λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Β′ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β) καὶ Γ′ ὥστε $ΑΒ′ \cdot ΑΓ′ = ΑΒ \cdot ΑΓ$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν $90° - \frac{\hat{A}}{2}$.

370. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως ὥστε $ΒΔ = ΓΕ$. Ἐὰν θέσωμεν $Ζ = ΔΕ \cap ΒΓ$ νὰ δειχθῇ α) $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΓΖ}{ΒΖ}$ β) $\frac{ΕΖ}{ΔΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

371. Δίδεται ἡμικύκλιον (ο) διαμέτρου ΑΒ. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (ο) εἰς τυχόν σημεῖον Μ αὐτῆς τέμνει τὰς ἐφαπτομένας εἰς Α καὶ Β τῆς (ο) εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Ἔστω $Ρ = Α′Β \cap ΑΒ′$ καὶ $Σ = ΜΡ \cap ΑΒ$. Νὰ δειχθῇ α) $ΜΡ \perp ΑΒ$ β) $ΜΡ = ΡΣ$.

372. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Θέτομεν Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ. Ἐὰν λάβωμεν τυχόν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ θέσωμεν x, y, z τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $\hat{ΑΒΓ}$ καὶ $x′, y′, z′$ τὰς ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $\hat{ΔΕΖ}$ θὰ εἶναι $xyz = x′y′z′$.

373. Ἔστω κύκλος (ο) καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ (ε) εἰς τυχόν σημεῖον Α. Ἐὰν x ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας τοῦ (ο) ἀπὸ τὴν (ε) νὰ δειχθῇ ὅτι $ΑΜ^2 = 2Rx$.

374. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ μὲ γωνίαν κορυφῆς $\hat{A} = 135°$. Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τῆς ΒΓ ὥστε νὰ εἶναι $\hat{ΒΑΔ} = \hat{ΔΑΕ} = \hat{ΕΑΓ} = 45°$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΒΔ^2 = ΒΓ \cdot ΔΕ$.

375. Εἰς πᾶν τετράπλευρον ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων τέμνει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τμήματα ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

376. Διὰ κάθε ἰσοσκελὲς τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων.

377. Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ τῶν βάσεων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ΒΓ+ΔΑ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τέμνουσα εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) $ΑΜ + ΒΝ = ΑΒ$ β) $ΔΜ + ΓΝ = ΔΓ$.

378. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ λαμβάνεται σημεῖον Β′ καὶ κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον ΑΒ′Γ′Δ′ ὥστε νὰ περιέχῃ τὸ ΑΒΓΔ. Ἔστω $E = B'\Gamma \cap A\Delta$, $Z = \Gamma'\Delta \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ = AE$.

379. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ αὐτοῦ τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $BE = \Gamma Z = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

380. Ἔστω Δ, Ε, Ζ σημεῖα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ κάθετοι εἰς Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι $B\Delta + \Gamma E + AZ = \Gamma\Delta + AE + BZ$.

381. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι, ἀκτῖνος R, ἐφάπτονται μεταξύ των ἀνὰ δύο. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται καὶ τῶν τριῶν.

382. Αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς διαγωνίου παραλληλογράμμου ἀπὸ δύο προσκειμένας πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐν λόγῳ πλευρῶν.

383. Εἰς κύκλον (Ο), ΑΒ μία διάμετρος καὶ ΓΔ χορδὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἔστω Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΓΔ, Ζ καὶ Η τὰ σημεῖα ὅπου αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΒΕ τέμνουν τὸν κύκλον. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{H\Gamma}{H\Delta}$.

384. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις Β, Β. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου εἶναι τετράγωνον τότε τὸ ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ ἂν λ ἡ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν θὰ εἶναι $\lambda^2 = B^2 - 2\lambda^2$.

385. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ $\hat{A} = 90^\circ + \hat{\Gamma}$ τότε $AB^2 + B\Gamma^2 = 4R^2$.

386. Εἰς πᾶν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

387. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^L$) εἶναι $(\alpha + \upsilon_\alpha)^2 = (\beta+\gamma)^2 + \upsilon_\alpha^2$.

388. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΗ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

389. Δι' ἑνὸς σημείου Α φέρομεν ἐφαπτομένην ΑΒ κύκλου καὶ τέμνουσαν ΑΓΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma^2}{B\Delta^2}$.

390. Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ε, Ζ σημεῖα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀντιστοίχως ὥστε $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΖ}{ΖΓ} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ}$. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ΑΔ, ΒΓ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετά τῆς ΕΖ.

391. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἐπί τῶν ὑψῶν αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α′, Β′, Γ′ εἰς ἀπόστασιν πρός τό ἔν τρίτον ἑκάστου τούτου ἀπό τοῦ ποδός του. Νά δειχθῇ 1) τά Α′, Β′, Γ′ τό ὀρθόκεντρον Η καί τό κέντρον βάρους Κ κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας 2) $Α'\hat{Β}'Γ' \sim Α\hat{Β}Γ$.

392. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Μία εὐθεία παράλληλος πρός τήν διαγώνιον ΒΔ τέμνει τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΔ εἰς σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Μία δευτέρα εὐθεία παράλληλος πρός τήν ΒΔ τέμνει τάς ΓΒ καί ΓΔ εἰς Η καί Θ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καί ΖΘ τέμνονται ἐπί τῆς ΑΓ.

393. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καί ἐκτός αὐτοῦ ἄγεται εὐθεία τέμνουσα τάς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΔ εἰς Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΕ} + \frac{ΑΔ}{ΑΖ} = 1$.

394. Ἐάν εἰς τρίγωνον αἱ πλευραί καί αἱ γωνίαι ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον τό τρίγωνον θά εἶναι ἰσόπλευρον.

395. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1^L$). Ἐπί τῶν πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα ΑΒΔΕ καί ΑΓΖΗ. Ἐάν $Θ = ΑΒ \cap ΓΔ$ καί $Ι = ΑΓ \cap ΒΖ$ νά δειχθῇ ὅτι $ΑΘ^2 = ΑΙ^2 = ΒΘ \cdot ΓΙ$.

396. Οἱ ρόμβοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς δοθέν ὀρθογώνιον εἶναι πολύγωνα ὅμοια.

397. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαί τῶν τεσσάρων κορυφῶν δοθέντος παραλληλογράμμου ἐπί τάς διαγωνίους του εἶναι κορυφαί παραλληλογράμμου ὁμοίου πρός τό δοθέν.

398. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1^L$). Ἔστω ΑΔ τό ὕψος καί $ΔΕ \perp ΑΒ$. Νά δειχθῇ ὅτι $ΑΔ^2 = ΑΓ \cdot ΔΕ$.

399. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τραπέζιον μέ καθέτους διαγωνίους τό ὕψος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν βάσεων.

400. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ : $\hat{Α} = 120°$. Ἐάν $ΑΒ = λ$, $ΑΓ = μ$ νά εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν λ, μ τό $υ_α$ καί τό α.

401. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\hat{Α} = 1^L$. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{δ_α} = \frac{1}{β} + \frac{1}{γ}$.

402. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}=1^L$). Ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης καὶ ΔΕ, ΔΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta B\cdot\Delta\Gamma = EA\cdot EB + ZA\cdot Z\Gamma$.

403. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ ἡ γωνία κορυφῆς $\hat{A}$ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἡ ἐκ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνει ταύτην εἰς Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $B\Gamma^2 = 2\,\Gamma A\cdot\Gamma\Delta$.

404. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ. Μία τῶν ἴσων πλευρῶν ἔστω ἡ ΑΒ προεκτείνεται ἕως τὸ Δ ὥστε $AB = B\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Gamma\Delta^2 = 2B\Gamma^2 + AB^2$.

405. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η ἐπὶ τῶν ΑΔ, ΒΑ, ΓΑ ἀντιστοίχως ὥστε $AE = BZ = AH = x$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x ἵνα $Z\hat{E}H = 1^L$.

406. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Ἔστω $M = BZ \cap A\Gamma$ καὶ $N = \Gamma\Delta \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AM = AN$.

407. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΕ. Νὰ δειχθῇ ὅτι
α) $AB^2 - BN^2 = AN\cdot\Gamma N$ β) $AN^2 + N\Gamma^2 = 2BN^2$.

408. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον. Σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΟΒΓ′, ΒΟΓΑ′, ΓΟΑΒ′. Νὰ ἀποδειχθῇ α) Αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου β) $AA'^2 + BB'^2 + \Gamma\Gamma'^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+OA^2+OB^2+O\Gamma^2$.

409. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ. Ἐὰν Κ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ νὰ δειχθῇ ὅτι $KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 + K\Delta^2 = EH^2 + Z\Theta^2 + MN^2$.

410. ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς ὁμοκέντρους κύκλους ΑΒΓΡ καὶ Α′Β′Γ′Ρ′. Νὰ δειχθῇ : $AP'^2 + BP'^2 + \Gamma P'^2 = A'P^2 + B'P^2 + \Gamma'P^2$.

411. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον καὶ εὐθεῖα (χ) τέμνουσα τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΔ, ΓΔ, ΒΓ, ΑΓ, ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{EZ}{H\Theta} = \frac{ZI}{HI}\cdot\frac{EK}{\Theta K}$.

412. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $AB\cdot A\Gamma = AI_\theta\cdot AI_\beta$.

413. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος, ΑΕ ἡ διχοτόμος, Ζ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ΒΓ καὶ Η τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Delta Z\cdot EH = \Delta H\cdot EZ$.

414. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσα καὶ I_1, I_2 τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΔΒ. Αἱ ἐκ τῶν I_1, I_2 παράλληλοι πρὸς τὸ ὕψος ΑΔ τέμνουν τὰς ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AE = AZ$.

415. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ $\frac{\gamma}{4} = \frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6}$ τότε $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.

416. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Κύκλος (κ) διερχόμενος διὰ τοῦ Α τέμνει τὸν (Ο) εἰς Ε, τὴν ΑΒ εἰς Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{EB+EZ}{E\Gamma+E\Delta}$.

417. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον τρίγωνον ($\hat{A} = 1^L$), ΑΔ τὸ ὕψος, ΑΕ ἡ διχοτόμος καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AB^2+A\Gamma^2} = \frac{M\Delta}{ME}$.

418. Εἰς ισοσκελογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι $\hat{A} = \hat{B} = 1^L$. Ἐὰν τὸ σημεῖον Ε χωρίζει τὴν ΑΒ εἰς λόγον $\frac{AE}{EB} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$ καὶ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ νὰ δειχθῇ ὅτι $E\Delta \cdot \Gamma\Delta + EM^2 = 2 \cdot A\Delta \cdot B\Gamma + M\Delta^2$.

419. Ἔστω ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τῆς κορυφῆς Γ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΔ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AE} - \frac{1}{AZ}$.

420. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (κ) καὶ (λ) οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τῶν Γ καὶ Β καὶ ὁ πρῶτος ἐφάπτεται εἰς Β τῆς ΑΒ, ὁ δεύτερος εἰς Γ τῆς ΑΓ. Ἐὰν Ζ τὸ ἕτερον σημεῖον τομῆς τοῦ (κ) μετὰ τῆς ΑΓ καὶ Ε τοῦ (λ) μετὰ τῆς ΑΒ, νὰ δειχθῇ ὅτι α) $BZ \parallel \Gamma E$ β) $\frac{AZ}{AE} = \frac{AB^3}{A\Gamma^3}$.

421. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνονται εἰς Ρ, αἱ δὲ ΑΔ, ΒΓ τέμνονται εἰς Κ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{PA \cdot P\Gamma}{PB \cdot P\Delta} = \frac{K\Lambda \cdot K\Gamma}{KB \cdot K\Delta}$.

422. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς Ο. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

423. Εἰς πᾶν τρίγωνον $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \iff 2\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$.

424. Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^L$), $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \implies \frac{A\Gamma^2}{AB^2} = 3$.

425. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\mu_\alpha^4 + \mu_\beta^4 + \mu_\gamma^4 = \frac{9}{16}(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)$.

426. Εἰς δοθὲν τρίγωνον εἰς μεγαλυτέραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα διχοτόμος.

Ὑπόδειξις: Ἔστω $\beta > \gamma$. Θὰ πρέπῃ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\delta_\beta < \delta_\gamma \implies$ $\implies \frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\gamma\tau(\tau-\beta)} < \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}$. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων θὰ προ-

κύγῃ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν βγαίνει κοινὸς παράγων τὸ β-γ.

427. Αἱ περιφέρειαι (O_1, R_1), (O_2, R_2) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς Α. Ἐὰν ΒΓ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν R_1, R_2 αἱ πλευραὶ τοῦ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

428. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγαλυτέρα γωνία τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $\alpha, \beta, \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$.

429. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ τετραπλεύρου νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha^2+\gamma^2-(\beta^2+\delta^2)$ ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς μιᾶς διαγωνίου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπ' αὐτήν.

430. Ἐπὶ τῆς ἀσκ. 306.

Ἐὰν I_1, I_2 τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ νὰ δειχθῇ ὅτι α) $I_1I_2 = \rho\sqrt{2}$ β) ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $\overset{\triangle}{AI_1I_2}$ εἶναι ἴση πρὸς ρ.

431. Δύο κύκλοι (O_1, R_1) καὶ (O_2, R_2) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἐπίσης ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς κύκλου (O, R) καὶ δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου τούτου. Ἂν p καὶ q αἱ ἀποστάσεις τῶν O_1, O_2 ἀπὸ τὴν διάμετρον τοῦ (O) ἡ ὁποία συνάδει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, νὰ δειχθῇ ὅτι $pq = 2R^2 = 8R_1R_2$.

432. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Ε. Ἐὰν θέσωμεν $K = A\Delta \cap EZ$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{EK}{KZ} = \frac{AE}{AZ}\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\frac{A\Gamma}{AB}$.

433. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς Κ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ρ. Νὰ δειχθῇ $\frac{1}{PB} + \frac{1}{P\Gamma} = \frac{1}{PK}$.

434. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο περὶ κύκλον (O, R). Ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν Μ, Ν τὰ σημεῖα ὅπου ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΕ εἰς Ο τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AM}{MB} = \frac{\Gamma N}{N\Delta}$.

435. Μία δέσμη εὐθειῶν $O.x_1x_2\ldots x_\nu$ τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ε καὶ η κατὰ τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ καὶ $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων $A_iB_iB_jA_j$ τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. $(i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\} \wedge i \neq j)$.

436. Θεωροῦμεν κύκλον (O) καὶ δύο τυχούσας χορδὰς αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστω ΑΑ' καὶ ΒΒ' αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν ΓΔ καὶ ΓΓ', ΔΔ' αἱ ἀποστάσεις τῶν Γ καὶ Δ ἀπὸ τὴν ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AA' \cdot BB' = \Gamma\Gamma' \cdot \Delta\Delta'$.

437. Θεωρούμεν δύο τεμνομένους κύκλους (o) καὶ (o') κατὰ τὰ σημεῖα A καὶ B. Διὰ τοῦ A φέρομεν τρεῖς τεμνούσας τὸν (o) εἰς P_1, P_2, P_3 καὶ τὸν o' εἰς P_1', P_2', P_3' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \sim \overset{\Delta}{P_1'P_2'P_3'}$.

438. Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ (o) ὁ περιγεγραμμένος κύκλος αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ μέσου M τῆς $B\Gamma$ φέρομεν τὰς MM_1 καὶ MM_2 καθέτους ἐπὶ τὰς OB καὶ $o\Gamma$ ἀντιστοίχως. Τὸ αὐτὸ ἀπὸ τὸ μέσον N τῆς $A\Gamma$ τὰς NN_1, NN_2 καθέτους ἐπὶ τὰς $o\Gamma, OA$ καὶ τέλος ἐκ τοῦ μέσου P τῆς AB τὰς PP_1, PP_2 καθέτους ἐπὶ τὰς OA, OB. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sqrt{\frac{M_1M_2}{\alpha}} + \sqrt{\frac{N_1N_2}{\beta}} + \sqrt{\frac{P_1P_2}{\gamma}} = \frac{R+\rho}{R}$.

439. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ἔστω $A\Delta$ καὶ $A\Delta'$ αἱ διχοτόμοι, ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ ἀντιστοίχως, τῆς γωνίας A. Ἐὰν M καὶ M' τὰ μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$ καὶ $\overset{\frown}{BA\Gamma}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AM = A\Delta' \cdot AM'$.

440. Θεωροῦμεν δύο ὁρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ κατὰ τὰς γωνίας A καὶ A'. Νὰ δειχθῇ:

α) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{U_\alpha}{U_{\alpha'}} \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

β) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\theta}{\theta'} \left(= \frac{\gamma}{\gamma'}\right) \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

441. Διὰ τὰ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}, \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$:

α) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\theta}{\theta'} = \frac{R}{R'} \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

β) $(\hat{B} = \hat{B}') \wedge \left(\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\rho}{\rho'}\right) \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$

γ) $(\hat{A} = \hat{A}') \wedge \left(\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\rho}{\rho'}\right) \Longrightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

442. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐὰν I καὶ I_α τὰ κέντρα ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς $\hat{A}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AI_\alpha}{I_\alpha\Delta} = \frac{\theta+\gamma}{\alpha}$ (1) ὅπου Δ τὸ ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{A}$.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς (1) ἐὰν G τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, εἶναι: $2\alpha = \theta+\gamma \Longrightarrow GI \parallel B\Gamma$.

443. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀγόμεναι διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ παράλληλοι πρὸς τὰς $AP, BP, \Gamma P$ διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου.

444. Δίδεται τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του, E καὶ Z τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, P τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων OAB καὶ $o\Gamma\Delta$ καὶ Σ τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων $OB\Gamma$ καὶ $O\Delta A$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα O, E, Z, P, Σ εἶναι ὁμοκυκλικά.

445. Ἂν ἡ ἡμιπεριφέρεια ἡ γραφομένη μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τραπεζίου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευράν, κάθε σημεῖον τομῆς χωρίζει ταύτην εἰς δύο τμήματα τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν βάσεων. (Ἡ ἀπόδειξις νὰ δίνῃ καὶ διὰ μή

κυρτόν τραπέζιον).

446. Ὡς γνωστόν μέ τάς διαμέσους τριγώνου κατασκευάζεται πάντοτε τρίγωνον. Ἔστω τρίγωνον T_1. Μέ τάς διαμέσους αὐτοῦ κατασκευάζομεν τρίγωνον T_2. Μέ τάς διαμέσους τοῦ νέου τριγώνου τό τρίγωνον T_3, κ.ο.κ. Σχηματίζονται δύο ὁμάδες τριγώνων, $A=\{T_1, T_3, T_5, \dots\}$ καί $B=\{T_2, T_4, T_6, \dots\}$. Νά δειχθῇ ὅτι ἑκάστη ὁμάς περιέχει τρίγωνα ὅμοια μεταξύ των καί νά εὑρεθῇ ὁ λόγος ὁμοιότητος δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν.

447. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἔστω M, N τά σημεῖα ὅπου εὐθεῖα παράλληλος πρός τήν ΒΓ τέμνει τήν περιγεγραμμένην περιφέρειαν. Θέτομεν $M'=AM\cap B\Gamma$, $N'=AN\cap B\Gamma$. Νά δειχθῇ ὅτι $AM\cdot AN'=AN\cdot AM'=AB\cdot A\Gamma$.

448. Ἔστω Ω τό σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων (O,R) καί (O',R'). Εὐθεῖα (ε) διά τοῦ Ω τέμνει τούς κύκλους εἰς τέσσερα σημεῖα. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων εἰς τά σημεῖα τομῆς σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

449. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ὁ περιγεγραμμένος κύκλος (O) αὐτοῦ. Ἐπί τῶν $OA, OB, O\Gamma$ καί εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπό τό κέντρον λαμβάνομεν τά σημεῖα A', B', Γ'. Προβάλλομεν ἕκαστον ἐκ τῶν σημείων ἐπί τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἐντός τῆς ὁποίας περιέχεται ἡ ἀντίστοιχος ἀκτίνα. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ἓξ προβολαί ἀποτελοῦν ἑξάγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί, ὅπως καί αἱ διαγώνιοι αἱ συνδέουσαι τάς ἀπέναντι κορυφάς, εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρός τάς πλευράς τοῦ τριγώνου.

450. Ἐπί τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν τόξα τά ὁποῖα δέχονται γωνίας x, y, z ἀντιστοίχως. Ἂν $x+y+z=2^L$ νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον μέ κορυφάς τά κέντρα τῶν κύκλων τῶν τόξων ἔχει γωνίας x, y, z.

451. Ἔστω t_1, t_2 τά μήκη τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων (O_1, R_1) καί (O_2, R_2). Νά δειχθῇ ὅτι $t_1^2-t_2^2=4R_1R_2$.

452. Δύο περιφέρειαι (O_1, R_1) καί (O_2, R_2) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Θεωροῦμεν τήν περιφέρειαν διαμέτρου O_1O_2 καί τήν περιφέρειαν (O, R), ἐφαπτομένην τῶν $(O_1), (O_2)$ καί τῆς περιφερείας διαμέτρου O_1O_2 ἐσωτερικῶς. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{R}=2\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]$. Ἐρευνήσατε τήν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ κύκλοι $(O_1), (O_2)$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

453. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Νά δειχθῇ α) Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφήν μέ τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφήν μέ τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν διέρχονται διά τοῦ

αὐτοῦ σημείου.

454. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια καὶ ὁμοίως προσαναταλισμένα. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὁμόλογα ὕψη των τεμνόμενα σχηματίζουν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα.

455. Δύο κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΒΔ. Ἔστω $(κ, ρ)$ ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτόμενος τῆς ΓΔ εἰς Β καὶ (O, R) ὁ κύκλος περὶ τὸ $\hat{\Gamma A \Delta}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $R_1 R_2 = Rρ$.

456. Ἐὰν ἡ διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α καὶ τὴν ΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι $α^2 = 4βγ$.

ΟΜΑΣ Β'.

457. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^L$) αἱ διχοτόμοι ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τέμνονται εἰς Ι. Νὰ δειχθῇ ὅτι $ΒΙ \cdot ΓΙ = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΓΕ$.

458. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὰς πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ $\hat{ΔEZ}$ ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχεται. Ἔστω ὅτι $ΑΒ \parallel ΔΕ$, $ΒΓ \parallel ΕΖ$, $ΓΑ \parallel ΖΔ$. Τὸ σημεῖον Α προβάλλεται ἐπὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ εἰς Η, Μ ἀντιστοίχως, τὸ Β εἰς ΕΔ, ΕΖ εἰς Θ, Ι ἀντιστοίχως καὶ τὸ Γ εἰς ΖΔ, ΖΕ εἰς Λ καὶ Κ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $ΑΚ^2 + ΓΘ^2 + ΒΜ^2 = ΑΙ^2 + ΓΗ^2 + ΒΛ^2$.

459. Ὡς γνωστὸν ὑπάρχουν τέσσαρες κύκλοι ἐφαπτόμενοι τριῶν τεμνομένων εὐθειῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου τῶν δύο ἐξ αὐτῶν ὧν τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου τῶν δύο ἄλλων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ποὺ διέρχεται διὰ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων κέντρων. (Εἶναι γνωστὸν ὅτι οἱ τέσσαρες οὕτω προκύπτοντες κύκλοι εἶναι ἴσοι).

460. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (ο) τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ τέμνει τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ τὴν προέκτασιν ΓΔ εἰς Ε καὶ Ε' ἀντιστοίχως, ἐνῷ ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ καὶ τὴν προέκτασιν ΑΒ εἰς Η καὶ Η'. Νὰ δειχθῇ ὅτι $ΕΗ \parallel Ε'Η'$.

461. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι θεωροῦμεν τὰς τέσσαρας περιφερείας τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ καιναὶ χορδαὶ τῶν ἐν λόγῳ περιφερειῶν τεμνόμεναι σχηματίζουν ρόμβον.

462. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Δ, Δ' εἶναι οἱ πόδες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\hat{A}$. Ἀντιστοίχως E, E' τῆς $\hat{B}$ καὶ Z, Z' τῆς $\hat{\Gamma}$. Νὰ δειχθῇ α) $\frac{1}{\Delta\Delta'} = \frac{1}{EE'} + \frac{1}{ZZ'}$ β) $\frac{\alpha^2}{\Delta\Delta'} = \frac{\beta^2}{EE'} + \frac{\gamma^2}{ZZ'}$.

463. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ τὰ ὕψη καὶ K, Λ, M τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ $\overset{\Delta}{AB'\Gamma'}$, $\overset{\Delta}{B\Gamma'A'}$, $\overset{\Delta}{\Gamma A'B'}$. Ἐὰν Δ, E, Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΚΛΜ ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ ἴσας.

464. Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον. H_1, H_2, H_3, H_4 τὰ ὀρθόκεντρα, G_1, G_2, G_3, G_4 τὰ κέντρα βάρους τῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τετράπλευρα $H_1H_2H_3H_4$, $G_1G_2G_3G_4$ εἶναι ὅμοια.

465. Τριγώνου ΑΒΓ, Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ M, N, P τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A', B', Γ' ἀπὸ τὰς σχέσεις $\frac{OM}{OA'} = \frac{ON}{OB'} = \frac{OP}{O\Gamma'} = \lambda$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

466. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ ὀρθογώνια ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ. Θέτομεν $A_1 = \Delta E \cap I\Theta$, $B_1 = ZH \cap \Delta E$, $\Gamma_1 = I\Theta \cap ZH$ καὶ $A_2 = \Delta H \cap IZ$, $B_2 = IZ \cap E\Theta$, $\Gamma_2 = E\Theta \cap \Delta H$. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) Αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐκ τῶν A_2, B_2, Γ_2 ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου β) Αἱ κάθετοι ἐκ τῶν A_1, B_1, Γ_1 ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B_2\Gamma_2$, Γ_2A_2, A_2B_2 ἀντιστοίχως τοῦ $\overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ γ) Αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΕΘ, ΙΖ, ΗΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

467. Πολυγώνου $A_1A_2\dots A_\nu$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον. Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετὰ τῆς περιφερείας $B_1, B_2, \dots, B_\nu$ εἶναι κορυφαὶ ἄλλου πολυγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $A_1A_2\dots A_\nu$ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ $B_1B_2\dots B_\nu$.

468. Εἰς τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον (I) τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ Ε εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ μετὰ τῆς ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΕ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μετὰ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου εἰς τὴν $\hat{A}$.

469. Διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι $\hat{A} + \hat{A}' = 2^L$, $\hat{B} = \hat{B}'$. Δείξατε ὅτι $\alpha\alpha' = \beta\beta' + \gamma\gamma'$.

470. Εἰς πᾶν τρίγωνον:

α) $\alpha\beta\gamma = I_\alpha B \cdot I_\beta A \cdot I_\theta \Gamma = I_\alpha \Gamma \cdot I_\theta A \cdot I_\beta B$.

β) $IA \cdot IB \cdot I\Gamma = \frac{I_\alpha B \cdot I_\alpha \Gamma}{I_\alpha A} \cdot \frac{I_\beta \Gamma \cdot I_\beta A}{I_\beta B} \cdot \frac{I_\gamma A \cdot I_\gamma B}{I_\gamma \Gamma}$.

471. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι 1^L εἶναι ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ.

472. Ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^L$) φέρομεν τὴν διχοτόμον $B\Delta$. Ἔστω O τὸ μέσον αὐτῆς. Εἰς τὸ σημεῖον O καὶ ἐπὶ τὴν $B\Delta$ φέρομεν τὴν κάθετον ἡ ὁποία τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν εἰς M καὶ τὴν AB εἰς N. Νὰ δειχθῇ α) $MB^2 = \Gamma M \cdot AN$ β) $\frac{\Gamma M \cdot \Delta A \cdot AB}{\Gamma\Delta \cdot AN \cdot B\Gamma} = 1$ γ) $\Gamma A \cdot \Gamma\Delta = B\Gamma(\Gamma M - AN)$ δ) $\frac{1}{BN} = \frac{1}{BA} + \frac{1}{B\Gamma}$.

473. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔστω $B\Delta$ ἡ διχοτόμος, BE τὸ ὕψος καὶ BM ἡ διάμεσος ἀπὸ τὴν κορυφὴν B. Ἔστω (x) ἡ ἐκ τοῦ B παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$. Φέρομεν τὴν κάθετον (x') ἐκ τοῦ M εἰς τὴν $B\Delta$ καὶ ἔστω $Z = (x') \cap B\Delta$, $H = (x') \cap BE$, $\Theta = (x') \cap (x)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AM^2 = MZ \cdot H\Theta$.

474. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^L$). Φέρομεν διὰ τοῦ A τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ τὰς καθέτους BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ ἐπ' αὐτήν. Ἐὰν $A\Delta$ τὸ ὕψος καὶ αἱ ἐκ τῶν B καὶ Γ παράλληλοι πρὸς τὰς $B'\Delta$, $\Gamma'\Delta$ τέμνωνται εἰς M νὰ δειχθῇ ὅτι $BB' + \Gamma\Gamma' = AM$.

475. Ἔστω $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος περιγεγραμμένος περὶ κύκλον (O). Ἔστω τυχοῦσα ἐφαπτομένη τοῦ (O) ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Delta$ εἰς E καὶ Z. Νὰ δειχθῇ ὅτι $4 \cdot BE \cdot \Delta Z = B\Delta^2$.

476. Δίδεται περιφέρεια (O) καὶ τρία σημεῖα A, B, Γ αὐτῆς. Ἔστω B_1, Γ_1 αἱ προβολαὶ τῶν B, Γ ἐπὶ τῆς διαμέτρου διὰ τοῦ A καὶ A_1 ἡ προβολὴ τοῦ A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AA_1^2 = AB_1 \cdot A\Gamma_1$.

477. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἂν $(\hat{B} = 90^\circ + \hat{\Gamma}) \wedge (\beta > \gamma)$ τότε $\delta_\alpha = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$.

478. Δίδεται τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ τὰ σημεῖα Λ, M, N, P, Ξ, T ὥστε $\frac{A\Lambda}{\Lambda B} = \frac{\nu}{\mu}$, $\frac{BM}{M\Gamma} = \frac{\rho}{\nu}$, $\frac{\Gamma N}{N\Delta} = \frac{\sigma}{\rho}$, $\frac{\Delta P}{PA} = \frac{\mu}{\sigma}$, $\frac{A\Xi}{\Xi\Gamma} = \frac{\rho}{\mu}$, $\frac{B\Xi}{\Xi\Delta} = \frac{\sigma}{\nu}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AN, MP, T\Xi$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

479. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, κατασκευάσομεν ἐξωτερικῶς, ἐπὶ δὲ τῶν $B\Gamma$ καὶ ΔA ἐσωτερικῶς, τρίγωνα ὅμοια μεταξύ των $AA'B$, $\Gamma\Gamma'\Delta$, $\Gamma B'B$, $A\Delta'\Delta$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον $A'B'\Gamma'\Delta'$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

480. Τρεῖς κύκλοι (O_1, R_1), (O, R), (O_2, R_2) ἐφάπτονται διαδοχικῶς τῶν πλευρῶν γωνίας $x\Omega y$ καὶ μεταξύ των. Ὁ κύκλος (P, ρ) ἐφάπτεται τῶν Ωx, (O_1, R_1), (O, R), ὁ δὲ κύκλος (Q, q) τῶν Ωx, (O_2, R_2),

(O,R). Νά δειχθῆ ὅτι: $\sqrt{p}+\sqrt{q}=\sqrt{R}$.

481. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τούς κύκλους μέ κέντρα τά σημεῖα A,B,Γ καί οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἀνά δύο. Ἔστω ℓ,m,n τά ἐφαπτομενικά τμήματα τῶν κύκλων ἀνά δύο καί 2τ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου. Νά δειχθῆ ὅτι $2\tau=\ell\cdot m\cdot n\left(\frac{1}{\ell^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)$.

482. Ἔστω x,y,z αἱ πλευραί τῶν ἐγγεγραμμένων τετραγώνων εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ. Νά δειχθῆ ὅτι

$$\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}+1\right)^2=4\left(\frac{\beta\gamma}{yz}+\frac{\gamma\alpha}{zx}+\frac{\alpha\beta}{xy}\right).$$

483. Ἐπί ἐπιπέδου δίδονται τρία ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$, $A_2B_2\Gamma_2$, $A_3B_3\Gamma_3$ καί ὁμοίως προσανατολισμένα. Ἔστω O_1 τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί O_2,O_3 τά ὁμόλογα τοῦ O_1 πρός τά $A_2B_2\Gamma_2$, $A_3B_3\Gamma_3$. Θέτομεν $P_3=O_1A_1\cap O_2A_2$, $Q_3=O_1B_1\cap O_2B_2$, $R_3=O_1\Gamma_1\cap O_2\Gamma_2$, $P_1=O_2A_2\cap O_3A_3$, $Q_1=O_2B_2\cap O_3B_3$, $R_1=O_2\Gamma_2\cap O_3\Gamma_3$ καί $P_2=O_3A_3\cap O_1A_1$, $Q_2=O_3B_3\cap O_1B_1$, $R_2=O_3\Gamma_3\cap O_1\Gamma_1$. Νά δειχθῆ ὅτι $P_1\hat{Q}_1R_1\sim P_2\hat{Q}_2R_2\sim P_3\hat{Q}_3R_3$.

484. Ἐπί τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἤτοι $A\hat{M}B\sim\Gamma\hat{N}B\sim\Gamma\hat{P}\Delta\sim A\hat{\Sigma}\Delta$ καί $\hat{M}=1^L$. Νά δειχθῆ ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα $MP,N\Sigma$ εἶναι ἴσα καί σχηματίζουν γωνίαν $\hat{\omega}=2B\hat{A}M$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ 4

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

4-1

Ἔστω κύκλος (O,R) καὶ σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου του. Διὰ τοῦ σημείου P φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς A καὶ B.

4-1.1 Θεώρημα

Τὸ γινόμενον $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ εἶναι σταθερόν, ἀνεξάρτητον τῆς μεταβλητῆς τεμνούσης, καλεῖται δὲ δύναμις τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O,R).

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Γ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος AB. Ἔχομεν $\overline{PA}=\overline{P\Gamma}+\overline{\Gamma A}$ (1), $\overline{PB}=\overline{P\Gamma}+\overline{\Gamma B}$ (2) (θεωρ. Chasles). Ἀλλὰ $\overline{\Gamma B}=-\overline{\Gamma A}$ (3). Ἄρα (1),(2),(3) $\Rightarrow \overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{P\Gamma}+\overline{\Gamma A})(\overline{P\Gamma}-\overline{\Gamma A})=\overline{P\Gamma}^2-\overline{\Gamma A}^2$ (4)

Θέτομεν $\overline{PO}=\delta$: Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OΓP, OΓA ἔχομεν. $\overline{P\Gamma}^2=\delta^2-\overline{O\Gamma}^2$ καὶ $\Gamma A^2=R^2-O\Gamma^2$ (5).

(4),(5) $\longrightarrow$ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\delta^2-R^2$

Πράγματι· τὸ γινόμενον $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου P ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου.

Ὀνομάζομεν τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον δύναμιν τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O,R), συμβολίζομεν δὲ διὰ τοῦ: $\mathcal{D}_{(O,R)}(P)$ ἢ $\mathcal{D}_O(P)$. Εἶναι λοιπὸν βάσει τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος:

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(P)=\delta^2-R^2$$

Παρατηρήσεις

① Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου χωρίζει τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς δύο σύνολα. Τὰ ἔχοντα θετικὴν δύναμιν εἶναι τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου. Τὰ ἔχοντα ἀρνητικὴν δύναμιν εἶναι τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου. Τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἔχουν προφανῶς δύναμιν μηδέν.

② Ἡ μεγίστη δύναμις σημείου P πρὸς κύκλον (O,R) εἶναι $+\infty$. Ἡ ἐλαχίστη $-R^2$.

③ Ἂν θεωρήσωμεν κύκλον (O,R) μὲ R=0, ἔχομεν ὅπως λέγομεν ἓν **σημεῖον κύκλον**. Ἡ δύναμις σημείου P πρὸς τὸν ἐν λόγῳ κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ P ἀπὸ O.

4-2 Ἐφαρμογαὶ τῆς δυνάμεως σημείου

4-2.1 Θεώρημα

Ἐὰν τέσσαρα σημεῖα A,B,Γ,Δ εἶναι ὁμοκύκλια καὶ θέσωμεν $P=AB\cap\Gamma\Delta$ θὰ ἔχωμεν:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$$

Απόδειξις:

Έστω (O,R) ὁ κύκλος διὰ τῶν σημείων A,B,Γ,Δ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\mathcal{P}_{(O,R)}(P) = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \delta^2 - R^2 \qquad (1) \qquad (\overline{OP}=\delta)$$
$$\mathcal{P}_{(O,R)}(P) = \overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta} = \delta^2 - R^2 \qquad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον.

4-2.2 Θεώρημα

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραπλεύρου (κυρτοῦ ἢ μή) τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον P, εἰς τρόπον ὥστε: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$ τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

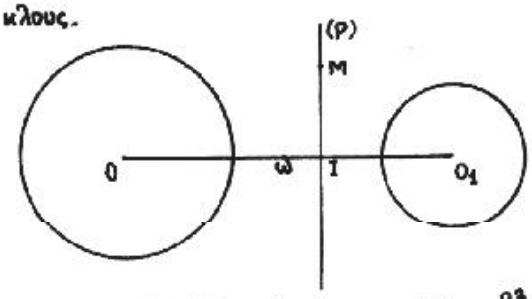
Απόδειξις:

Ἔστω (O,R) ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐὰν Δ_1 τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ $P\Gamma$ τέμνει τὸν κύκλον, βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος θὰ ἔχωμεν $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta_1}$ (1). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$ (2). Ἤτοι $\overline{P\Delta} = \overline{P\Delta_1} \Longrightarrow \Delta \equiv \Delta_1$.

4-3 Ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων

4-3.1

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν δύο κύκλους μὴ ὁμοκέντρους (O,R) καὶ (O_1,R_1). Θὰ ἀναζητήσωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους.



Ἔστω $G=\{M \,/\, \mathcal{P}_{(O,R)}(M) = \mathcal{P}_{(O_1,R_1)}(M)\} \Longrightarrow \overline{OM}^2-R^2 = \overline{O_1M}^2-R_1^2 \Longrightarrow \overline{OM}^2-\overline{O_1M}^2 = R^2-R_1^2$ (1)

Εἰς τὸ τρίγωνον OMO_1 τὸ 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων δίδει $\overline{OM}^2-\overline{O_1M}^2 = 2\,\overline{OO_1}\cdot\overline{\omega I}$ (2) ὅπου ω τὸ μέσον τῆς διακέντρου OO_1 καὶ I ἡ προβολὴ τοῦ M ἐπὶ τῆς OO_1.

$(1),(2) \Rightarrow 2\,\overline{OO_1}\cdot\overline{\omega I} = R^2-R_1^2 \Longrightarrow \overline{\omega I} = \dfrac{R^2-R_1^2}{2\,\overline{OO_1}}$ (3). Κάθε σημεῖον λοιπὸν $M\in G$ προβάλλεται ἐπὶ τῆς διακέντρου εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον I, διδόμενον ἀπὸ τὴν σχέσιν (3). Ἐὰν θέσωμεν (P) τὴν εὐθεῖαν τὴν κάθετον εἰς τὸ σημεῖον I ἐπὶ τὴν OO_1 θὰ εἶναι $G\subseteq(P)$ (4).

Ἀντιστρόφως.

Ἔστω $M'\in(P)$. Διὰ τὸ τρίγωνον OMO_1 τὸ 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων θὰ μᾶς δώσῃ: $\overline{OM}^2-\overline{O_1M}^2 = 2\,\overline{OO_1}\cdot\overline{\omega I}$ (5). $(3),(5) \Longrightarrow \overline{OM}^2-\overline{O_1M}^2 = R^2-R_1^2 \Longrightarrow \overline{OM}^2-R^2 = \overline{O_1M}^2-R_1^2 \Longrightarrow \mathcal{P}_{(O,R)}(M) = \mathcal{P}_{(O_1,R_1)}(M)$. Ἄρα: $G\supseteq(P)$ (6). Ἀλλὰ $(4),(6) \Longrightarrow G=(P)$. Ἤτοι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις πρὸς δύο κύκλους εἶναι ἡ εὐθεῖα (P).

Ἡ εὐθεῖα (P) ὀνομάζεται **Ριζικὸς Ἄξων** τῶν δύο κύκλων.

4-3.2 Παρατηρήσεις

① Ἂν οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι δὲν ὑφίσταται σημεῖον εἰς πε-

περασμένην ἀπόστασιν ἀπό τό κέντρον μέ τήν αὐτήν δύναμιν πρός τούς δύο κύκλους.

② Ἐάν $R>R_1$, εἰς τόν τύπον (3) βλέπομεν ὅτι $I \in \omega O_1$. Ἤτοι ὁ ριζικός ἄξων εἶναι πλησιέστερος εἰς τόν μικρότερον κύκλον. Ἐξ ἄλλου ἡ ἀπόστασις τοῦ I ἀπό τό κέντρον τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, δίδεται ἀπό τόν τύπον: $\overline{OI} = \frac{R^2-R_1^2+\overline{OO_1}^2}{2\,\overline{OO_1}}$ (7). Ἡ ἀπόστασις τοῦ I ἀπό τόν μικρότερον κύκλον: $\overline{O_1I} = -\frac{R^2-R_1^2-\overline{OO_1}^2}{2\,\overline{OO_1}}$ (8).

③ Ἐάν οἱ κύκλοι δέν τέμνονται, τότε ὁ ριζικός ἄξων δέν τέμνει οὐδένα ἐξ αὐτῶν. Διότι ἐάν ἔτεμνε εἰς N ἕναν ἐξ αὐτῶν, ἡ δύναμις τοῦ N πρός τόν ἐν λόγῳ κύκλον θά ἦτο μηδέν ἐνῶ πρός τόν ἄλλον ὄχι μηδέν. Ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τάς (7) καί (8) καί τήν σχέσιν μεταξύ διακέτρου καί ἀκτίνων δυνάμεθα ἀλγεβρικῶς νά εὕρωμεν τήν θέσιν τοῦ I. Ἐάν οἱ κύκλοι τέμνωνται, ριζικός ἄξων εἶναι ἡ κοινή χορδή αὐτῶν.

④ Ὁ Γ. τόπος τῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο κύκλους ταυτίζονται πρός τόν ριζικόν ἄξονα αὐτῶν. Ὁ ριζικός ἄξων δύο κύκλων διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν ἐσωτερικῶν καί ἐξωτερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν. Ὁ Γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι τέμνουν ὀρθογωνίως (ἴδε 2 καί 4.4) δύο δοθείσας περιφερείας ταυτίζεται πρός τόν ριζικόν ἄξονα αὐτῶν. Διότι ἐάν (M,x) μία ἐξ αὐτῶν θά εἶναι:

$$\overline{OM}^2 = R^2 + x^2 \quad \text{καί} \quad \overline{O_1M}^2 = R_1^2 + x^2$$

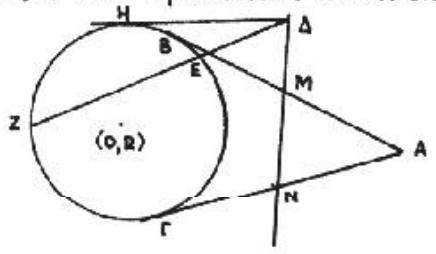
Ἄν ἀφαιρέσωμεν τάς δύο σχέσεις κατά μέλη θά ἔχωμεν:

$$\overline{OM}^2 - \overline{O_1M}^2 = R^2 - R_1^2 \implies \mathcal{P}_{(O)}(M) = \mathcal{P}_{(O_1)}(M)$$

Τό ἀντίστροφον εἶναι εὔκολον.

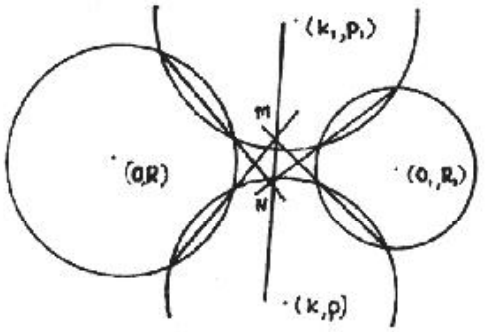
⑤ Ἄν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι $\overline{OI}=0$ ἤτοι ριζικός ἄξων εἶναι ἡ μεσοκάθετος ἐπί τήν διάκεντρον αὐτῶν. Ἔστω κύκλος (O,R) καί σημεῖον A ἐκτός αὐτοῦ, ἄν M,N τά μέσα τῶν ἐφαπτομένων AB καί AΓ, ἡ εὐθεῖα MN εἶναι ὁ ριζικός ἄξων τοῦ (O,R) καί τοῦ σημειακοῦ κύκλου A. Ἐάν λάβωμεν τυχόν σημεῖον Δ τῆς MN θά εἶναι:

$\overline{\Delta A}=\overline{\Delta H}$, $\overline{\Delta A}^2=\overline{\Delta E}\cdot\overline{\Delta Z}$, $\overline{\Delta A}^2=\overline{O\Delta}^2-R^2$



4-3.3 Κατασκευή τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων

Ἔστω οἱ κύκλοι (O,R) καί (O_1,R_1). Ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν δύναται νά κατασκευασθῆ ἄν εἶναι γνωστά δύο σημεῖα του.

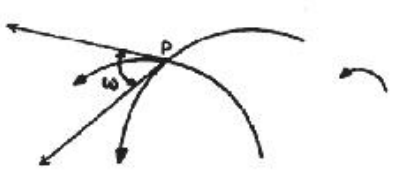


Θεωροῦμεν δύο τυχόντας κύκλους (κ,ρ) (κ_1,ρ_1). Ἐάν M τό σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν χορδῶν τῶν κύκλων $(O),(\kappa)$ καί $(O_1),(\kappa)$ καί N τό σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν χορδῶν τῶν κύκλων $(O),(\kappa_1)$ καί $(O_1),(\kappa_1)$ θά εἶναι $\mathcal{P}_{(O)}(M) = \mathcal{P}_{(\kappa)}(M) = \mathcal{P}_{(O_1)}(M)$ καί $\mathcal{P}_{(O)}(N) = \mathcal{P}_{(\kappa_1)}(N) = \mathcal{P}_{(O_1)}(N)$. Ἄρα ὁ ριζικός ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα MN

4-4 Κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως

4-4.1

Ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου θεωρήσωμεν τὰς καμπύλας c_1 καὶ c_2 τεμνομένας εἰς P. Ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων των εἰς τὸ σημεῖον P ὀνομάζεται γωνία τῶν c_1, c_2 εἰς τὸ σημεῖον P[1]. Ἐὰν $\omega = 1^L$ τότε θὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἐν λόγω καμπύλαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐὰν πρόκειται περὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τὸ δυνατὸν νὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα. Εὐκόλως ἀναγνωρίζεται, λόγω τῆς συμμετρίας ὅτι, ἐὰν τέμνονται ὀρθογωνίως εἰς τὸ ἓν σημεῖον, τότε θὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως καὶ εἰς τὸ ἕτερον σημεῖον τομῆς των (ἢ τὸ αὐτὸ ἐὰν τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν ω). θὰ λέγωμεν τότε ὅτι τέμνωνται ὀρθογωνίως (ἢ ὑπὸ γωνίαν ω).



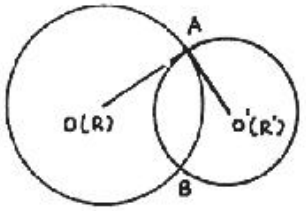
Προφανῶς εὐθεῖα τέμνουσα ὀρθογωνίως περιφέρειαν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τομῆς θὰ διέρχωνται διὰ τῶν κέντρων ἀλλήλων, καὶ ἀντιστρόφως εἰς τὰς δύο προτάσεις.

Συνθῆκαι ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως.

4-4.2 Θεώρημα

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο περιφέρειαι (O,R) καὶ (O', R') τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶναι $R^2+R'^2=\overline{OO'}^2$.

Ἀναγκαῖον. Ἐφ' ὅσον (O), (O') τέμνωνται ὀρθογωνίως $\hat{OAO'}=1^L$ καὶ συνεπῶς $R^2+R'^2=OO'^2$



Ἱκανόν. Ἔστω $R^2+R'^2=OO'^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (R-R')^2 < OO'^2 < (R+R')^2$ (ι) διότι $(\alpha-\beta)^2 < \alpha^2+\beta^2 < (\alpha+\beta)^2$ διὰ $\alpha,\beta>0$), καὶ ἐκ τῆς (ι)

$\Longrightarrow |R-R'| < OO' < R+R'$ ἤτοι αἱ κύκλοι τέμνονται καὶ ἐὰν A τὸ σημεῖον τομῆς των τὸ $\overset{\Delta}{OAO'}$ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἤτοι $OA \perp O'A$, OA ἐφαπτομένη τοῦ (O') εἰς A κ.λ.π.

4-4.3 Θεώρημα

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ (O) καὶ (O') τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶναι:

$$\mathfrak{P}_{O'}(O) = R^2 \quad \text{ἢ} \quad \mathfrak{P}_{O}(O') = R'^2$$

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολος.

4-4.4 Θεώρημα

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶναι: κάθε

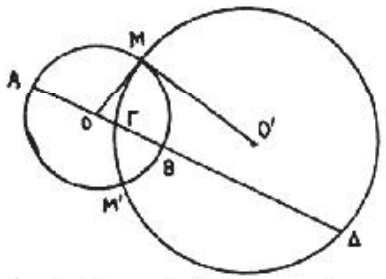
---

[1] Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι προσανατολισμένον καὶ ω, φ αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων εἰς P ὁρίζομεν ὡς γωνίαν τῶν δύο καμπύλων εἰς P τὴν $\min(\omega,\varphi)$.

διάμετρος τῆς μίας νά τέμνεται ἁρμονικῶς ἀπό τήν ἄλλην.

Ἀναγκαῖον. $OM^2 = \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta} \Longrightarrow OB^2 = \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}$ καί βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Newton τά A, B - Γ, Δ ἁρμονική τετράς.

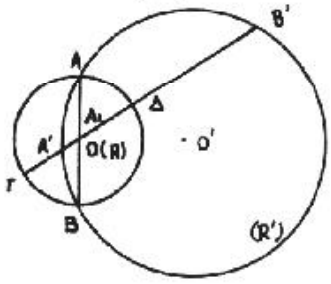
Ἱκανόν. Ἔστω A, B - Γ, Δ ἁρμονική τετράς. Θά εἶναι $OB^2 = OM^2 = \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta}$ ἤ $\mathcal{P}_{O'}(O) = R^2 \Longrightarrow OO'^2 - R'^2 = R^2$ κ.λ.π.



4-5 Κύκλοι τέμνοντες γεωδοορθογωνίως (ἤ κατά διάμετρον) δοθέντα κύκλον (O,R).

4-5.1 Ὁρισμός

Κύκλος (O',R') λέγομεν ὅτι τέμνει γεωδοορθογωνίως (ἤ κατά διάμετρον) δοθέντα κύκλον (O,R), ἄν $\mathcal{P}_{O'}(O) = -R^2$.



Εἶναι προφανές εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὅτι διάμετρος τοῦ (O) εἶναι χορδή τοῦ (O'). Ἐάν Γ, Δ μία διάμετρος τοῦ (O) καί A', B' τά σημεῖα τομῆς της μετά τῆς (O'), εὐκόλως δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι τά σημεῖα Γ, Δ - A_1, B', ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα, ὅπου A_1 τό συμμετρικόν τοῦ A' πρός O. Ἡ παρατήρησις αὐτή δύναται νά μᾶς βοηθήσῃ διά τήν ἀνεύρεσιν ἑκείνων τῶν κύκλων τοῦ συνόλου, οἱ ὁποῖοι διέρχονται διά δοθέντος σημείου (ἀποτελοῦν δέσμην).

4-6 Ριζικόν κέντρον τριῶν κύκλων

4-6.1

Θεωρήσωμεν τρεῖς κύκλους (O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3) τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν κεῖνται ἐπί εὐθείας. Θέτομεν (P_3) τόν ριζικόν ἄξονα τῶν (O_1), (O_2), (P_2) τόν ριζικόν ἄξονα τῶν (O_3), (O_1) καί (P_1) τόν ριζικόν ἄξονα τῶν (O_2), (O_3). Διά τό σημεῖον τομῆς M τῶν (P_1), (P_2) θά ἔχωμεν: $\mathcal{P}_{O_2}(M) = \mathcal{P}_{O_3}(M)$ (1) $\mathcal{P}_{O_1}(M) = \mathcal{P}_{O_3}(M)$ (2)

Ἤτοι: (1), (2) $\Longrightarrow \mathcal{P}_{O_1}(M) = \mathcal{P}_{O_2}(M) \Longrightarrow M \in (P_3)$. Ἄρα

Θεώρημα

Οἱ ριζικοί ἄξονες τριῶν κύκλων (τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας) διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου M.

Τό κοινόν σημεῖον τῶν τριῶν ριζικῶν ἀξόνων καλεῖται ρ ι ζ ι κ ὸ ν κ έ ν τ ρ ο ν αὐτῶν.

4-6.2 Ἐφαρμογαί

Νά κατασκευασθῇ τό ριζικόν κέντρον τοῦ κύκλου (O,R) καί δύο σημειακῶν κύκλων A καί B.

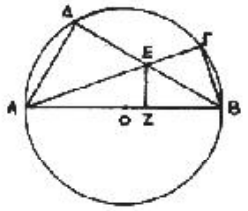
Ἐπίσης τό ριζικόν κέντρου τῶν κύκλων (O,R), (O_1,R_1) καί τοῦ σημειακοῦ κύκλου A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α΄.

485. Ἔστω περιφέρεια (Ο) διαμέτρου ΑΒ. Δύο χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $AE\cdot A\Gamma + BE\cdot B\Delta = AB^2$.

Ἀπόδειξις:



Φέρομεν τὴν $EZ \perp AB$. $A\hat{\Delta}E = A\hat{Z}E = 1^L \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ ΑΔΕΖ ἐγγράψιμον (1).

Ὁμοίως ΒΓΕΖ ἐγγράψιμον (2).

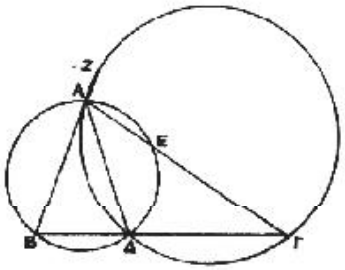
(1) $\Longrightarrow BE\cdot B\Delta = BZ\cdot BA$ (3).

(2) $\Longrightarrow AE\cdot A\Gamma = AZ\cdot AB$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow AE\cdot A\Gamma + BE\cdot B\Delta = AB^2$.

486. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος. Αἱ περιφέρειαι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $BZ = \Gamma E$.

Ἀπόδειξις:



$\mathcal{D}_{A\Delta\Gamma}(B) = B\Delta\cdot B\Gamma = BZ\cdot BA$ (1).

$\mathcal{D}_{AB\Delta}(\Gamma) = \Gamma\Delta\cdot\Gamma B = \Gamma E\cdot\Gamma A$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}\cdot\frac{BZ}{\Gamma E}$ (3).

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου εἰς $A\hat{B}\Gamma$: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$ (4).

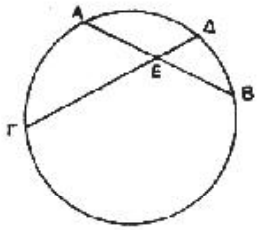
(3), (4) $\Longrightarrow BZ = \Gamma E$.

Παρατηρήσεις:

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $BZ = \frac{\alpha^2}{\beta+\delta}$.

487. Δίδεται περιφέρεια καὶ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι εἰς Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $AB^2 - \Gamma\Delta^2 = (AE - EB)^2 - (\Gamma E - E\Delta)^2$.

Ἀπόδειξις:



Ἐὰν τὸ Ε ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἡ ἀπόδειξις εἶναι προφανής.

Ὑποθέτομεν λοιπὸν ὅτι τὸ Ε εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἔχομεν $AB^2 - \Gamma\Delta^2 =$
$= (AE+EB)^2 - (\Gamma E+E\Delta)^2 = AE^2 + EB^2 + 2AE\cdot EB - \Gamma E^2 - E\Delta^2 -$
$- 2\Gamma E\cdot E\Delta = AE^2 + EB^2 - 2AE\cdot EB - (\Gamma E^2 + E\Delta^2 - 2\Gamma E\cdot E\Delta) =$
$= (AE-EB)^2 - (\Gamma E - E\Delta)^2$.

488. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $2\alpha^2 = \theta^2 + \gamma^2$. Ἐὰν Κ τὸ κέντρον βάρους

αὐτοῦ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : α) Αἱ περιφέρειαι περὶ τὰ $A\hat{K}B$, $A\hat{K}\Gamma$ ἐφάπτονται τῆς ΒΓ. β) Τὸ τετράπλευρον ΒΗΚΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (Η τὸ ὀρθόκεντρον).

Ἀπόδειξις:

α) Θεώρημα διαμέσων εἰς $A\hat{B}\Gamma$: $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ (1). Ἡ σχέσις (1) διὰ τῆς ὑποθέσεως γίνεται : $2\alpha^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 3\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \mu_\alpha \cdot \frac{\mu_\alpha}{3}$ (2). Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἡ σχέσις (2) γράφεται $MB^2 = M\Gamma^2 = MK \cdot MA$ ἤτοι οἱ κύκλοι περὶ τὰ $A\hat{K}B$, $A\hat{K}\Gamma$ ἐφάπτονται τῆς ΒΓ εἰς Β καὶ Γ ἀντιστοίχως.

β) $B\hat{H}\Gamma = 2^L - \hat{A}$ (3) διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους. $K\hat{B}\Gamma = B\hat{A}K, K\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}K$ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης. Ἄρα $B\hat{K}\Gamma = 2^L - (K\hat{B}\Gamma + K\hat{\Gamma}B) = 2^L - \hat{A}$ (4). (3), (4) $\Rightarrow B\hat{H}\Gamma = B\hat{K}\Gamma \Rightarrow$ ΒΗΚΓ ἐγγράψιμον.

489. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ τυχὸν σημεῖον Ε τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Θεωρήσωμεν τοὺς κύκλους περὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΕΔ. Ἔστω Ε' τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς των. Δείξατε ὅτι ἡ ΕΕ' διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου. Εἶναι $\mathcal{D}_{AE\Gamma}(O) = OA \cdot O\Gamma$ (1), $\mathcal{D}_{BE\Delta}(O) = OB \cdot O\Delta$ (2). Ἀλλὰ προφανῶς $OA \cdot O\Gamma = OB \cdot O\Delta$. Ἄρα $\mathcal{D}_{AE\Gamma}(O) = \mathcal{D}_{BE\Delta}(O)$, ἤτοι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων καὶ συνεπῶς εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν ΕΕ'.

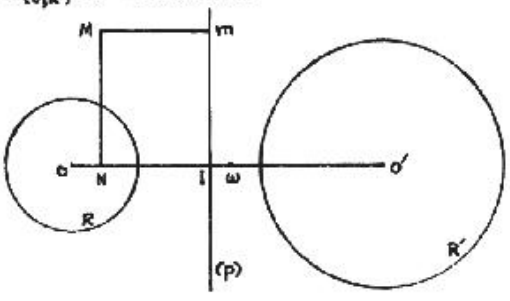
Παρατήρησις:

Ἀντὶ τετραγώνου δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐνταῦθα Ο θὰ θέωμεν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του.

490. Δίδονται δύο κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') καὶ ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των. Ἐὰν εἶναι m ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (ρ) τῶν δύο κύκλων νὰ δειχθῇ ὁ τύπος τοῦ Casey:

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(M) - \mathcal{D}_{(O',R')}(M) = 2\overline{OO'} \cdot \overline{mM}.$$

Ἀπόδειξις:



$\mathcal{D}_O(N) - \mathcal{D}_{O'}(N) = OM^2 - R^2 - (O'M^2 - R'^2) =$
$= (OM^2 - O'M^2) - (R^2 - R'^2)$ (1).

$O\hat{M}O' \Rightarrow OM^2 - O'M^2 = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{\omega N}$ (2).

Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας περὶ ριζικοῦ ἄξονος $R^2 - R'^2 = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{\omega I}$ (3).

(1), (2), (3) $\Rightarrow \mathcal{D}_O(M) - \mathcal{D}_{O'}(M) =$
$= 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{\omega N} - 2\overline{OO'} \cdot \overline{\omega I} = 2 \cdot \overline{OO'} [\overline{\omega N} - \overline{\omega I}] =$
$= 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{IN} = 2 \cdot \overline{OO'} \cdot \overline{mM}$.

Ἐὰν θέωμεν $f(M) = \mathcal{D}_{(O,R)}(M) - \mathcal{D}_{(O',R')}(M)$ καὶ $[(\rho),O]$, $[(\rho),O']$ τὰ ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα (ρ) καὶ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα O, O' (μὴ συμπεριλαμβανομένης ἐπ' αὐτῶν τῆς εὐθείας (ρ)) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα, διὰ $R < R'$

$$f(M) \lessgtr 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} M \in [(p), O] \\ M \in (p) \\ M \in [(p), O']. \end{cases}$$

491. Εἰς τυχόν τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ καὶ ΒΕ τὰ ὕψη. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $AB^2 = AE \cdot A\Gamma + B\Delta \cdot B\Gamma$.

Ἀπόδειξις:

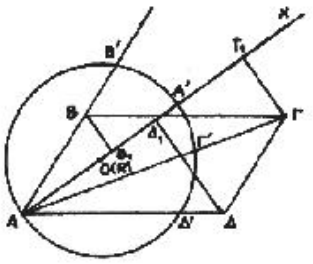
Ἔστω ΓΖ τὸ τρίτον ὕψος καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον. Ἀπὸ τὸ ἐγγράψιμον $BZE\Gamma \Longrightarrow AZ \cdot AB = AE \cdot A\Gamma$ (1). Ὁμοίως $BZ \cdot AB = B\Delta \cdot B\Gamma$ (2).

Προστίθενται αἱ (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Παρατηρήσατε ἀκόμη ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐκ τῶν Α καὶ Β ἀγομένων ἐφαπτομένων εἰς τὴν περιφέρειαν περὶ τὸ ΓΕΗΔ.

492. Περιφέρεια κύκλου διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς Β′ καὶ Δ′ καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς Γ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι $A\Gamma \cdot A\Gamma' = AB \cdot AB' + A\Delta \cdot A\Delta'$.

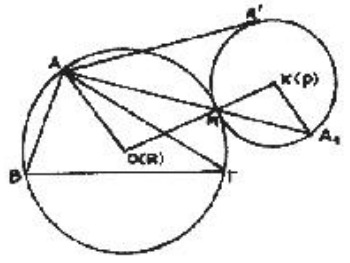
Ἀπόδειξις:



Θεωροῦμεν τὴν διάμετρον Αx τοῦ κύκλου καὶ ἐπ' αὐτὴν προβάλλομεν τὰ σημεῖα B, Γ, Δ εἰς τὰ σημεῖα B_1, Γ_1, Δ_1 ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου $BB_1A'B' \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \cdot AB' = AB_1 \cdot 2R$ (1) ($2R = AA'$). Ὁμοίως $A\Delta \cdot A\Delta' = A\Delta_1 \cdot 2R$ (2) καὶ $A\Gamma \cdot A\Gamma' = A\Gamma_1 \cdot 2R$ (3). Ἀρκεῖ τὰ δείξωμεν ὅτι $A\Gamma_1 = AB_1 + A\Delta_1$. Τοῦτο ὅμως εἶναι προφανὲς διότι $AB_1 = \Delta_1\Gamma_1$.

493. Ἐὰν κύκλος (κ) ἐφάπτεται τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ εἰς σημεῖον Μ καὶ $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ αἱ ἐκ τῶν Α, Β, Γ ἐφαπτόμεναι τοῦ (κ) νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BM} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma M}$.

Ἀπόδειξις:



Εἶναι $\frac{AA'^2}{AM^2} = \frac{AM \cdot AA_1}{AM^2} = \frac{AA_1}{AM}$ (1).

Ἐκ τῶν $\overset{\triangle}{AOM} \sim \overset{\triangle}{A_1KM}$ ἔχομεν $\frac{AA_1}{AM} = \frac{OK}{OM}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{AA'}{AM} = \sqrt{1 + \frac{\rho}{R}}$.

494. Ἔστω $I_\beta M, I_\gamma N$ αἱ ἐφαπτόμεναι ἐκ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τῶν $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ εἰς τὸν περιγεγραμμένον κύκλον. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{I_\beta M^2}{I_\gamma N^2} = \frac{\rho_\beta}{\rho_\gamma}$.

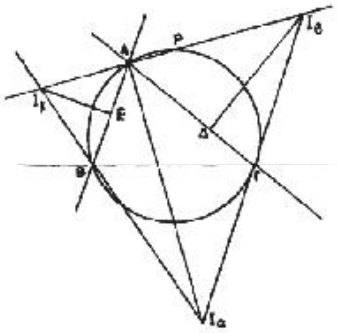
Ἀπόδειξις:

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ εἶναι ὁ κύκλος Euler τοῦ $I_\alpha\overset{\triangle}{I_\beta I_\gamma}$

(διότι $\hat{AB\Gamma}$ εἶναι τὸ ὀρθικὸν τοῦ $\hat{I_\alpha I_\beta I_\gamma}$). Ἄρα λοιπὸν τὸ P εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $I_\beta I_\gamma$. Θὰ ἔχωμεν $I_\beta M^2 = I_\beta P \cdot I_\beta A$ (1) $I_\gamma N^2 = I_\gamma A \cdot I_\gamma P$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow \frac{I_\beta M^2}{I_\beta N^2} = \frac{I_\beta A}{I_\gamma A}$ (3).

Ἔστω Δ,Ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων $(I_\beta),(I_\gamma)$ ἐπὶ τῶν ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Τὰ $\hat{A\Delta I_\beta}$, $\hat{AEI_\gamma}$ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\frac{\rho_\beta}{\rho_\gamma} = \frac{I_\beta A}{I_\gamma A}$ (4). Τέλος ἐκ τῶν (3),(4) ἔχομεν τὸ ζητούμενον.



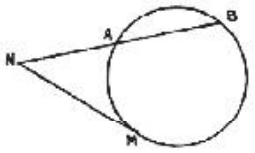
495. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖον Μ ἑνὸς κύκλου τέμνει χορδὴν ΑΒ προεκτεινομένην εἰς σημεῖον Ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{NA}{NB}$.

Ἀπόδειξις:

$N\hat{A}M \sim N\hat{M}B \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{MN} \Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = \frac{NA^2}{MN^2}$ (1).

Ἀλλὰ $MN^2 = NA \cdot NB$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = \frac{NA^2}{NA \cdot NB} = \frac{NA}{NB}$.

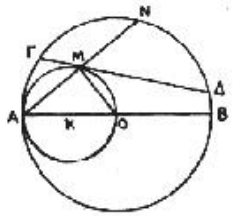


496. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτῆς. Μὲ διάμετρον ΑΟ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν καὶ φέρομεν χορδὴν ΓΔ τῆς πρώτης ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ τῆς δευτέρας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $MA^2 = M\Gamma \cdot M\Delta$.

Ἀπόδειξις:

$OM \perp AM \Rightarrow AM = MN$.

$\mathfrak{P}_O(M) = MA \cdot MN = MA^2 = M\Gamma \cdot M\Delta$.



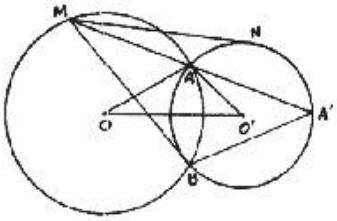
497. Δύο περιφέρειαι (Ο) καὶ (Ο′) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ∈(Ο) φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΜΝ τῆς (Ο′). Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{MN^2}{MA \cdot MB} = \frac{OO'}{OA}$.

Ἀπόδειξις:

$(B\hat{M}A = A\hat{O}O') \wedge (B\hat{A}'A = A\hat{O}'O) \Rightarrow$

$\Rightarrow M\hat{B}A' \sim O\hat{A}O' \Rightarrow \frac{MA'}{MB} = \frac{OO'}{OA} \Rightarrow \frac{MA \cdot MA'}{MA \cdot MB} =$

$= \frac{OO'}{OA} \Rightarrow \frac{MN^2}{MA \cdot MB} = \frac{OO'}{OA}$.

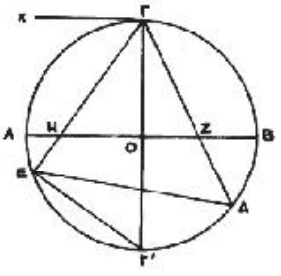


498. Δίδεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Ἔστω ΔΕ τυχοῦσα χορδὴ καὶ ΟΓ ἡ κάθετος ἀκτὶς ἐπὶ τὴν ΑΒ. Φέρομεν τὰς ΓΔ καὶ ΓΕ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ α) τὸ τετράπλευρον ΖΔΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (Κ,ρ) β) $\Gamma K^2 = 2R^2 + \rho^2$.

Ἀπόδειξις:

α) Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην Γx. Θά ἔχωμεν $x\hat{\Gamma}H = Z\hat{\Delta}E$ (1) καὶ $x\hat{\Gamma}H = \Gamma\hat{H}O$ (2) (ἐντὸς ἐναλλάξ).

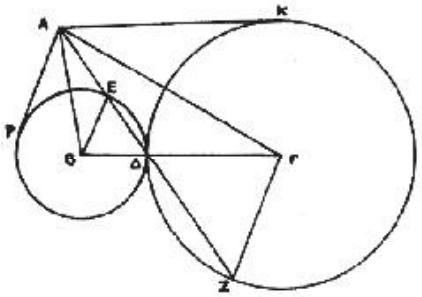
(1), (2) $\Rightarrow \Gamma\hat{H}Z = Z\hat{\Delta}E \Rightarrow$ ΔΕΗΖ ἐγγράψιμον.



(β) Ἀμέσως προκύπτει ὅτι καὶ τὸ ΗΟΓ'Ε εἶναι ἐγγράψιμον καὶ θά ἔχωμεν $\mathfrak{P}_K(\Gamma) = \Gamma K^2 - \rho^2 = \Gamma H \cdot \Gamma E = \Gamma O \cdot \Gamma\Gamma' = 2R^2$.

499. Διά τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τάς ἐφαπτομένας ΑΡ καὶ ΑΚ εἰς τούς κύκλους (Β, ΒΑ), (Γ, ΓΔ) ὅπου ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς Â. Νά δειχθῇ ὅτι $A\Delta^2 = AP \cdot AK$.

Ἀπόδειξις:

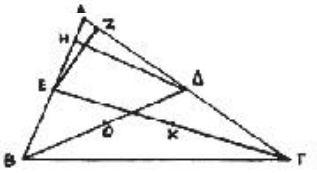


Τά τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι $B\hat{A}E = \Gamma\hat{A}E$, καθ' ὅσον ἡ ΑΔ διχοτόμος τῆς Â. Ἐπίσης $A\hat{E}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ διότι τό τρίγωνον ΕΒΔ εἶναι ἰσοσκελές καὶ αἱ $A\hat{E}B$, $A\hat{\Delta}\Gamma$ παραπληρωματικαί τῶν παρά τήν βάσιν γωνιῶν. Συνεπῶς θά ἔχωμεν $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AE}{A\Delta}$ (1). Ὁμοίως $A\hat{B}\Delta \sim A\hat{\Gamma}Z \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AZ}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow A\Delta^2 = AE \cdot AZ$ (3). Ἀλλά $AP^2 = AE \cdot A\Delta$ (4) καὶ $AK^2 = A\Delta \cdot AZ$ (5). (4), (5) $\Rightarrow AP^2 \cdot AK^2 = A\Delta^2 \cdot AE \cdot AZ$ (6). (3), (6) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP^2 \cdot AK^2 = A\Delta^4 \Rightarrow AP \cdot AK = A\Delta^2$.

500. Μέ διαμέτρους τάς διαμέσους ΒΔ καὶ ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν περιφερείας. Θά δείξωμεν ὅτι ἡ κοινή χορδή αὐτῶν διέρχεται διά τοῦ Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΒΓ.

Ἀπόδειξις:

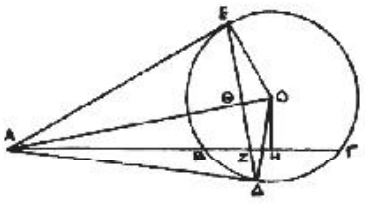


Αἱ περιφέρειαι $(O, \frac{B\Delta}{2})$, $(K, \frac{\Gamma E}{2})$ τέμνουν τάς πλευράς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Μεταξύ των τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Σ, Τ καθόσον περιέχουν ἀμφότερα τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ὡς ἐσωτερικόν σημεῖον. Τό τετράπλευρον ΕΗΖΔ εἶναι ἐγγράψιμον ἄρα $AH \cdot AE = AZ \cdot A\Delta$ $AH \cdot 2AE = AZ \cdot 2A\Delta \Rightarrow AH \cdot AB = AZ \cdot A\Gamma$. Δηλαδή τό σημεῖον Α ἔχει τήν αὐτήν δύναμιν πρός τούς δύο κύκλους ἤτοι θά κεῖται ἐπί τῆς κοινῆς χορδῆς των.

Ἡ κοινή χορδή ἀκόμη, ὡς γνωστόν, εἶναι κάθετος ἐπί τήν διάκεντρον ΟΚ τῶν δύο κύκλων. Ἀλλά προφανῶς $OK \parallel B\Gamma$.

501. Ἐπί εὐθείας xx' δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Διά τῶν Β, Γ διέρχεται τυχούσα περιφέρεια. Φέρομεν τάς ἐφαπτομένας ΑΔ καὶ ΑΕ. Ἂν Ζ τό σημεῖον τομῆς τῆς ΔΕ μετά τῆς ΒΓ, νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος ΑΖ συναρτήσει τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετράς Α, Ζ - Β, Γ εἶναι ἁρμονική.

Λύσις:



Φέρομεν τήν $OH \perp B\Gamma$ καί τήν OA. Τό τετράπλευρον $OHZ\Theta$ εἶναι ἐγγράψιμον καί συνεπῶς $AZ \cdot AH = A\Theta \cdot AO$ (1). Ἀπό $\overset{\Delta}{OEA}$: $A\Theta \cdot AO = AE^2$ (2). Ἀλλά $AE^2 = AB \cdot A\Gamma$ (3). Ἄρα (1),(2),(3) $\Longrightarrow AZ \cdot AH = AB \cdot A\Gamma = \alpha(\alpha+\beta) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow AZ = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\frac{\beta}{2}}$.

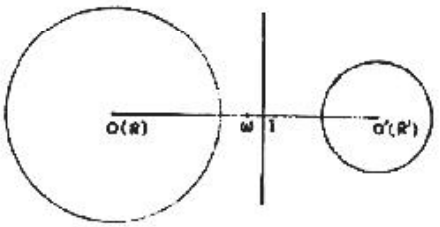
Διά νά ἀποδείξωμεν ὅτι τά σημεῖα $A, Z - B, \Gamma$ ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἰσχύει τό θεώρημα τοῦ Newton. Ἤτοι ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $HB^2 = HZ \cdot HA$ (4). Εἶναι $HB = \frac{\beta}{2}$, $HZ = \alpha+\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\frac{\beta}{2}}$, $HA = \alpha+\frac{\beta}{2}$. Ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις εἰς τήν (4).

502. Ἔστωσαν οἱ κύκλοι (O,R) καί (O',R') μέ διάκεντρον $OO' = d$ καί I τό ἴχνος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἐπί τῆς διακέντρου. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{IO}{IO'} = -\frac{d^2+R^2-R'^2}{d^2-R^2+R'^2}$. Ἀντιστρόφως,

Ἀπόδειξις:

Εἶναι $\frac{IO}{IO'} = -\frac{\frac{d}{2}+I\omega}{\frac{d}{2}-I\omega}$ (1). Ὡς γνωστόν $I\omega = \frac{R^2-R'^2}{2d}$ (2) $(R > R')$.

(1),(2) $\Longrightarrow \frac{IO}{IO'} = -\frac{\frac{d}{2}+\frac{R^2-R'^2}{2d}}{\frac{d}{2}-\frac{R^2-R'^2}{2d}} =$ $= -\frac{d^2-R'^2+R^2}{d^2+R'^2-R^2}$.



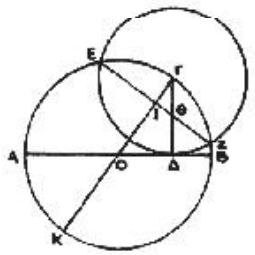
Τό ἀντίστροφον, δηλαδή ὅτι ἡ εὐθεῖα Δ ἡ κάθετος εἰς τό I ἐκ τοῦ δεδομένου τύπου εἶναι ριζικός ἄξων τῶν $(O),(O')$ ἀποδεικνύεται διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς εὐκόλως.

503. Δίδεται περιφέρεια (O) διαμέτρου AB καί $\Gamma\Delta$ ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου αὐτῆς ἀπό τήν AB. Ἡ περιφέρεια $(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνει τήν (O) εἰς E καί Z. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ EZ διχοτομεῖ τήν $\Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τήν διάμετρον τοῦ (O) τήν διερχομένην διά τοῦ Γ.

Ἀπό τό ἐγγράψιμον $\Delta\Theta I O$ θά ἔχωμεν $\Gamma\Theta \cdot \Gamma\Delta = \Gamma I \cdot \Gamma O = \Gamma I \cdot \frac{\Gamma K}{2} = \frac{\Gamma E^2}{2} =$ $= \frac{\Gamma\Delta^2}{2}$. Ἤτοι $2\Gamma\Theta = \Gamma\Delta$.



504. Δίδεται περιφέρεια (O) καί διάμετρος $B\Gamma$ αὐτῆς. Ἔστω $A\Delta$ ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου A τῆς περιφερείας ἀπό τήν $B\Gamma$. Ἡ περιφέρεια διαμέτρου $A\Delta$ τέμνει τάς $AB, A\Gamma$ εἰς E καί Z τήν (O) εἰς H. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ EZ, AH τέμνονται ἐπί τῆς $B\Gamma$.

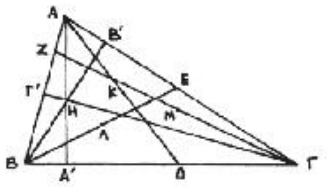
Ἀπόδειξις:

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τό τετράπλευρον $BEZ\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (διότι $AE \cdot AB = A\Delta^2 = AZ \cdot A\Gamma$). Ἐάν ἤδη λάβωμεν τόν κύκλον περί τό $BEZ\Gamma$, τόν κύκλον διαμέτρου $A\Delta$ καί τόν (O) διαπιστώνομεν ὅτι αἱ $B\Gamma, EZ, AH$ ὡς κοιναί χορδαί αὐτῶν ἀνά δύο διέρχονται

διά τοῦ ριζικοῦ κέντρου τῶν τριῶν κύκλων.

505. Ἐπί τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ, E, Z. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ριζικόν κέντρον τῶν κύκλων πού γράφονται μέ διαμέτρους $A\Delta, BE, \Gamma Z$ εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ $AB\Gamma$.

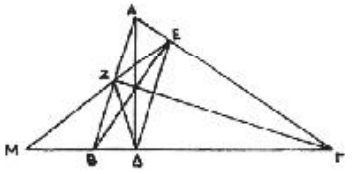
Ἀπόδειξις:



Ἐάν K, Λ, M τά κέντρα τῶν κύκλων μέ διαμέτρους $A\Delta, BE, \Gamma Z$ εἶναι $\mathcal{D}_K(H) = \mathcal{D}_\Lambda(H) = \mathcal{D}_M(H)$ διότι $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = H\Gamma \cdot H\Gamma'$.

506. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καί $A\Delta, BE, \Gamma Z$ τά ὕψη αὐτοῦ. Ἔστω $M = EZ \cap B\Gamma$, $N = \Delta Z \cap A\Gamma$, $P = \Delta E \cap AB$. Νά δειχθῇ ὅτι τά σημεῖα M, N, P κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:



Τό $BZE\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμον καί συνεπῶς $MB \cdot M\Gamma = MZ \cdot ME$ (1).

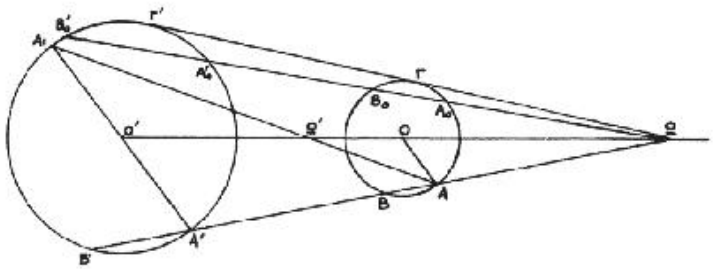
Ἀλλά $\mathcal{D}_{AB\Gamma}(M) = MB \cdot M\Gamma$ (2) καί $\mathcal{D}_{AEZ}(M) = MZ \cdot ME$ (3). Ἐκ τῶν (1), (2), (3) $\Longrightarrow \mathcal{D}_{AB\Gamma}(M) = \mathcal{D}_{AEZ}(M)$. Ἤτοι αἱ δυνάμεις τοῦ M πρός τόν περιγεγραμμένον κύκλον περί τό $AB\Gamma$ καί πρός τόν κύκλον Euler εἶναι ἴσαι. Ἄρα τό M κεῖται ἐπί τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων. Ὁμοίως διά τό N καί τό P.

Παρατήρησις:

Συγχρόνως ἀπεδείχθη ὅτι τά σημεῖα τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τριγώνου (ΔEZ) μετά τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

507. Ἔστω οἱ κύκλοι $(O, R), (O', R')$ καί $OA, O'A'$ δύο παράλληλοι καί ὁμόρροποι ἀκτῖνες αὐτῶν. Ἡ εὐθεῖα AA' τέμνει τήν διάκεντρον OO' εἰς Ω καί τούς κύκλους (O) καί (O') εἰς τά σημεῖα (δεύτερα σημεῖα τομῆς) B καί B'. Νά δειχθῇ ὅτι $\overline{\Omega A} \cdot \overline{\Omega B'} = \overline{\Omega B} \cdot \overline{\Omega A'}$.

Ἀπόδειξις:



Εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν ὅτι ὅταν μεταβάλλεται ἡ διεύθυνσις τῶν OA, OA' τό σημεῖον Ω παραμένει πάντοτε τό ἴδιον (σταθερόν). Διότι $\frac{OA}{O'A'} = \frac{O\Omega}{O'\Omega} \Longrightarrow \frac{O\Omega}{O'\Omega} = \frac{R}{R'} \Longrightarrow \Omega$ σταθερόν.

Ἀντιστρόφως· ἐάν διά τοῦ Ω φέρωμεν τέμνουσαν ΩA καί λάβωμεν τό A' ὥστε $\frac{\Omega A}{\Omega A'} = \frac{R}{R'}$ τότε $A' \in (O')$.

Το σημεῖον Ω ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.**

Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες $OA, O'A'$ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι ἰσχύουν τὰ ἴδια ἀκριβῶς διὰ τὸ σημεῖον Ω', τὸ ὁποῖον θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.**

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας, ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη διὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ κέντρου ὁμοιοθεσίας.

Θὰ ἔχωμεν $\mathcal{P}_O(\Omega) = \overline{\Omega A}\cdot\overline{\Omega B}$ (1). Ἀλλὰ καὶ $\frac{\overline{\Omega A'}}{\overline{OA}} = \frac{R'}{R}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow \overline{\Omega B}\cdot\overline{\Omega A'} = \lambda^2\frac{R'}{R}$ (3). Ὁμοίως $\overline{\Omega B'}\cdot\overline{\Omega A} = \lambda'^2\frac{R}{R'}$ (4) (λ,λ' τὰ μήκη τῶν ἐκ τοῦ Ω ἐφαπτομένων $\Omega\Gamma, \Omega\Gamma'$). Εἶναι ὅμως $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{R}{R'}$ (5) $\Longrightarrow \lambda^2\frac{R'}{R} = \lambda'^2\frac{R}{R'}$. Ἄρα $\overline{\Omega B}\cdot\overline{\Omega A'} = \overline{\Omega B'}\cdot\overline{\Omega A} = \lambda^2\frac{R'}{R} = \lambda'^2\frac{R}{R'} = \lambda\cdot\lambda'$.

Τὰ σημεῖα A, A' ὅπως καὶ τὰ B, B' καλοῦνται **ὁμόλογα**, ἐνῶ τὰ B, A' ὅπως καὶ τὰ A, B' **ἀντιόμολογα.**

Σημειώσεις:

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν ἐνδιεφερόμεθα μόνον διὰ τὴν λύσιν του ἀλλὰ βασικῶς διὰ τὴν περιγραφὴν ἑνὸς σημαντικοῦ θέματος τῆς γεωμετρίας. Εἰς τὸ ἐν λόγῳ θέμα θὰ ἐπανέλθωμεν κατὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς ἀντιστροφῆς καὶ ὁμοιοθεσίας.

Ἐξ ἄλλου δύναται ἡ ἰδία ἐργασία νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς. Διὰ τοῦ Ω φέρομεν τέμνουσαν εἰς $A_0, B_0 - A_0', B_0'$ (ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα). Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τὰ $AA_0B_0'B'$, $BB_0A_0'A'$ εἶναι ἐγγράψιμα (μόνον μὲ γωνίας) κ.τ.λ.

508. Ἐὰν οἱ κύκλοι $(O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3)$ ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα (ἀποτελοῦν δέσμην κύκλων) τότε ὁ λόγος τῶν δυνάμεων τυχόντος σημείου τοῦ ἑνὸς κύκλου πρὸς τοὺς ἄλλους δύο κύκλους εἶναι σταθερός.

Ἀπόδειξις:

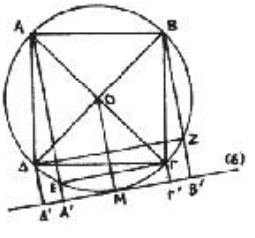
Προφανῶς τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (π). Ἔστω Ι τὸ ἴχνος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ἐπὶ τὴν (π). Ἐὰν $M\in(O_1)$ καὶ MN ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα θὰ ἔχωμεν (Ἄσκ. 490) $\mathcal{P}_{O_2}(M) - \mathcal{P}_{O_1}(M) = 2\cdot\overline{O_2O_1}\cdot\overline{NM} \Longrightarrow \mathcal{P}_{O_2}(M) = 2\cdot\overline{O_2O_1}\cdot\overline{NM}$ (1) καὶ $\mathcal{P}_{O_3}(M) - \mathcal{P}_{O_1}(M) = 2\cdot\overline{O_3O_1}\cdot\overline{NM} \Longrightarrow \mathcal{P}_{O_3}(M) = 2\cdot\overline{O_3O_1}\cdot\overline{NM}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow \frac{\mathcal{P}_{O_2}(M)}{\mathcal{P}_{O_3}(M)} = \frac{\overline{O_2O_1}}{\overline{O_3O_1}}$.

509. Τετράγωνον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον (O,R). Ἐπὶ τυχούσης ἐφαπτομένης (ε) τοῦ κύκλου προβάλλομεν τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ τοῦ τετραγώνου εἰς τὰ σημεῖα A', B', Γ', Δ' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AA'\cdot\Gamma\Gamma' + BB'\cdot\Delta\Delta' = R^2$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν Ε καὶ Ζ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν AA' καὶ BB' μετὰ τῆς περιφερείας. Τὰ $A'E\Gamma\Gamma'$, $\Delta'\Delta ZB'$ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνια καὶ $\Gamma\Gamma' = EA'$, $\Delta\Delta' = ZB'$ ἄρα $AA'\cdot\Gamma\Gamma' + BB'\cdot\Delta\Delta' = A'E\cdot A'A + B'Z\cdot BB' = A'M^2 + B'M^2 = \frac{E\Gamma^2}{4} + \frac{\Delta Z^2}{4}$ (1). Ἀλλὰ $\overset{\frown}{AE\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta ZB}$, διότι $E\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{B}Z$ (ἔχουσαι πλευ-



ράς καθέτους). Άρα $\Delta Z = AE$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow AA'\cdot\Gamma\Gamma' + BB'\cdot\Delta\Delta' = \frac{E\Gamma^2}{4} + \frac{AE^2}{4} = R^2$.

510. Δίδεται εύθύγραμμον τμῆμα AB καὶ σημεῖον P ἐκτὸς αὐτοῦ θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A', B' ἀπὸ τὴν σχέσιν $\overline{PA'}\cdot\overline{PA} = K^2$, $\overline{PB'}\cdot\overline{PB} = K^2$, ὅπου K δοθὲν εύθύγραμμον τμῆμα. Νὰ δειχθῇ ὅτι $A'B' = \frac{K^2}{PA\cdot PB}AB$ (1).

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) νὰ λυθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Δίδεται τετράγωνον ABΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) καὶ σημεῖον P τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν A', B', Γ', Δ' τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν PA, PB, PΓ, PΔ μετὰ τῆς περιφερείας ἀντιστοίχως, τότε; $A'B'\cdot\Gamma'\Delta' = A'\Delta'\cdot B'\Gamma'$.

Ἀπόδειξις:

$\overline{PA'}\cdot\overline{PA} = \overline{PB'}\cdot\overline{PB} \Longrightarrow \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \Longrightarrow A\hat{P}B \sim B'\hat{P}A'$ (2), δεδομένου ὅτι καὶ $\hat{P}$ κοινή.

(2) $\Longrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PB} = \frac{PA\cdot PA'}{PA\cdot PB} = \frac{K^2}{PA\cdot PB} \Longrightarrow A'B' = \frac{K^2}{PA\cdot PB}AB$.

Ἐφαρμογή:

Θέτομεν $\mathcal{D}_O(P) = K^2$, ὁπότε $A'B' = \frac{K^2}{PA\cdot PB}AB$, $\Gamma'\Delta' = \frac{K^2}{P\Gamma\cdot P\Delta}\Gamma\Delta$ καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη ἔχομεν $A'B'\cdot\Gamma'\Delta' = \frac{K^4\cdot a^2}{PA\cdot PB\cdot P\Gamma\cdot P\Delta}$, ὅπου $AB = a$. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὸ $A'\Delta'\cdot B'\Gamma'$.

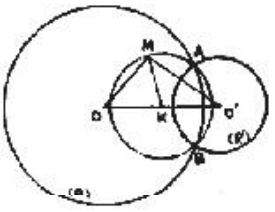
511. Δύο κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἔστω K τὸ μέσον τῆς OO'. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τυχόντος σημείου M τοῦ κύκλου (K,KA) ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (O,R) καὶ (O',R') εἶναι μηδέν.

Ἀπόδειξις:

$\mathcal{D}_O(M) + \mathcal{D}_{O'}(M) = OM^2 + O'M^2 = (R^2 + R'^2)$ (1).

Τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων διὰ τὸ $O\hat{M}O'$ μᾶς δίδει τὴν σχέσιν $OM^2 + O'M^2 = 2\cdot KM^2 + \frac{OO'^2}{2}$ (2). Τὸ ἴδιο θεώρημα εἰς τρίγωνο OAO' δίδει $OA^2 + O'A^2 = 2KA^2 + \frac{OO'^2}{2}$ (3).

Ἀλλὰ $KM = KA$, ἀπὸ τὰς (2),(3) ἔχομεν $OM^2 + O'M^2 = OA^2 + O'A^2 = R^2 + R'^2$ (4). Τέλος ἐκ τῶν (1),(4) $\Longrightarrow \mathcal{D}_O(M) + \mathcal{D}_{O'}(M) = 0$.



Παρατηρήσεις:

α) Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον M ὥστε $\mathcal{D}_O(M) + \mathcal{D}_{O'}(M) = 0$ κεῖται ἐπὶ τοῦ (K,KA). Ἔστω ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων πρὸς τοὺς (O,R),(O',R') εἶναι μηδέν εἶναι ὁ κύκλος (K,KA).

β) Ἂν οἱ κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') τέμνωνται ὀρθογωνίως τότε ὁ (K,KA) ἔχει διάμετρον OO'.

512. Τὸ τετράπλευρον ABΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (O,R) καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον (I,ρ). Νὰ δειχθῇ

α) $\frac{1}{IA^2} + \frac{1}{I\Gamma^2} = \frac{1}{\rho^2}$.

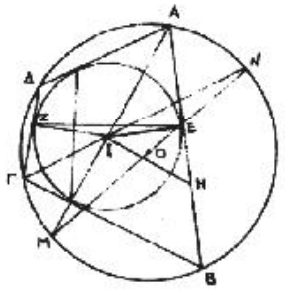
β) $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{\rho^2}$ ὅπου $d = IO$.

Ἀπόδειξις:

α) $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2^L \Longrightarrow A\hat{I}E+\Gamma\hat{I}Z=1^L$. Φέρομεν τὴν $IH\perp A\Gamma$. Εἶναι $\overset{\frown}{IEH}=\overset{\frown}{IZ\Gamma} \Longrightarrow I\Gamma=IH$. Εἰς τὸ $A\hat{I}H$: $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{\rho^2}$, ἄρα $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{I\Gamma^2}=\frac{1}{\rho^2}$.

β) Αἱ $AI,\Gamma I$ τέμνουν τὴν περιφέρειαν (O) εἰς σημεῖα M,N ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα. Λαμβάνομεν τὴν δύναμιν τοῦ I πρὸς (O). $R^2-d^2=IA\cdot IM=I\Gamma\cdot IN \Longrightarrow$
$\Longrightarrow IM^2+IN^2=\frac{(R^2-d^2)^2}{IA^2}+\frac{(R^2-d^2)^2}{I\Gamma^2}=(R^2-d^2)^2\cdot\frac{1}{\rho^2}$ (1).
Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου εἰς τὸ $\overset{\frown}{MIN}$ ἔχομεν $IM^2+IN^2=2(R^2+d^2)$ (2).

$(1),(2) \Longrightarrow 2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2\cdot\frac{1}{\rho^2} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (R+d)^2+(R-d)^2=(R^2-d^2)^2\cdot\frac{1}{\rho^2} \Longrightarrow \frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{\rho^2}$.

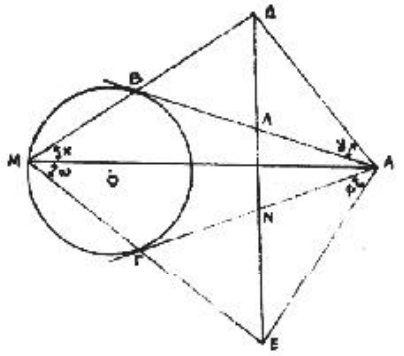


ΟΜΑΣ Β'.

513. Δίδεται κύκλος (O) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας AB καὶ AΓ ἐκ τοῦ A πρὸς τὸν κύκλον (O). Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Αἱ MB καὶ MΓ τέμνουν τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν μέσων τῶν AB, AΓ εἰς Δ καὶ E. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον MΔAE εἶναι ἐγγράψιμον.

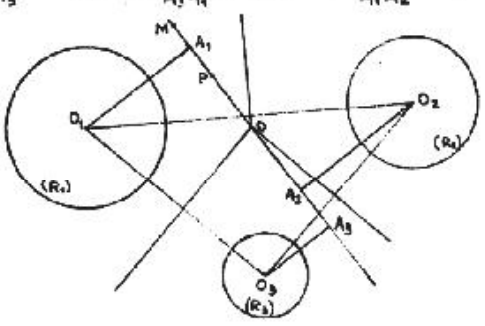
Ἀπόδειξις:

Ἔστω Λ,N τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων AB καὶ AΓ. Ἡ εὐθεῖα NΛ εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τοῦ κύκλου (O) καὶ τοῦ σημειακοῦ κύκλου A. Ἄρα $A\Delta^2=\Delta B\cdot\Delta M$. Ἤτοι ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\frown}{ABM}$ ἐφάπτεται εἰς τὸ A τῆς ΔA. Ὅθεν $\hat{x}=\hat{y}$. Ὁμοίως $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$. Ἀλλὰ $B\hat{O}\Gamma+B\hat{A}\Gamma=2^L$ ἢ $2(\hat{x}+\hat{\omega})+B\hat{A}\Gamma=2^L$ ἢ $\hat{x}+\hat{\omega}+\hat{y}+\hat{\varphi}+B\hat{A}\Gamma=2^L$.



514. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$. Ἔστω O τὸ ριζικὸν κέντρον αὐτῶν καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Τὰ σημεῖα O_1,O_2,O_3 προβάλλονται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OM εἰς τὰ σημεῖα A_1,A_2,A_3 ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\Delta o_1(M)-\Delta o_2(M)}{A_2A_3}=\frac{\Delta o_3(M)-\Delta o_1(M)}{A_3A_1}=\frac{\Delta o_1(M)-\Delta o_3(M)}{A_1A_2}$.

Ἀπόδειξις:



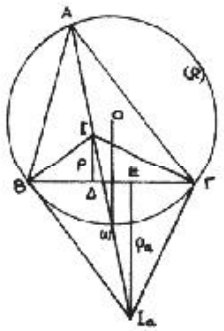
$\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_1}(O) = \overline{O_1M}^2 - R_1^2 - (\overline{OO_1}^2 - R_1^2) = \overline{O_1M}^2 - \overline{OO_1}^2$ (1)

$2^{\text{ον}}$ θεώρημα διαμέσων διά τό $\overset{\Delta}{MO_1O}$: $\overline{O_1M}^2 - \overline{OB_1}^2 = 2\cdot\overline{MO}\cdot\overline{PA_1}$, όπου P τό μέσον τού εύθυγράμμου τμήματος OM, όπότε ή (1) γίνεται $\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_1}(O) = 2\cdot\overline{MO}\cdot\overline{PA_1}$ (2). Όμοίως έχομεν $\mathcal{D}_{O_2}(M) - \mathcal{D}_{O_2}(O) = 2\cdot\overline{MO}\cdot\overline{PA_2}$ (3).

Άφαιρούμεν τάς σχέσεις (2) καί (3) κατά μέλη. $\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_2}(M) = 2\cdot\overline{MO}\cdot(\overline{PA_1} - \overline{PA_2}) = 2\cdot\overline{OM}\cdot\overline{A_1A_2}$ ή $\dfrac{\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_2}(M)}{\overline{A_1A_2}} = 2\cdot\overline{OM}$.

515. Διά τό τρίγωνον ΑΒΓ νά άποδειχθούν οί τύποι τού Euler : α) $\overline{IO}^2 = R^2 - 2Rr$ β) $\overline{OI_a}^2 = R^2 + 2Rr_a$ (ίδέ 11.7). Ένθα O τό κέντρον τής περιγεγραμμένης περιφερείας, I τό κέντρον τής έγγεγραμμένης καί I_a τής παρεγγεγραμμένης περιφερείας. R, r, r_a αί άκτίνες τών έν λόγω περιφερειών άντιστοίχως.

Άπόδειξις :

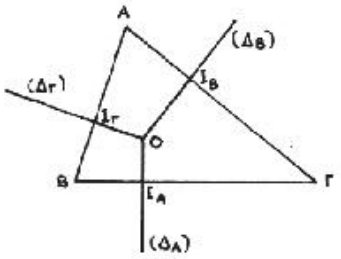


Τό τετράπλευρον $BI\Gamma I_a$ είναι έγγεγραμμένον εἰς κύκλον ὁ ὁποῖος έχει κέντρον τό σημεῖον ω καί άκτίνα $\frac{II_a}{2}$. Ή εύθεία BΓ είναι ὁ ριζικός άξων τών κύκλων (O, R) καί $(\omega, \frac{II_a}{2})$. Έφαρμόζομεν διά τό σημεῖον I τόν τύπον διαφοράς δυνάμεως διά τούς άνωτέρω κύκλους (ίδε άσκ. 490). Θά έχωμεν $\Delta_O(I) - \Delta_\omega(I) = 2\cdot\overline{O\omega}\cdot\overline{\Delta I}$ (1). Άλλά $\Delta_O(I) = \overline{IO}^2 - R^2$, $\Delta_\omega(I) = 0$. Άρα ὁ τύπος (1) γίνεται $\overline{IO}^2 - R^2 = -2Rr \Rightarrow \overline{IO}^2 = R^2 - 2Rr$.

Έάν ή ίδια έργασία έπαναληφθῆ διά τό σημεῖον I_a θά προκύψῃ ὁ τύπος β). Πράγματι $\Delta_O(I_a) - \Delta_\omega(I_a) = 2\cdot\overline{O\omega}\cdot\overline{EI_a} \Rightarrow \overline{OI_a}^2 - R^2 = 2R\cdot r_a$.

516. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον O έντός αὐτοῦ. Έκ τοῦ O φέρομεν τάς καθέτους (Δ_A), (Δ_B), (Δ_Γ) έπί τών πλευρών BΓ, ΓA, AB άντιστοίχως. Νά δειχθῆ ὅτι κατ' άπείρους τρόπους δυνάμεθα νά έκλέξωμεν τούς κύκλους (A, R_A), (B, R_B), (Γ, R_Γ) ὥστε τό O νά είναι ριζικόν κέντρον τών έν λόγω κύκλων.

Άπόδειξις :

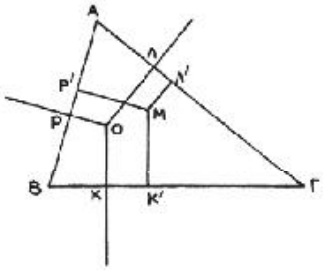


Θέτομεν $\dfrac{\overline{I_AB}}{\overline{I_A\Gamma}} = -\dfrac{\mu}{\nu}$, $\dfrac{\overline{I_B\Gamma}}{\overline{I_BA}} = -\dfrac{\mu'}{\nu'}$. Έκ τής άσκ. 502 έχομεν $\dfrac{\mu}{\nu} = \dfrac{a^2 - R_\Gamma^2 + R_B^2}{a^2 + R_\Gamma^2 - R_B^2} \Rightarrow R_B^2 - R_\Gamma^2 = \dfrac{\mu-\nu}{\mu+\nu}a^2$ (1). Έργαζόμενοι όμοίως $R_\Gamma^2 - R_A^2 = \dfrac{\mu'-\nu'}{\mu'+\nu'}\beta^2$ (2).

Έκ τών (1), (2) βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νά έκλέξωμεν κατ' άπείρους τρόπους τά R_A, R_B, R_Γ ὥστε τό O νά είναι τό ριζικόν κέντρον τών (A, R_A), (B, R_B), (Γ, R_Γ).

517. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί δύο σημεῖα O καί M τοῦ έπιπέδου. Τό σημεῖον O προβάλλεται έπί τών πλευρών BΓ, ΓA, AB εἰς τά σημεῖα κ, λ, ρ άντιστοίχως, ένῶ τό M προβάλλεται κατά τόν ίδιο τρόπο εἰς τά κ', λ', ρ'. Νά δειχθῆ ὅτι $\overline{\kappa\kappa'}\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{\lambda\lambda'}\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{\rho\rho'}\cdot\overline{AB} = 0$.

Απόδειξις:



Η λύσις βάσει του προηγουμένου προβλήματος. Θεωρούμεν τους τρεις κύκλους $(A, R_A), (B, R_B), (\Gamma, R_\Gamma)$ με ριζικόν κέντρον το O. Χρησιμοποιούμεν τον τύπον διαφοράς δυνάμεων (Άσκ. 490). Θά έχωμεν:

$$\mathcal{D}_B(M) - \mathcal{D}_\Gamma(M) = 2\cdot\overline{B\Gamma}\cdot\overline{KK'} \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_\Gamma(M) - \mathcal{D}_A(M) = 2\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Lambda\Lambda'} \quad (2)$$

$$\mathcal{D}_A(M) - \mathcal{D}_B(M) = 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PP'} \quad (3).$$

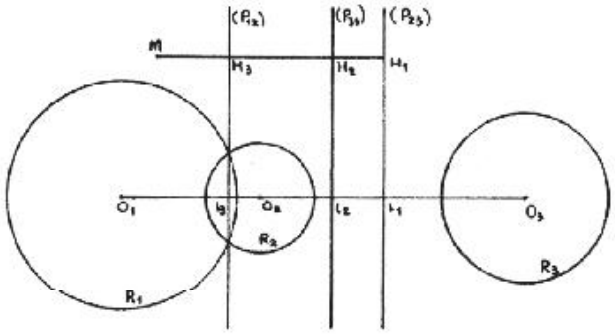
Η πρόσθεσις κατά μέλη δίδει το ζητούμενον.

Σημείωσις:

Έχομεν το ζητούμενον άμέσως διά πολλαπλασιασμού έσωτερικώς του $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0$ έπί $\overline{OM}$.

518. Δίδονται τρεις κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ των οποίων τά κέντρα κείνται έπ' ευθείας. Έστωσαν $(P_{12}), (P_{23}), (P_{31})$ οί ριζικοί άξονες αυτών ($P_{\kappa\lambda}$ ο ριζικός άξων των $(O_\kappa), (O_\lambda)$) με ίχνη έπί της διακέντρου αντιστοίχως l_3, l_1, l_2. Θά δείξωμεν ότι διά πάν σημείον M του επιπέδου ή συνάρτησις $f(M) = \overline{O_2O_3}\,\mathcal{D}_{O_1}(M) + \overline{O_3O_1}\,\mathcal{D}_{O_2}(M) + \overline{O_1O_2}\,\mathcal{D}_{O_3}(M)$ διατηρεί σταθεράν τιμήν.

Απόδειξις:



Έστω M σημείον του επιπέδου και H_1, H_2, H_3 αί προβολαί αυτού επί των ριζικών αξόνων $(P_{23}), (P_{31}), (P_{12})$ αντιστοίχως.

Ως γνωστόν έχομεν $\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_2}(M) = 2\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{H_3M}$ (1), $\mathcal{D}_{O_1}(M) - \mathcal{D}_{O_3}(M) = 2\cdot\overline{O_1O_3}\cdot\overline{H_2M}$ (2).

$$(1),(2) \Longrightarrow \frac{\mathcal{D}_{O_1}(M)-\mathcal{D}_{O_2}(M)}{2\cdot\overline{O_1O_2}} - \frac{\mathcal{D}_{O_1}(M)-\mathcal{D}_{O_3}(M)}{2\cdot\overline{O_1O_3}} = \overline{H_3M} - \overline{H_2M} = \overline{l_3l_2} \quad (3).$$

$$(3) \Longrightarrow \mathcal{D}_{O_1}(M)\left(\overline{O_1O_3} - \overline{O_1O_2}\right) - \overline{O_1O_3}\,\mathcal{D}_{O_2}(M) + \overline{O_1O_2}\,\mathcal{D}_{O_3}(M) = 2\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{l_2l_3}\cdot\overline{O_3O_1}$$

ή $f(M) = \overline{O_2O_3}\,\mathcal{D}_{O_1}(M) + \overline{O_3O_1}\,\mathcal{D}_{O_2}(M) + \overline{O_1O_2}\,\mathcal{D}_{O_3}(M) = 2\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{l_2l_3}\cdot\overline{O_3O_1} = C^{\text{τρ}}$ (4).

519. Επί του προβλήματος 518.

α) Αποδείξατε το θεώρημα του Stewart θεωρούντες τους σημειακούς κύκλους O_1, O_2, O_3.

β) Ίνα οί κύκλοι $(O_1), (O_2), (O_3)$ άνήκουν εις την αυτήν δέσμην πρέπει και άρκεί $f(M) = 0$.

γ) Να δειχθή ότι $\frac{\overline{O_2O_3}}{\overline{l_2l_3}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{l_3l_1}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{l_1l_2}}$.

Απόδειξις:

α) Θέτομεν $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Θά είναι και $\overline{l_3l_2} = \frac{1}{2}\overline{O_3O_2}$, $\mathcal{D}_{O_i}(M) = MO_i^2$. Ο τύπος (4) Άσκ. 518 θά γίνη

$$\overline{O_2O_3}\cdot\overline{MO_1}^2+\overline{O_3O_1}\cdot\overline{MO_2}^2+\overline{O_1O_2}\cdot\overline{MO_3}^2+\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3}\cdot\overline{O_3O_1}=0$$

δηλαδή ὁ τύπος τοῦ Stewart.

β) Ἀναγκαῖον.

Ἂν οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$ ἀποτελοῦν δέσμην οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονές ταυτίζονται, ὡσεπῶς $\overline{l_3l_2}=0$, ὅπου $\varphi(M)=0$ ἤτοι

$$O_1O_2\cdot\mathcal{D}_{O_3}(M)+\overline{O_2O_3}\,\mathcal{D}_{O_1}(M)+\overline{O_3O_1}\,\mathcal{D}_{O_2}(M)=0 \quad (1).$$

Ἱκανόν.

Ἔστω ὅτι $\varphi(M)=0$, δηλαδὴ ἰσχύει ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1). Λαμβάνομεν $M\in(O_3)$, ὅτε $\mathcal{D}_{O_3}(M)=0$. Ἄρα $p\cdot\overline{O_2O_3}+q\cdot\overline{O_3O_1}=0$ ($p=\mathcal{D}_{O_1}(M), q=\mathcal{D}_{O_2}(M)$) ἤτοι τὰ O_1,O_2,O_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀλλὰ ἐκ τῆς $\varphi(M)=0$ συμπεραίνομεν ἀκόμη ὅτι $\overline{l_\lambda l_\mu}=0$ $(\lambda\neq\mu)$. Ἄρα οἱ κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$ ἀποτελοῦν δέσμην.

γ) Ἐκ τοῦ τύπου $\frac{1}{2}\varphi(M)=\overline{O_1O_2}\cdot\overline{l_2l_3}\cdot\overline{O_3O_1}$ ἔχομεν διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς $\overline{O_1O_2}\cdot\overline{l_2l_3}\cdot\overline{O_3O_1}=\overline{O_2O_3}\cdot\overline{l_3l_1}\cdot\overline{O_1O_2}=\overline{O_3O_1}\cdot\overline{l_1l_2}\cdot\overline{O_2O_3}$ ἢ $\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{l_1l_2}}=\frac{\overline{O_2O_3}}{\overline{l_2l_3}}=\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{l_3l_1}}$.

Εἰς αὐτὸ τὸ μέρος δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἀνεξάρτητον ἀπόδειξιν ὡς ἑξῆς: $\mathcal{D}_{O_1}(M)-\mathcal{D}_{O_2}(M)=2\cdot\overline{O_1O_2}\cdot\overline{H_3M}$ (1) (Ἄσκ. 490)

$$\mathcal{D}_{O_2}(M)-\mathcal{D}_{O_3}(M)=2\cdot\overline{O_2O_3}\cdot\overline{H_1M} \quad (2)$$

$$\mathcal{D}_{O_3}(M)-\mathcal{D}_{O_1}(M)=2\cdot\overline{O_3O_1}\cdot\overline{H_2M} \quad (3).$$

$(1),(2),(3)\Longrightarrow \overline{O_1O_2}\cdot\overline{H_3M}+\overline{O_2O_3}\cdot\overline{H_1M}+\overline{O_3O_1}\cdot\overline{H_2M}=0$ (4). Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν καὶ $\overline{O_1O_2}+\overline{O_2O_3}+\overline{O_3O_1}=0$ (5).

Ἐφαρμόσομεν σταυροειδῆ πολλαπλασιασμὸν εἰς τὰς σχέσεις (4),(5) καὶ λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον.

520. Ἔστω κύκλος (O,R) καὶ σημεῖα A,B,Γ ἐπ' εὐθείας, θὰ δείξωμεν ὅτι $\overline{B\Gamma}\cdot\Delta_O(A)+\overline{\Gamma A}\cdot\Delta_O(B)+\overline{AB}\cdot\Delta_O(\Gamma)+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}=0$.

Ἀπόδειξις:

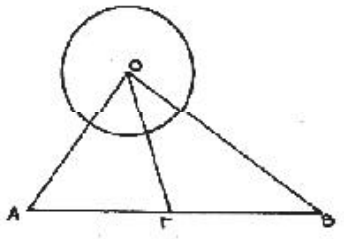
Εἰς τὸ $\hat{AOB}$ διὰ τὸ σημεῖον Γ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ Stewart:

$$\overline{OA}^2\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{OB}^2\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{O\Gamma}^2\cdot\overline{AB}+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}=0 \quad (1).$$

Ἀλλὰ $\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}+\overline{AB}=0\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow(\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}+\overline{AB})R^2=0 \quad (2).$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.



521. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ τὰ σημεῖα A καὶ B τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Συναρτήσει τῶν $\Delta_O(A)$, $\Delta_O(B)$ καὶ τοῦ λόγου $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ ἐκφράσωμεν τὴν δύναμιν τοῦ σημείου P.

Λύσις:

$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\alpha}{\beta}\Longrightarrow\overline{AP}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{AB}$, $\overline{PB}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}$ (1). Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ προηγουμένου προβλήματος διὰ τὰ σημεῖα A,P,B. Θὰ ἔχωμεν

$$\overline{AP}\cdot\Delta_O(B)+\overline{PB}\,\Delta_O(A)+\overline{BA}\cdot\Delta_O(P)+\overline{AP}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{BA}=0 \quad (2).$$

$$(1),(2)\Longrightarrow \Delta_O(P)=\frac{1}{\alpha+\beta}\left[\alpha\,\Delta_O(B)+\beta\,\Delta_O(A)-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2\right].$$

Παρατηρήσεις:

Ἐὰν τὸ σημεῖον A εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου καὶ τὸ σημεῖον B ἐξωτερικόν τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB ἔχει ἓν ἀκριβῶς ση-

μεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ (O). Διότι ἀρκεῖ νά ἐκλεχθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ ὥστε $\Delta_o(P)=0$ ἤ $\alpha\Delta_o(B)+\beta\Delta_o(A)-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2=0$ ἤ $(\frac{\alpha}{\beta})^2\Delta_o(B)+[\Delta_o(A)+\Delta_o(B)-\overline{AB}^2]\frac{\alpha}{\beta}+\Delta_o(A)=0$ (3). Δεδομένου ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι θετική καί $\rho_1\rho_2=\frac{\Delta_o(A)}{\Delta_o(B)}$ ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς ἑτεροσήμους. Ἤτοι ὑπάρχει μία ἀκριβῶς θετική τιμή τοῦ λόγου $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\alpha}{\beta}$ διά τήν ὁποίαν $\Delta_o(P)=0$. Τό ἕτερον σημεῖον τομῆς εἶναι ἐκτός τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB. Δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν ἐκ τῆς (3) ὅτι τό ἐν λόγῳ σημεῖον τομῆς θά περιέχεται εἰς τήν ἡμιευθείαν (P,A).

522. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου βάρους G τριγώνου ΑΒΓ πρός τόν περιγεγραμμένον κύκλον εἶναι ἴση πρός $-\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Ἀπόδειξις:

Τό πρόβλημα εἶναι ἁπλῆ ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz, ὁ ὁποῖος γράφεται $AM^2+BM^2+\Gamma M^2=3GM^2+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$. Ἐάν θέσωμεν $O\equiv M$ θά γίνῃ $3R^2=3GO^2+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$ ἤ $\Delta_o(G)=GO^2-R^2=-\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν μίαν ἐνδιαφέρουσαν λύσιν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τῆς Ἀσκ. 520.

Ἔστω M τό μέσον τῆς ΒΓ. Διά τά σημεῖα A, G, M καί τόν περιγεγραμμένον κύκλον (O) περί τό $\hat{AB\Gamma}$ ὁ ἐν λόγῳ τύπος γίνεται:

$$\overline{AG}\cdot\Delta_o(M)+\overline{GM}\cdot\Delta_o(A)+\overline{MA}\cdot\Delta_o(G)+\overline{AG}\cdot\overline{GM}\cdot\overline{MA}=0.$$

Ἀλλά $\Delta_o(A)=0$ καί συνεπῶς θά ἔχωμεν

$$-\frac{2}{3}\mu_a\frac{\alpha^2}{4}-\mu_a\Delta_o(G)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\mu_a^3=0$$

ἤ μετά τήν ἀντικατάστασιν τοῦ μ_a $\Delta_o(G)=-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{9}$.

523. Ἔστω τριγώνου ΑΒΓ καί Φ τό σύνολον τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα δίδονται ἀπό τήν σχέσιν $AM^2+BM^2+\Gamma M^2=\kappa^2$ (κ δοθέν). Ὡς γνωστόν (ἰδέ σ. τόπους) τό σύνολον Φ εἶναι περιφέρεια κέντρου G καί ἀκτῖνος $\frac{\sqrt{3\kappa^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}{3}$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις ἑνός τυχόντος σημείου P τοῦ ἐπιπέδου πρός τόν ἐν λόγῳ κύκλον εἶναι $\frac{AP^2+BP^2+\Gamma P^2-\kappa^2}{3}$.

Ἀπόδειξις:

$$\Delta_G(P)=GP^2-\frac{3\kappa^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9}=\frac{9GP^2-3\kappa^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{9}\quad(1).$$

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz ἔχομεν ὡς γνωστόν $3(AP^2+BP^2+\Gamma P^2)=9GP^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (2).

Ἐκ τῶν (1), (2) $\Longrightarrow \Delta_G(P)=\frac{AP^2+BP^2+\Gamma P^2-\kappa^2}{3}$.

Γενίκευσις:

Δίδονται τά σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$ καί Φ τό σύνολον τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα δίδονται ἀπό τήν σχέσιν $a_1A_1M^2+a_2A_2M^2+\dots+a_\nu A_\nu M^2=\kappa^2$ ὅπου $a=a_1+a_2+\dots+a_\nu\neq 0$. Ὡς γνωστόν τό σύνολον Φ εἶναι περιφέρεια μέ κέντρον τό κέντρον βάρους G τοῦ συστήματος $A_1(a_1), A_2(a_2), \dots, A_\nu(a_\nu)$ καί ἀκτῖνα δεδομένη ἀπό τόν τύπον τοῦ Leibnitz. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις τυχόντος σημείου P πρός τόν κύκλον Φ δίδεται ἀπό τήν σχέσιν $\Delta_G(P)=\frac{1}{a}(\Sigma a_i\overline{PA_i}^2-\kappa^2)$.

Ἀπόδειξις:

Ὁ τύπος τοῦ Leibnitz εἶναι $\Sigma a_i MA_i^2=a\overline{GM}^2+\Sigma a_i\overline{GA_i}^2$ (3).

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύκλος Φ ἔχει ἀκτῖνα R_Φ, $R_\Phi^2=\frac{1}{a}(\kappa^2-\Sigma a_i\overline{GA_i}^2)$.

Άρα $\Delta_6(P) = \overline{GP}^2 - \frac{1}{a}(\kappa^2 - \Sigma a_i \overline{GA_i}^2) = \frac{1}{a}(a\overline{GP}^2 - \kappa^2 + \Sigma a_i \overline{GA_i}^2)$ (4).

Εάν εἰς τὸν τύπον (3) θέσωμεν ὅπου M τὸ P θὰ ἔχωμεν $a\overline{GP}^2 = \Sigma a_i \overline{PA_i}^2 - \Sigma a_i \overline{GA_i}^2$ (5).

Τέλος ἐκ τῶν (4), (5) $\Rightarrow \Delta_6(P) = \frac{1}{a}(\Sigma a_i PA_i^2 - \kappa^2)$.

524. Εὐθεία (ε) συναντᾶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ρ, Λ, Μ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\overline{PB}\cdot\overline{P\Gamma}}{\overline{PA}\cdot\overline{PM}} + \frac{\overline{\Lambda\Gamma}\cdot\overline{\Lambda A}}{\overline{\Lambda M}\cdot\overline{\Lambda P}} + \frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{\overline{MP}\cdot\overline{MA}} = 1$.

Ἀπόδειξις:

Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς Ἀσκ. 520 διὰ τὰ σημεῖα Ρ, Λ, Μ καὶ τὸν περιγεγραμμένο κύκλο (ο) περὶ τὸ $\hat{AB\Gamma}$:

$\overline{P\Lambda}\cdot\Delta_o(M) + \overline{\Lambda M}\cdot\Delta_o(P) + \overline{MP}\cdot\Delta_o(\Lambda) + \overline{P\Lambda}\cdot\overline{\Lambda M}\cdot\overline{MP} = 0$ (1).

Ἀλλὰ $\Delta_o(M) = \overline{MA}\cdot\overline{MB}$, $\Delta_o(P) = \overline{P\Gamma}\cdot\overline{PB}$, $\Delta_o(\Lambda) = \overline{\Lambda A}\cdot\overline{\Lambda\Gamma}$. Ἀντικαθίστανται εἰς τὸν τύπον (1) καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

525. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖα Α καὶ Β. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος τοῦ (ο) ἔστω εἰς σημεῖον Γ. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς Γ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς Ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\Delta_o(A)}{\Delta_o(B)}$.

Ἀπόδειξις:

Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς Ἀσκ. 521 διὰ τὰ σημεῖα Ρ, Α, Β καὶ τὸν κύκλον (ο). θὰ ἔχωμεν $\overline{PA}\cdot\Delta_o(B) + \overline{AB}\cdot\Delta_o(P) + \overline{BP}\cdot\Delta_o(A) + \overline{PA}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP} = 0$ (1). Ἀλλὰ $\Delta_o(P) = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\overline{PA}\cdot\Delta_o(B) + \overline{BP}\,\Delta_o(A) = 0 \Longrightarrow$ $\Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\Delta_o(A)}{\Delta_o(B)}$.

526. Δοθέντων τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ δύο ἀριθμῶν $p \neq 0, q \neq 0$ θὰ δείξωμεν α) ὅτι ὑπάρχει ἄπειρία κύκλων (Ο, R) τοιούτων ὥστε:

$$\frac{\Delta_{(O,R)}(A)}{p} = \frac{\Delta_{(O,R)}(B)}{q} \quad (1).$$

β) Ὑπάρχει σημεῖον Ι τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς ὅλους αὐτοὺς τοὺς κύκλους.

Ἀπόδειξις:

α) Λαμβάνομεν ἓν ζεῦγος εὐθυγράμμων τμημάτων x, y ὥστε

$$|x-y| \leqslant AB \leqslant x+y \quad (2).$$

Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (Α, x), (Β, y) καὶ ἔστω Ο κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Ὁ κύκλος (Ο, R) ὅπου R ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\frac{x^2-R^2}{p} = \frac{y^2-R^2}{q}$ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν (1). Ἡ ἐξίσωσις (2) λοιπὸν μᾶς λέγει ὅτι ὑπάρχει ἄπειρία κύκλων οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν (1).

β) Χωρίζομεν τὴν ΑΒ διὰ τοῦ σημείου Ι εἰς λόγον $\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}} = -\frac{p}{q} \Longrightarrow$ $\Rightarrow \overline{BI}\cdot\Delta_o(A) + \overline{IA}\cdot\Delta_o(B) = 0$ (3).

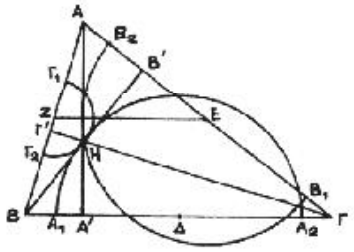
Διὰ τυχόντα κύκλον (O_1, R) τοῦ συνόλου ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ἀσκ. 520. Ὅθεν $\overline{BI}\cdot\Delta_{o_1}(A) + \overline{IA}\cdot\Delta_{o_1}(B) + \overline{AB}\cdot\Delta_{o_1}(I) + \overline{BI}\cdot\overline{IA}\cdot\overline{AB} = 0$ (4).

(3), (4) $\Rightarrow \Delta_{o_1}(I) = \overline{IA}\cdot\overline{IB}$

527. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Ἐὰν θέσωμεν $(A_1, A_2) = B\Gamma \cap (\Delta, \Delta H)$,

$(B_1,B_2) = \Gamma A \cap (E,EH)$ καὶ $(\Gamma_1,\Gamma_2) = AB \cap (Z,ZH)$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἓξ σημεῖα $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ εἶναι ὁμοκυκλικά.

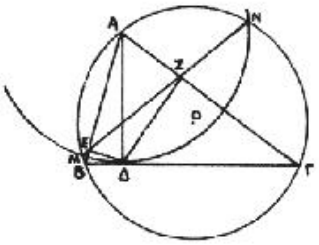
Ἀπόδειξις:



Φέρομεν τὴν διάκεντρον EZ τῶν κύκλων $(E,EH), (Z,ZH)$. Εἶναι $EZ \perp AA'$ (ω_a). Ἄρα ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν δύο κύκλων κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους διὰ τοῦ A. Συνεπῶς $A\Gamma_1 \cdot A\Gamma_2 = AB_2 \cdot AB_1$. Ἤτοι $\Gamma_1, \Gamma_2, B_1, B_2$ ὁμοκυκλικά. Ὁμοίως $\Gamma_1, \Gamma_2, A_1, A_2$ ὁμοκυκλικά καὶ A_1, A_2, B_1, B_2 ὁμοκυκλικά. Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ κέντρον τῶν κύκλων καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι τὸ αὐτό, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου προκύπτει τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ τὰ ἓξ σημεῖα $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ εἶναι ὁμοκυκλικά.

528. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἄγεται τὸ ὕψος $A\Delta$. Μὲ κέντρον A καὶ ἀκτῖνα $A\Delta$ γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ $\hat{AB\Gamma}$ περιφέρειαν εἰς M καὶ N. Ἡ εὐθεῖα MN τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς E καὶ Z ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ΔE καὶ ΔZ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις:



Θὰ δείξωμεν ὅτι $\Delta Z \perp A\Gamma$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Z εὑρίσκεται εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν κύκλων (O,R), (A,ω_a), ἄρα $\Delta_{(O,R)}(Z) = \Delta_{(A,\omega_a)}(Z)$ ἢ $\overline{ZA}\cdot\overline{Z\Gamma} = \overline{ZA}^2 - \overline{A\Delta}^2 \Rightarrow \overline{A\Delta}^2 = \overline{ZA}(\overline{ZA}-\overline{Z\Gamma}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{A\Delta}^2 = \overline{AZ}\cdot\overline{A\Gamma} \Rightarrow A\hat{\Delta}Z = \hat{\Gamma} \Rightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 1^L \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta Z \perp A\Gamma$.

529. Δίδεται τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν (O) τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος $\mathfrak{M}_O(M) = -\dfrac{\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 a_3^2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3 a_1^2 + \bar{\varepsilon}_3\bar{\varepsilon}_1 a_2^2}{\bar{E}^2}$ ὅπου $\bar{E}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ τὰ προσημασμένα ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $A_1A_2A_3$, A_1A_2M, A_2A_3M, A_3A_1M ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις:

Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\bar{r}_M = \dfrac{\bar{\varepsilon}_1\bar{r}_{A_1} + \bar{\varepsilon}_2\bar{r}_{A_2} + \bar{\varepsilon}_3\bar{r}_{A_3}}{\bar{E}}$. Ὁ τύπος τοῦ Leipnitz εἶναι

$$m_1\overline{PA_1}^2 + m_2\overline{PA_2}^2 + m_3\overline{PA_3}^2 = m\overline{PG}^2 + \frac{1}{m}\left[m_1m_2a_3^2 + m_2m_3a_1^2 + m_3m_1a_2^2\right].$$

καὶ διὰ $G = M$ καὶ $P = O$ γίνεται $(\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_2+\bar{\varepsilon}_3)R^2 = \bar{E}\cdot\overline{OM}^2 + \frac{1}{\bar{E}}(\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2a_3^2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3a_1^2 + \bar{\varepsilon}_3\bar{\varepsilon}_1a_2^2)$ ἢ $\mathfrak{M}_O(M) = -\frac{1}{\bar{E}^2}(\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2a_3^2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\varepsilon}_3a_1^2 + \bar{\varepsilon}_3\bar{\varepsilon}_1a_2^2)$.

Σημειώσεις:

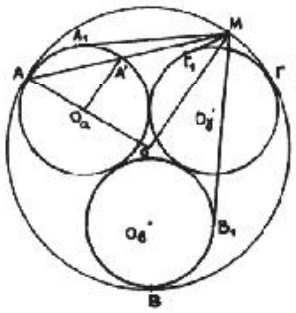
Εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι ἔχομεν ἀκόμη

$$\mathfrak{M}_O(M) = -\frac{1}{\bar{E}}(\bar{\varepsilon}_1\overline{A_1M}^2 + \bar{\varepsilon}_2\overline{A_2M}^2 + \bar{\varepsilon}_3\overline{A_3M}^2).$$

530. Τρεῖς κύκλοι $(O_\alpha,\rho), (O_\beta,\rho), (O_\gamma,\rho)$ ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς καὶ τοῦ κύκλου (O,R) ἅπαντες ἐσωτερικῶς, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ ἀντιστοίχως. Ἐὰν $M \in \hat{A\Gamma}$ καὶ $MA_1, MB_1, M\Gamma_1$ τὰ ἐκ τοῦ M ἐφαπτομενικὰ

τμήματα εἰς τοὺς $(O_\alpha), (O_\beta), (O_\gamma)$ τὰ δειχθῇ ὅτι $MB_1 = MA_1 + M\Gamma_1$.

Ἀπόδειξις:

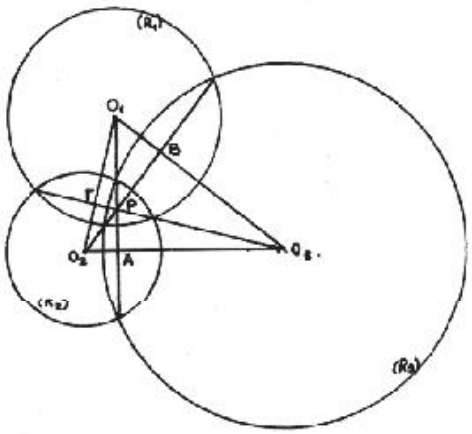


Ἐὰν A' ἡ τομὴ τῆς εὐθείας MA μετὰ τῆς περιφερείας (O_α) θὰ ἔχωμεν $MA_1^2 = MA' \cdot MA \Longrightarrow \frac{MA_1^2}{MA^2} = \frac{MA'}{MA}$. Ἀλλὰ $\overset{\triangle}{AOM} \sim \overset{\triangle}{AO_\alpha A'} \Longrightarrow \frac{MA'}{MA} = \frac{R-\rho}{R}$. Ἤτοι $\frac{MA_1^2}{MA^2} = \frac{R-\rho}{R}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει τὸ συμπέρασμα $\frac{MA_1}{MA} = \frac{MB_1}{MB} = \frac{M\Gamma_1}{M\Gamma}$. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν διὰ τὸ ἰσόπλευρον $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ εἶναι $MB = MA + M\Gamma$. Ἐκ τῆς ἀναλογίας ἔχομεν ἀκόμη ὡς γνωστὸν $\frac{MB_1}{MB} = \frac{MA_1 + M\Gamma_1}{MA + M\Gamma}$, ἤτοι $MB_1 = MA_1 + M\Gamma_1$.

531. Τρεῖς κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ τέμνονται ἀνὰ δύο ὀρθογωνίως. Ἐὰν $\mathcal{D}(P)$ ἡ δύναμις τοῦ ριζικοῦ κέντρου αὐτῶν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\mathcal{D}(P)} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} = 0$.

Ἀπόδειξις:



Τὸ σημεῖον P εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $O_1O_2O_3$. Κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὸ ἐγγράψιμον ΓPBO_1 ἔχομεν $\overline{O_3P} \cdot \overline{O_3\Gamma} = \overline{O_3B} \cdot \overline{O_3O_1}$ ἢ $\overline{O_3P}^2 = \frac{\overline{O_3B}^2 \cdot \overline{O_3O_1}^2}{\overline{O_3\Gamma}^2}$ (1).

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι $(O_1), (O_3)$ τέμνονται ὀρθογωνίως θὰ ἔχωμεν $R_3^2 = \overline{O_3B} \cdot \overline{O_3O_1} \Longrightarrow \overline{O_3B}^2 \cdot \overline{O_3O_1}^2 = R_3^4$ (2).

$O_2\hat{O}_3\Gamma \Longrightarrow \overline{O_3\Gamma}^2 = \overline{O_2O_3}^2 - \overline{O_2\Gamma}^2 = R_2^2 + R_3^2 - \frac{R_2^4}{\overline{O_1O_2}^2} = R_2^2 + R_3^2 - \frac{R_2^4}{R_1^2+R_2^2} = \frac{R_1^2R_2^2 + R_1^2R_3^2 + R_2^2R_3^2}{R_1^2+R_2^2}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \overline{O_3P}^2 = \frac{R_3^4(R_1^2+R_2^2)}{R_1^2R_2^2+R_2^2R_3^2+R_3^2R_1^2}$ καὶ τέλος $\mathcal{D}(P) = \overline{O_3P}^2 - R_3^2 \Longrightarrow \mathcal{D}(P) = R_3^2\left(\frac{R_1^2R_3^2 + R_3^2R_2^2}{R_1^2R_2^2+R_2^2R_3^2+R_3^2R_1^2} - 1\right) \Longrightarrow \mathcal{D}(P) = -\frac{R_1^2R_2^2R_3^2}{R_1^2R_2^2+R_2^2R_3^2+R_3^2R_1^2} \Longrightarrow \frac{1}{\mathcal{D}(P)} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} = 0$.

532. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνονται εἰς E καὶ Z. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου EZ τέμνει ὀρθογωνίως τὸν κύκλον (O).

Ἀπόδειξις:

Σχηματίζομεν τὴν $A\hat{H}E = \hat{B}$.

ΑΒΖΗ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow EA \cdot EB = EH \cdot EZ$ (1)

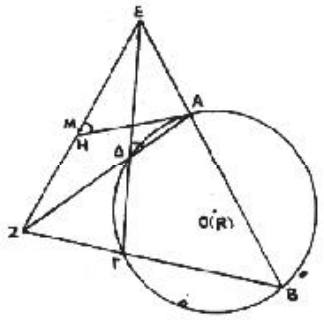
Ἀλλὰ $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ὅθεν $\hat{H} = \hat{\Delta}$.

ΑΔΗΕ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow Z\Gamma \cdot ZB = ZA \cdot ZA = ZH \cdot ZE$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow EZ^2 = EA \cdot EB + Z\Gamma \cdot ZB$ (3).

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων εἰς $E\hat{O}Z$ $EO^2 + ZO^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow EO^2 - R^2 + ZO^2 - R^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} - 2R^2$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow EZ^2 = 2MO^2 + \frac{EZ^2}{2} - 2R^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow R^2 + \frac{EZ^2}{4} = OM^2$.



ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

533. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Ἡ περιφέρεια ΑΔΜ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $BE = \Gamma Z$.

534. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι $HA \cdot H\Delta = HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ$.

535. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ διάμετρος ΑΒ. Ἔστω Γ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ. Ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τῆς περιφερείας. Ἡ ΑΔ τέμνει τὴν κάθετον εἰς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 - A\Delta \cdot AE$.

536. Δύο χορδαὶ κύκλου ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς Ε. Ἂν $\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma E}{E\Delta}$ τότε $AB = \Gamma\Delta$.

537. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῶν ΑΓ, ΑΒ καὶ διέρχονται ὁ μὲν πρῶτος διὰ τῶν Α, Β, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τῶν Α, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $\hat{A}B\Gamma$.

538. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτῆς. Ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὥστε $O\Gamma = O\Delta$. Διὰ τῶν Γ καὶ Δ φέρομεν ἡμιευθείας παραλλήλους Γx, Δy πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τεμνούσας τὴν περιφέρειαν εἰς Γ' καὶ Δ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $\Gamma\Gamma' \cdot \Delta\Delta' = A\Gamma \cdot \Gamma B$.

539. Τετραπλεύρου ἐγγραψίμου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνονται εἰς Μ,Ν. Ἐάν Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου περὶ τὸ ΑΒΓΔ νὰ δειχθῇ ὅτι $MN^2=OM^2+ON^2-2R^2$.

540. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τὰ σημεῖα A_1, A_2 ἐπὶ τῆς ΓΑ τὰ B_1, B_2 καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ Γ_1, Γ_2. Ἐάν αἱ τετράδες A_1, A_2, B_1, B_2 - $B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ - $\Gamma_1, \Gamma_2, A_1, A_2$ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὁμοκυκλικὰ σημεῖα τότε ὅλα τὰ σημεῖα $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ εἶναι ὁμοκυκλικά.

541. Δίδεται κύκλος (ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Ἐάν Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου νὰ δειχθῇ ὅτι $\mathcal{D}_o(P) = PA \cdot PB \cdot \text{συν} A\hat{P}B$.

542. Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, (ο) τυχὼν κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Μ. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε διὰ τοὺς κύκλους ἐκείνους (ο) διὰ τοὺς ὁποίους $\mathcal{D}_o(A) + \mathcal{D}_o(B) = \frac{AB^2}{2}$;

543. Δίδονται οἱ κύκλοι (Ο,R) καὶ (Ο',R'). Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιοχὴ τοῦ ἐπιπέδου (Σ) διὰ τὴν ὁποίαν ἂν Με(Σ) νὰ εἶναι $\mathcal{D}_o(M) - \mathcal{D}_{o'}(M) \geqslant K^2$, ὅπου κ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα.

544. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ὑπάρχει κύκλος (ω, ρ) τοιοῦτος ὥστε $\Delta_\omega(A) = -\alpha^2$, $\Delta_\omega(B) = -\beta^2$, $\Delta_\omega(\Gamma) = -\gamma^2$;

Ἀκόμη ὑπάρχει κύκλος (ω', ρ') ὥστε $\Delta_{\omega'}(A) = \alpha^2$, $\Delta_{\omega'}(B) = \beta^2$, $\Delta_{\omega'}(\Gamma) = \gamma^2$;

545. Ἔστω Δ,Ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου (Ι) καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου (I_α) εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ $\hat{AB\Gamma}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overline{B\Delta} \cdot \overline{\Delta\Gamma} = \overline{BE} \cdot \overline{E\Gamma} = \rho \cdot \rho_\alpha$.

546. Δίδεται κύκλος (ο) διαμέτρου ΑΒ. Εἰς τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ΑΒ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΓΔ, $\overset{\frown}{B\Delta}$ καὶ τῆς ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΑΔ.

547. Δίδεται κύκλος (ο) καὶ χορδὴ ΑΒ. Ἔστω Γ τὸ μέσον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν τυχοῦσαν τεμνοῦσαν τὴν περιφέρειαν εἰς Ε καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς Ζ. Ὁ κύκλος (Γ, ΓΜ), ὅπου Μ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τέμνει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ Β μὲ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν σημεῖον Δ τοῦ Γ εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΕΖ = 2·ΒΗ.

548. Ἐάν δύο σημεῖα Μ,Ν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς κύκλους $(O_1), (O_2), \ldots, (O_\nu)$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα τῶν κύκλων κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ΜΝ.

549. Γράφομεν περιφερείας μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ριζικὸν κέντρον αὐτῶν.

550. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΔΑ τέμνονται εἰς Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων ποὺ γράφονται μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τραπεζίου διέρχεται διὰ τοῦ Η καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

551. Τρεῖς κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O, R)$ ἔχουν κοινὴν χορδὴν ΑΒ, τὸ δὲ Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος O_1O_2. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον Μ εἶναι $\mathcal{D}_{O_1}(M) + \mathcal{D}_{O_2}(M) = 2\cdot\mathcal{D}_O(M)$.

552. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου ΑΒΓ καὶ ὁ παρεγγεγραμμένος εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς Δ, Ε, Ζ καὶ Δ′, Ε′, Ζ′. Ἐὰν θέσωμεν $K = EZ \cap B\Gamma$ καὶ $K' = E'Z' \cap B\Gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι $K\Delta = K'\Delta'$.

553. Ἔστω κύκλος (O, R) καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox τὰ σημεῖα Α, Α′ ὥστε $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = R^2$. Δείξατε α) $\Delta_O(A) + \Delta_O(A') = AA'^2$ β) $\Delta_O(A)\,\Delta_O(A') = -R^2\cdot AA'^2$ γ) $\frac{1}{\Delta_O(A)} + \frac{1}{\Delta_O(A')} = -\frac{1}{R^2}$.

554. Ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἂν Px, Px′, Py, Py′ αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Ρ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ, ΑΔ, ΒΓ ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι $\mathcal{D}_O(P) = \overline{Px}\cdot\overline{Px'} + \overline{Py}\cdot\overline{Py'}$.

555. Ἐὰν τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων αὐξάνονται ἢ ἐλαττοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν μένει ἀμετάθλητος (ὡς πρὸς τὴν θέσιν του). Ἐὰν συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ διὰ τρεῖς κύκλους τὸ ριζικὸν κέντρον αὐτῶν παραμένει ἀμετάθλητον.

556. Διὰ τοῦ κέντρου Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α φέρομεν δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy συμμετρικὰς πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ. Ἡ ἡμιευθεῖα Ox τέμνει εἰς σημεῖον Ρ τὴν περιφέρειαν (Α, α), ἡ δὲ Oy εἰς Κ τὴν περιφέρειαν (Γ, α). Νὰ δειχθῇ α) $PK = a\sqrt{2}$ β) Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΡΚ, $MA\cdot M\Gamma = \frac{a^2}{2}$.

557. Δίδεται $A\hat{\Theta}\Gamma$ ὀρθογώνιον εἰς Β. Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος καὶ Κ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Α, ΑΒ). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΚΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Α τοῦ κύκλου περὶ τὸ $A\hat{K}\Gamma$.

558. Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Β καὶ Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΗ καὶ ΔΗ′ ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας Α. Ὁ κύκλος ΑΗΗ′ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς Ε. Ἐὰν λάθωμεν $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AE}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\overline{A\Gamma}\cdot\overline{P\Gamma} = \overline{B\Delta}^2$.

559. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τυχὸν σημεῖον Μ. Ἐπὶ τῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′ ὥστε $\overline{MA}\cdot\overline{MA'} = \overline{MB}\cdot\overline{MB'} = \overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Gamma'}$. Νὰ ἀποδειχθῇ

ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ποδικόν του Μ πρὸς $A\hat{B}\Gamma$.

560. Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο,R). Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ρ τῶν διαγωνίων φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἔστω εἰς σημεῖον Μ. Τὸ τμῆμα ΜΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐφαπτομενικὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τὸν (Ο,R).

561. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν δύο τυχόντα σημεῖα Α',Β' τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ. Ἔστω Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΓΑ' καὶ ΔΒ' καὶ Ζ τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων ΑΑ'Ε, ΒΒ'Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΕΖ∥ΒΓ.

562. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον ἐφαπτόμενον εἰς Α τῆς ΑΒ καὶ τέμνοντα τοὺς προηγουμένους εἰς Μ καὶ Ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΜΝ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ.

563. Δύο περιφέρειαι (Ο) καὶ (Κ) τέμνονται ὀρθογωνίως εἰς Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α τέμνουσαν ΓΑΔ καὶ ἔστω Μ τὸ μέσον αὐτῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι $O\hat{M}K = 1^L$.

564. Ἐὰν ἓν σύνολον κύκλων F τέμνωνται ὀρθογωνίως ὑπὸ δύο κύκλων (ο) καὶ (κ) δείξατε ὅτι οἱ κύκλοι τοῦ F ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα. Ἐὰν ἓν σύνολον κύκλων F τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας τέμνωνται ὀρθογωνίως ὑπὸ ἑνὸς κύκλου (Ο) τότε οἱ κύκλοι τοῦ F ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα.

565. Δίδονται τρεῖς κύκλοι $(O_1),(O_2),(O_3)$. Ἐὰν ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (O_1), (O_2) διέρχεται διὰ τοῦ O_3, ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(O_2),(O_3)$ διέρχεται διὰ τοῦ O_1, τότε καὶ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν $(O_3),(O_1)$ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ O_2.

566. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'). Ἐκ σημείου Α ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΒ'. Αἱ κάθετοι ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Μ' τῶν ΑΒ καὶ ΑΒ' ἐπὶ τὰς ΑΟ καὶ ΑΟ' ἀντιστοίχως τέμνονται εἰς Ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων.

567. Δύο κύκλοι (Ο) καὶ (σ') τέμνονται ὀρθογωνίως. Τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνει τοῦτον μὲν εἰς Α καὶ Β τὸν δὲ (σ') εἰς Α',Β'. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ (Ο). Αἱ ΜΑ',ΜΒ' τέμνουν τὸν (Ο) ἀντιστοίχως εἰς Γ καὶ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΓΔ ⊥ ΑΒ.

568. Ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται ὀρθογωνίως πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐφαπτομενικὸν τμῆμα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης νὰ φαίνεται ὑπὸ τοῦ ἑνὸς σημείου τομῆς ὑπὸ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου δὲ ὑπὸ γωνίαν $\frac{3\pi}{4}$.

569. Ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἐκ σημείου Μ τοῦ ἑνὸς ἀγόμεναι χορδαὶ ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἐπανατέμνουν τὸν ἄλλον κύκλον εἰς σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιδιαμετρικά.

570. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ νὰ δειχθῇ α) οἱ κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΜΒ, ΑΜΓ τέμνονται ὀρθογωνίως β) οἱ κύκλοι οἱ διερχόμενοι διὰ τοῦ Μ καὶ ἐφαπτόμενοι τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Β καὶ Γ ἀντιστοίχως εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιοι.

571. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶναι ὅπως ἔχουν διαμέτρους τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθοκεντρικοῦ τετραπλεύρου. (Ὀνομάζομεν **ὀρθοκεντρικὸν τετράπλευρον** τὸ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου κάθε κορυφὴ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου πού ἀποτελοῦν αἱ ὑπόλοιπαι κορυφαί).

572. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς Α. Φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΜΑΝ. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους μὲ κέντρα Μ καὶ Ν καὶ ὀρθογωνίους πρὸς τοὺς προηγουμένους. Νὰ δειχθῇ ὅτι τέμνονται ἐπὶ ἑνὸς σημείου τοῦ κύκλου πού γράφεται μὲ διάμετρον ΜΝ.

573. Δίδεται κύκλος (ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἂν Α′ καὶ Β′ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ΜΑ, ΜΒ μετὰ τοῦ (ο) νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\Delta}{MA'B'}$ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (ο).

574. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\frown}{B\Gamma}$ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΙαΙχ.

575. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Κ) καὶ ὠγκρόνως περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (ο). Ἐὰν Ρ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του νὰ δειχθῇ ὅτι $\mathcal{P}_K(P) = PO^2$.

ΟΜΑΣ Β′.

576. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ποῖον τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν κύκλων (Α,α), (Β,β), (Γ,γ).

577. Δίδεται περιφέρεια (ο) καὶ διάμετρος ΑΒ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΓΔ τοῦ Γ ἀπὸ τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν προηγουμένην εἰς Ε, Ζ. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἐφάπτεται τῶν περιφερειῶν πού γράφονται μὲ διαμέτρους ΑΔ καὶ ΔΒ.

578. Δύο περιφέρειαι (ο) καί (ο') τέμνονται ὑπό εὐθείας (ε) εἰς τά σημεῖα $A, B - A', B'$ ἀντιστοίχως. Ἔστω ὅτι A, B, A', B' ἡ διαδοχή τῶν σημείων. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς A, B' ἐπί τῶν ἀντιστοίχων περιφερειῶν τέμνονται εἰς P. Ἐάν αἱ δύο περιφέρειαι φαίνονται ἀπό τό σημεῖον P ὑπό ἴσας γωνίας νά δειχθῇ ὅτι τά ἐφαπτομενικά τμήματα ἐκ τῶν A, B' εἰς τάς (ο') καί (ο) εἶναι ἴσα.

579. Τριγώνου $AB\Gamma$ Δ, E, Z εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν του. Νά δειχθῇ ὅτι ριζικοί ἄξονες τῶν κύκλων $(I), (I_\alpha), (I_\beta), (I_\gamma)$ λαμβανομένων ἀνά δύο εἶναι αἱ διχοτόμοι (ἐσωτερικαί καί ἐξωτερικαί) τοῦ $\hat{\Delta EZ}$.

580. Ἐάν A_1, B_1, Γ_1 εἶναι τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν τριγώνου $AB\Gamma$, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), ὡς πρός τάς ἀπέναντι πλευράς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως, νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\Delta_o(A_1) + \Delta_o(B_1) + \Delta_o(\Gamma_1) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

581. Ἐάν K εἶναι τό κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$ καί $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ αἱ δυνάμεις τῶν κορυφῶν ὡς πρός τούς κύκλους περί τά $K\hat{B\Gamma}$, $K\hat{\Gamma A}$, $K\hat{AB}$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

582. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ (ω) ὁ κύκλος τοῦ Euler. Δείξατε ὅτι $\Delta_\omega(A) + \Delta_\omega(B) + \Delta_\omega(\Gamma) = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

583. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ριζικός ἄξων δύο κύκλων ἰσαπέχει ἀπό τούς ριζικούς ἄξονες τῶν αὐτῶν κύκλων μετά τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τήν διάκεντρον αὐτῶν.

584. Ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἀπέναντι πλευραί $AB, \Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς I καί αἱ $A\Delta, B\Gamma$ εἰς J. Ἐάν E τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καί $B\Delta$ νά δειχθῇ ὅτι α) οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τά $\hat{EAB}$, $\hat{E\Gamma\Delta}$ τέμνουν τάς $A\Delta, B\Gamma$ εἰς τέσσερα σημεῖα κείμενα ἐπί τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου β) Τούς τέσσαρες κύκλους τοῦ προβλήματος λαμβάνομεν ἀνά τρεῖς. Τά ριζικά κέντρα τῶν οὕτω σχηματιζομένων τεσσάρων συστημάτων ἀποτελοῦν τάς κορυφάς παραλληλογράμμου.

585. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς A καί B καί ἐφάπτονται τρίτου κύκλου εἰς Γ καί Δ. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$.

586. Ἐάν ἐφαπτόμεναι μήκους ρ, q, r ἄγονται ἀπό τάς κορυφάς A, B, Γ ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ πρός κύκλον (S) καί εἶναι ἓν ἐκ τῶν γινομένων $ap, bq, \gamma r$ ἴσον πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων δείξατε ὅτι ὁ κύκλος (S) ἐφάπτεται τοῦ περιγεγραμμένου περί τό $\hat{AB\Gamma}$ κύκλου.

587. Δίδεται τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καί $\Delta(A_1), \Delta(A_2), \Delta(A_3)$ αἱ δυνάμεις

τῶν κορυφῶν πρὸς κύκλον (κ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις τοῦ σημείου Μ τοιούτου ὥστε $\overline{OM} = \frac{\lambda_1\overline{OA_1} + \lambda_2\overline{OA_2} + \lambda_3\overline{OA_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\Delta(M) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left[\lambda_1\Delta(A_1) + \lambda_2\Delta(A_2) + \lambda_3\Delta(A_3) - \frac{\lambda_2\lambda_3\alpha_1^2 + \lambda_3\lambda_1\alpha_2^2 + \lambda_1\lambda_2\alpha_3^2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right]$.

Πῶς διαμορφοῦται ὁ τύπος διὰ τὰ σημεῖα τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ τριγώνου; Τί παρατηρεῖτε ἐὰν ὁ κύκλος (κ) ταυτίζεται πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύκλον;

Παρατήρησις:

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ 887.

Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἀνεξάρτητον λύσιν ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz ἐργαζόμενοι βάσει τῆς ἀσκ. 884

588. Μὲ κέντρα τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀκτῖνα ἓν αὐθαίρετον μῆκος ἔστω λ γράφομεν περιφερείας τεμνούσας τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $\hat{A}B\Gamma$ εἰς ἓξ σημεῖα. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι ὁμοκυκλικά. (Ἐὰν ΑΑ' τὸ ὕψος λαμβάνομεν τὰ δύο σημεῖα τομῆς τῆς (Α', λ) μετὰ τῆς εὐθείας ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ).

589. Ἔστω ΑΒΓΔ κυρτὸν τετράπλευρον καὶ Μ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ὀνομάζομεν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ τὰς δυνάμεις τοῦ Μ πρὸς τοὺς κύκλους μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ Δ τὴν δύναμιν τοῦ Μ πρὸς τὸν κύκλον μὲ διάμετρον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων. Νὰ δειχθῇ ὅτι $4\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$.

590. Δύναμις μεταξὺ δύο κύκλων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι (O_1, R_1) καὶ (O_2, R_2). Ὁρίζομεν ὡς δύναμιν μεταξὺ αὐτῶν καὶ συμβολίζομεν $\Delta(O_1, O_2)$ τὴν ποσότητα $d^2 - (R_1^2 + R_2^2)$ ὅπου d ἡ διάκεντρος τῶν κύκλων. Ἤτοι $\Delta(O_1, O_2) = d^2 - (R_1^2 + R_2^2)$. Διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν κύκλων (Γ, ρ), $(\Gamma_\alpha, \rho_\alpha)$ δύναμις εἶναι $\frac{1}{2}[a^2 + (\rho - \rho_\alpha)^2]$. Νὰ εὑρεθῇ συνθήκη μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἵνα οἱ ἐν λόγῳ κύκλοι ἐφάπτωνται.

591. Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι. Ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ὥστε $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}B$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων ποὺ γράφονται μὲ διαμέτρους ΒΖ καὶ ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ Α.

592. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς γράφομεν δύο ἡμιπεριφερείας (Κ) καὶ (Λ) ἐφαπτομένας εἰς Α καὶ Β ἀντιστοίχως τῆς πρώτης. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι (K_1) καὶ (Λ_1), οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται, ὁ μὲν πρῶτος τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ, τῆς (κ) καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (Κ) καὶ (Λ), ὁ δὲ δεύτερος τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ, τῆς (Λ) καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (Κ) καὶ (Λ), εἶναι ἴσοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ 5

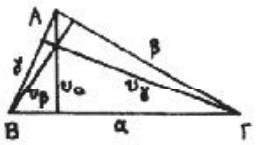
ΕΜΒΑΔΑ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

5-1 ΤΡΙΓΩΝΟΝ

5-1.1

Τό ἐμβαδόν παντός τριγώνου εἶναι ἴσον πρός τό ἥμισυ μιᾶς πλευρᾶς ἐπί τό ἀντίστοιχον ὕψος.

Ἔστω τό τρίγωνον ΑΒΓ μέ πλευράς α, β, γ καί ὕψη ἀντιστοίχως $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$. Ἄν $(AB\Gamma)$ παριστᾶ τό ἐμβαδόν τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ θά εἶναι



$$\boxed{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma} \qquad (1)$$

5-1.2 Θεώρημα

Τό ἐμβαδόν παντός τριγώνου δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\boxed{(AB\Gamma) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (2)$$ Τύπος τοῦ Ἥρωνος

ὅπου $2\tau = \alpha+\beta+\gamma$

Ἀπόδειξις:

Γνωρίζομεν ὅτι τό ὕψος υ_α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἀπό τόν τύπον: $\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (3)

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς (1) ἔχομεν

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\,\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

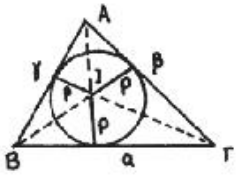
Ἀκόμη ὁ τύπος τοῦ Ἥρωνος γράφεται

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)} = \frac{1}{4}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}$$

5-1.3 Θεώρημα

Ἐάν ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ τότε

$$\boxed{(AB\Gamma) = \tau\cdot\rho} \qquad (4)$$



Ἀπόδειξις:

$$(AB\Gamma) = (B\Gamma) + (\Gamma A) + (AB) = \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho =$$

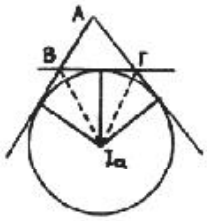
$$= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\rho = \tau\rho.$$

5-1.4 Θεώρημα

Ἔστω ρ_α ἡ ἀκτίς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ, θά εἶναι

$$\boxed{(AB\Gamma) = \rho_\alpha(\tau-\alpha)} \qquad (5)$$

Απόδειξις:



$$(ABΓ)\quad (AI_αB)+(AI_αΓ)-(BI_αΓ)=$$
$$=\frac{1}{2}βρ_α+\frac{1}{2}γρ_α-\frac{1}{2}αρ_α=ρ_α\frac{β+γ-α}{2}=$$
$$=ρ_α(τ-α)$$

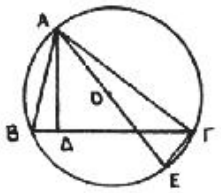
5-1.5 Θεώρημα

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\boxed{(ABΓ)=\frac{αβγ}{4R}} \quad (6)$$

ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Απόδειξις:



Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμετρον ΑΕ.

$$\overset{\triangle}{ABΔ}\sim\overset{\triangle}{AEΓ}\Longrightarrow \boxed{βγ=2Rυ_α}^{(ω)} \quad (7)$$

ἢ ἀκόμη $αβγ=2Rαυ_α\Longrightarrow (ABΓ)=\frac{αβγ}{4R}$

5-1.6

Διὰ τὸ **ὀρθογώνιον τρίγωνον** ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$)

$$\boxed{(ABΓ)=\frac{1}{2}βγ=\frac{1}{2}αυ_α} \quad (8)$$

$$\boxed{(ABΓ)=τ(τ-α)=(τ-β)(τ-γ)} \quad (9)$$

Ὁ τύπος (9) προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον (2) διὰ $τ(τ-α)=(τ-β)(τ-γ)$

$$τ(τ-α)=\frac{α+β+γ}{2}\cdot\frac{β+γ-α}{2}=\frac{(β+γ)^2-α^2}{4}=\frac{β^2+γ^2+2βγ-α^2}{4}=\frac{α^2+2βγ-β^2-γ^2}{4}=\frac{α^2-(β-γ)^2}{4}=$$
$$=\frac{α+β-γ}{2}\cdot\frac{α+γ-β}{2}=(τ-β)(τ-γ)$$

5-2 Ἰσοδύναμα σχήματα

5-2.1 Ὁρισμός

Δύο σχήματα θὰ ὀνομάζονται ἰσοδύναμα ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ (δηλαδὴ ὅταν εἶναι ἰσεμβαδικά).

5-2.2 Θεώρημα

Τὰ ἰσεμβαδικὰ σχήματα δύνανται νὰ ἐφαρμώσουν κατὰ μέλη[2] διὰ καταλλήλου διαμελισμοῦ τῶν καὶ μεταφορᾶς.

5-2.3 Θεώρημα

Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

---

(1) Ὁ τύπος (7) ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ ἂν Β≡Γ. Ἤτοι ἂν Α,Β τυχόντα σημεῖα τοῦ κύκλου (O,R) καὶ λ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην εἰς Β εἶναι: $AB^2=2Rλ$.

(2) Δὲν ἰσχύει διὰ τὰ σχήματα τοῦ τριδιαστάτου χώρου.

5-2.4 Θεώρημα

Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν.

Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσα ὕψη ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεων.

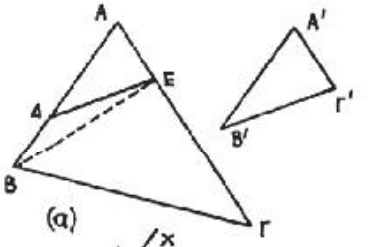
5-2.5

Τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι ἰσοδύναμα.

5-3. Θεώρημα τῶν Ἐμβαδῶν

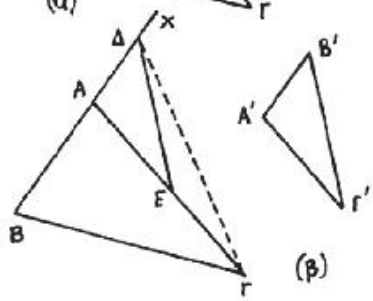
Ἐὰν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ\end{array}\right\} \text{ ἢ } \Longrightarrow \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{A'B' \cdot A'\Gamma'}{AB \cdot A\Gamma}$$



Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι $\hat{A} = \hat{A}'$. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ λαμβάνομεν $A\Delta = A'B'$. Ἐπὶ τῆς ΑΓ $AE = A'\Gamma'$. Θὰ εἶναι $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΕ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς Ε, ἄρα: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{AB}$ (1). Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς Β. Ἄρα: $\frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{AE}{A\Gamma}$ (2). Αἱ σχέσεις (1), (2) πολ/ζόμεναι κατὰ μέλη μᾶς δίδουν:



$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} \text{ ἢ } \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{A'B' \cdot A'\Gamma'}{AB \cdot A\Gamma}$$

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Αx (Σχ. β) λαμβάνομεν $A\Delta = A'B'$. Ἐπὶ τῆς ΑΓ $AE = A'\Gamma'$. $\overset{\Delta}{A\Delta E} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. $\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{AE}{A\Gamma}$, $\frac{(A\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{AB}$ καὶ διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη $\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} \Longrightarrow \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{A'B' \cdot A'\Gamma'}{AB \cdot A\Gamma}$.

Πόρισμα

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\boxed{(AB\Gamma) = \kappa \cdot \beta\chi}$$

(ὅπου κ παράγων ἐξαρτώμενος μόνον ἀπὸ τὴν $\hat{A}$).

5-4 Θεώρημα ὁμοίων τριγώνων

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος.

Ἂν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ καὶ λ ὁ λόγος ὁμοιότητος ($\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'}$)

$$\boxed{\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2}$$

Απόδειξις:

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$. Ἄρα $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}} = \lambda^2$.

Πόρισμα

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

5-5 Τετράπλευρα

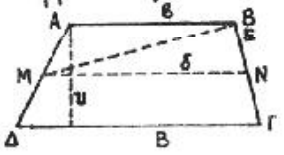
① Τετράγωνον πλευρᾶς α ἔχει ἐμβαδόν $\boxed{\alpha^2}$

② Ὀρθογώνιον διαστάσεων α, β ἔχει ἐμβαδόν $\boxed{\alpha\cdot\beta}$

③ Παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν α καὶ ὕψος υ ἔχει ἐμβαδόν $\boxed{\alpha\cdot\upsilon}$

④ Τετράπλευρον μὲ διαγωνίους καθέτους δ καὶ δ' ἔχει ἐμβαδόν $\boxed{\frac{1}{2}\delta\cdot\delta'}$ (10)

⑤ Ἐμβαδὸν τραπεζίου. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου βάσεων β, Β καὶ ὕψους υ $\boxed{(AB\Gamma\Delta)=\frac{\beta+B}{2}\upsilon}$ (11)



Ἐὰν MN ἡ διάμεσος αὐτοῦ $\boxed{(AB\Gamma\Delta)=MN\cdot\upsilon}$ (12)

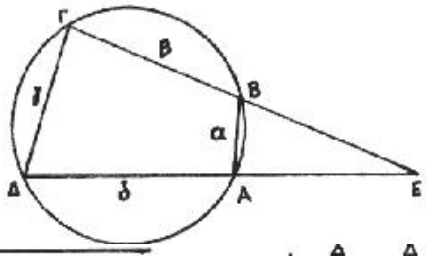
Ἐὰν $ME\perp B\Gamma$ $\boxed{(AB\Gamma\Delta)=ME\cdot B\Gamma}$ (13)

Αἱ ἀποδείξεις τῶν τύπων (10), (11), (12), (13) ἂς δοθοῦν ἀπὸ τὸν μαθητήν.

⑥ Ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$$

ὅπου α, β, γ, δ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ $2\tau=\alpha+\beta+\gamma+\delta$



Ἀπόδειξις:

Ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΔ. Θέτομεν $\Gamma E=x$ καὶ $\Delta E=y$. Διὰ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ὡς γνωστὸν $(\Gamma\Delta E)=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+\gamma)(x+y-\gamma)(x-y+\gamma)(-x+y+\gamma)}$ (1). Ἀλλὰ $A\hat{E}B\sim\Gamma\hat{E}\Delta$ $\Longrightarrow \frac{(AEB)}{(\Gamma E\Delta)}=\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \Longrightarrow \frac{E}{(\Gamma E\Delta)}=\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}$ (2). Ἀκόμη εἶναι προφανεῖς αἱ σχέσεις: $\frac{x}{\gamma}=\frac{y-\delta}{\alpha}$ καὶ $\frac{y}{\gamma}=\frac{x-\beta}{\alpha}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow$ $E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$

Παρατήρησις

Ἐὰν συμβῇ τὸ τετράπλευρον νὰ εἶναι συγχρόνως περιγεγραμμένον περὶ κύκλον τότε

$$E=\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$$

(διότι $\alpha+\gamma=\beta+\delta$).

⑦ Τὸ ἐμβαδὸν Ε τυχόντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰς α, β, γ, δ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)-\alpha\beta\gamma\delta\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}} \qquad (1)$$

ὅπου $2\tau=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

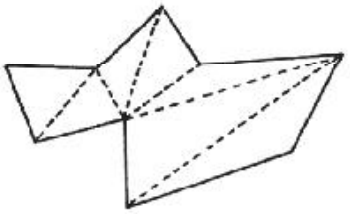
Ἐὰν x, y αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)^2} \qquad (2)$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἴδε ἄσκησιν 654.

5-6 Πολύγωνον, γενικῶς

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἐμβαδοῦ τυχόντος πολυγώνου γίνεται εἰς τριγωνισμός αὐτοῦ καί ἀθροίζονται τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων.



Ἐάν τό πολύγωνον εἶναι κυρτόν δύναται ὁ τριγωνισμός νά γίνῃ διά διαγωνίων διά τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

Ἐπίσης εἶναι δυνατόν νά γίνῃ ἐάν φέρωμεν τάς καθέτους ἀπό τάς κορυφάς ἐπί τήν μεγαλυτέραν διαγώνιον. Οὕτω σχηματίζονται τρίγωνα καί τραπέζια τά ἐμβαδά τῶν ὁποίων πρέπει νά ὑπολογισθοῦν καί νά ἀθροισθοῦν.

5-6.1

Ἐάν πολύγωνου Π περιμέτρου 2τ εἶναι περιγεγραμμένον περί κύκλον ἀκτῖνος ρ τό ἐμβαδόν του (Π) δίδεται ἀπό τόν τύπον:

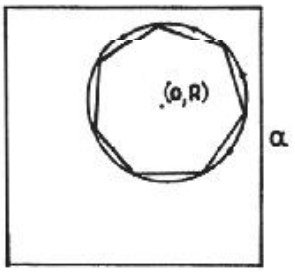
$$\boxed{(\Pi) = \rho \cdot \tau} \qquad (14)$$

5-7 Μέτρησις κύκλου

5-7.1 Μῆκος περιφερείας

Ἔστω κύκλος (O,R) καί $\Pi_2 = A_1A_2A_3A_4$ ἐγγεγραμμένον κανονικόν πολύγωνον μέ 2^2 πλευράς. Θέτομεν $S_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1$. Θεωροῦμεν τό ἐγγεγραμμένον κανονικόν πολύγωνον $\Pi_3 = A_1A_2 \ldots A_8$ μέ 2^3 πλευράς καί θέτομεν $S_3 = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_8A_1$. Ἐπίσης τό ἐγγεγραμμένον κανονικόν πολύγωνον Π_4 μέ 2^4 πλευράς, ὁπότε λαμβάνομεν τό ἄθροισμα $S_4, \ldots$ Τέλος τό ἐγγεγραμμένον κανονικόν πολύγωνον $\Pi_\nu = A_1A_2 \ldots A_{2^\nu}$ μέ 2^ν πλευράς καί ἔχομεν: $S_\nu = \sum_{i=1}^{2^\nu} A_iA_{i+1}$ μέ $i = [1, 2, \ldots, 2^\nu] \wedge A_{2^\nu+1} = A_1$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ διά $\nu \longrightarrow \infty$ εἶναι περατωμένη.

Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά λάβωμεν ἓν πολύγωνον, τό ὁποῖον νά περιέχῃ τόν κύκλον (O,R) εἰς τό ἐσωτερικόν του, π.χ. ἓν τετράγωνον πλευρᾶς α (ἰδέ σχῆμα). Εἶναι εὔκολον νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ S_ν, ἤτοι $4\alpha > S_\nu$.



Ἐπίσης εὐκόλως ἀποδεικνύεται, διά τῆς τριγωνικῆς ἀνισότητος, ὅτι $S_2 < S_3 < \ldots < S_\nu$. Δηλαδή ἡ ἀκολουθία τῶν S_i εἶναι μονότονος καί μάλιστα αὔξουσα. Ἄρα κατά γνωστόν θεώρημα[1] ἡ ἀκολουθία $S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ συγκλίνει διά $\nu \longrightarrow \infty$ καί ἔστω $\lim_{\nu \to \infty} S_\nu = \Gamma$.

Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν μῆκος τῆς περιφερείας τήν τιμήν τοῦ Γ.

---

[1] Κάθε ἀκολουθία περατωμένη καί αὔξουσα συγκλίνει πρός τό κατώτερον πέρας της.

5-7.2 Μῆκος τόξου

Ἔστω τό τόξον MN τοῦ κύκλου (O,R). Διά τό κανονικόν πολύγωνον Π_ν μέ $A_1=M$ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν $A_i \in \overset{\frown}{MN} \wedge A_{i+1} \notin \overset{\frown}{MN}$. Τό ἄθροισμα $\ell_i = A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_\nu N$ ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει ὅριον ℓ (διά τῆς αὐτῆς μεθόδου, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $\{\ell_i\}$ εἶναι περατωμένη καί αὔξουσα).

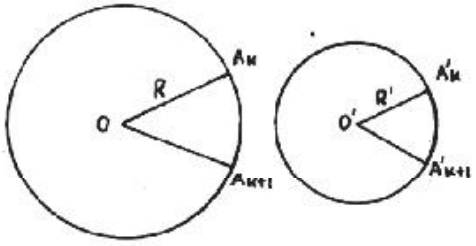
Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν μῆκος τοῦ τόξου MN τήν τιμήν τοῦ ℓ.

5-7.3 Θεώρημα

Τό μῆκος τῆς περιφερείας πρός τήν διάμετρον εἶναι ἀριθμός σταθερός δι' ὅλους τούς κύκλους.

Ἀπόδειξις:



Θεωρήσωμεν τάς περιφερείας (O,R) καί (O',R'). Γ καί Γ' τά μήκη τῶν περιφερειῶν ἀντιστοίχως καί Π_ν, Π'_ν κανονικά ἐγγεγραμμένα πολύγωνα μέ 2^ν πλευράς. Ἔστω A_κ, $A_{\kappa+1}$ δύο διαδοχικαί κορυφαί τοῦ Π_ν καί A'_κ, $A'_{\kappa+1}$ διαδοχικαί κορυφαί τοῦ Π'_ν.

Εἶναι προφανές ὅτι $\hat{AOA}_{\kappa+1} = \hat{A'_\kappa OA'_{\kappa+1}}$. Ὅθεν $A_\kappa \overset{\Delta}{O} A_{\kappa+1} \sim A'_\kappa \overset{\Delta}{O} A'_{\kappa+1} \Longrightarrow \frac{A_\kappa A_{\kappa+1}}{R} = \frac{A'_\kappa A'_{\kappa+1}}{R'} \Longrightarrow \frac{2^\nu A_\kappa A_{\kappa+1}}{2R} = \frac{2^\nu A'_\kappa A'_{\kappa+1}}{2R'} \Longrightarrow \frac{S_\nu}{2R} = \frac{S'_\nu}{2R'}$ (1). (S_ν, S'_ν τά ἀθροίσματα τῶν πλευρῶν τῶν Π_ν, Π'_ν ὡς εἰς προηγουμένην παράγραφον).

Εἰς τήν σχέσιν (1) ἐάν λάβωμεν τά ὅρια διά $\nu\to\infty$ θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{op}_{\nu\to\infty}\left(\frac{S_\nu}{2R}\right) = \operatorname*{op}_{\nu\to\infty}\left(\frac{S'_\nu}{2R'}\right) \Longrightarrow \frac{\operatorname{op} S_\nu}{2R} = \frac{\operatorname{op} S'_\nu}{2R'} \Longrightarrow \frac{\Gamma}{2R} = \frac{\Gamma'}{2R'} \qquad (2)$$

Τόν σταθερόν τοῦτον λόγον συμβολίζομεν μέ τό γράμμα π.

5-7.4 Θεώρημα

Τό μῆκος Γ τῆς περιφερείας (O,R) εἶναι ἴσον πρός:

$$\boxed{\Gamma = 2\pi R}$$

Ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν σχέσιν (2).

5-7.5 Θεώρημα

Τά μήκη δύο τόξων τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἀνάλογα πρός τά μέτρα των.

Ἔχομεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι διά τοῦ ὅρου μέτρον τόξου, ἐννοοῦμεν τό μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας. Τό θεώρημα ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐάν ὁ λόγος τῶν μέτρων τῶν δύο τόξων εἶναι ρητός, ἐπί τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος 2-1.2 διά τήν γενικήν περίπτωσιν ἡ ἀπόδειξις εἰς παρ/μα.

5-7.6 Θεώρημα

Τό μῆκος τοῦ τόξου μέτρου α δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\boxed{\ell = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha R}$$

Απόδειξις:

Επί τη βάσει του προηγουμένου θεωρήματος διά $\ell' = 2\pi R$ έχομεν $\frac{\text{μέτρον } \widehat{MN}}{360} = \frac{\ell}{2\pi R}$

ή $\frac{\alpha}{360} = \frac{\ell}{2\pi R} \Longrightarrow \ell = \frac{\pi}{180} \alpha R$.

5-7.7 Εμβαδόν κύκλου

Εἰς τὸν κύκλον (O,R) θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων $\pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\nu$ μέ $2^2, 2^3, \ldots 2^\nu$ πλευράς. Σχηματίζομεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐν λόγῳ πολυγώνων $(\pi_2), (\pi_3), \ldots (\pi_\nu)$ ἥτις ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται εἶναι μονότονος (αὔξουσα) καὶ περαπωμένη. κατά συνέπειαν θὰ ἔχει ὅριον. Ἔστω (π) τὸ ὅριον αὐτῆς.

Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (O,R) τὴν τιμὴν τοῦ (π).

5-7.8 Θεώρημα

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (O,R) ἰσοῦται πρὸς $\boxed{\pi R^2}$

Ἀπόδειξις:

Εἶναι $(\pi_\nu) = 2^\nu \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot \alpha_\nu$, ὅπου α_ν τὸ ἀπόστημα τοῦ π_ν. Ἀκόμη $\lim_{\nu\to\infty} (\pi_\nu) = \frac{1}{2} \lim (2^\nu A_1A_2) \lim \alpha_\nu$

Ἀλλὰ $\lim 2^\nu A_1A_2 = \Gamma$ καὶ $\lim \alpha_\nu = R$, ὅθεν

$$(\pi) = \pi R^2$$

Μὲ παρομοίας μεθόδους ὁρίζεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ εὑρίσκεται ὅτι ἰσοῦται μὲ $\boxed{\frac{1}{2}\ell R}$ ὅπου ℓ τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἢ $\boxed{\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}}$ ὅπου α τὸ μέτρον τῆς γωνίας τοῦ τομέως.

5-8 Ὑπολογισμὸς τοῦ π. Μέθοδος τῶν περιμέτρων

Ἐὰν θέσωμεν τ_ν καὶ τ_ν' τὰς περιμέτρους τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου μὲ ν πλευράς εἰς τὸν κύκλον (O,R) θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\tau_\nu < 2\pi R < \tau_\nu'$$

Διὰ $2R = \ell$

$$\tau_\nu < \pi < \tau_\nu' \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λοιπὸν μᾶς λέγει ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π, κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον (τὴν πλευρὰν δηλαδή) τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου μὲ ν πλευράς. Φυσικὰ ὅταν λάβωμεν τὸν ν ἀρκετὰ μεγάλον ἡ ἀκρίβεια αὐξάνει.

Ἐὰν $\nu = 3$ $\quad \frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 3\sqrt{3}$

$\nu = 4$ $\quad 2\sqrt{2} < \pi < 4$

$\nu = 6$ $\quad 3 < \pi < 3{,}46$ $\quad$ κλπ.

Διὰ τὸν $(0, \frac{1}{2})$ εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς τύπους:

$$T_\nu' = \frac{\nu \cdot T_\nu}{\sqrt{\nu^2 - T_\nu^2}} \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad T_{2\nu}^2 = 2\nu(\nu - \sqrt{\nu^2 - T_\nu^2}) \quad (3)$$

Διὰ $\nu = 6 \Longrightarrow T_6 = 3$. Ὁ τύπος (2) δίδει $T_6' = 3,46411$. Ἐκ τοῦ ἀνισορρόπικοῦ τύπου (3) ὑπολογίζομεν τὸ T_{12}. Ἐκ τοῦ T_{12} ἐκ τοῦ τύπου (2) τὸ T_{12}' κλπ. οὕτω εὑρίσκομεν μέχρι τοῦ T_{192}, T_{192}' τὴν σχέσιν

$$3,14145\ldots < \pi < 3,14188\ldots$$

Διὰ τὰς συνήθεις ἐφαρμογάς, χρησιμοποιοῦμεν τὴν τιμὴν $\pi = 3,14159$.

Σημειώσεις.

Τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ εἰς περισσότερον πολύπλοκα σχήματα εἶναι γενικῶς δύσκολον καὶ μὴ στοιχειώδες.

Ἔστω A σημειοσύνολον εἰς ἓν ἐπίπεδον. Ἐὰν δὲν ὑφίσταται πολύγωνον $\Pi \subset A$ τότε ὁρίζομεν ὡς ἐσωτερικὸν μέτρου τοῦ A μηδέν, ἤτοι $m_{\varepsilon\sigma}(A) = 0$. Ἄλλως θέτομεν $m_{\varepsilon\sigma}(A) = \sup_{\Pi \subset A}(\pi)$[1]. Παρομοίως ἂν δὲν ὑφίσταται πολύγωνον π ὥστε $A \subset \pi$ ὁρίζομεν ὅτι ἐξωτερικὸν μέτρον τοῦ A εἶναι μηδέν, δηλ. $m_{\varepsilon\xi}(A) = 0$. Ἄλλως θέτομεν ὅτι $m_{\varepsilon\xi}(A) = \inf_{A \subset \pi}(\pi)$. Ἐὰν συμβῇ $m_{\varepsilon\sigma}(A) = m_{\varepsilon\xi}(A)$, συμβολίζομεν τὸ κοινὸν μέτρον διὰ τοῦ (A) καὶ ὀνομάζομεν τοῦτο ἐμβαδὸν τοῦ (A) (Jordan measure).

Ἡ ἰδία μέθοδος ἀκολουθεῖται εἰς πολλὰ βιβλία στοιχειώδους γεωμετρίας διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τοῦ μήκους τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου. Ἡμεῖς ἠκολουθήσαμεν τὸ πρόγραμμα τοῦ C.R Wylie, ὅπως ἐκτίθεται εἰς τὸ βιβλίον του Foundations of Geometry.

---

[1] $m_{\varepsilon\sigma}(A)$ ὁ μέγιστος τῶν (π)

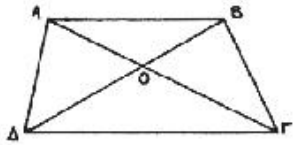
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

593. Τά τρίγωνα τά ὁποῖα ἔχουν κοινήν κορυφήν τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου καί βάσεις τάς μή παραλλήλους πλευράς εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις:

$AB \parallel \Gamma\Delta \Longrightarrow (\Delta A\Gamma) = (\Delta B\Gamma) \Longrightarrow (\Delta A\Gamma) - (\Delta O\Gamma) =$
$= (\Delta B\Gamma) - (\Delta O\Gamma) \Longrightarrow (AO\Delta) = (BO\Gamma).$

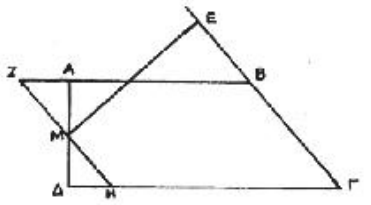


594. Τό ἐμβαδόν παντός τραπεζίου ἰσοῦται πρός τό γινόμενον μιᾶς ἐκ τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν ἐπί τήν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης (τῶν μή παραλλήλων) ἀπ' αὐτήν.

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΔ φέρομεν τήν $ME \perp B\Gamma$. Θά δείξωμεν ὅτι $(AB\Gamma\Delta) =$
$= B\Gamma \cdot ME$.

Διά τοῦ Μ φέρομεν τήν $ZH \parallel B\Gamma$.
$\overset{\Delta}{ZMA} = \overset{\Delta}{HM\Delta} \Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = (ZB\Gamma H) = B\Gamma \cdot ME.$



595. Ἐάν Κ εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου ΑΒΓ τότε $(BK\Gamma) = (\Gamma KA) = (AKB)$.

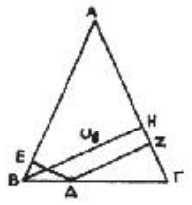
Ἀπόδειξις:

Ἔστω ΑΔ ἡ διάμεσος. Θά εἶναι $(AB\Delta) = (A\Gamma\Delta)$ καί $(BK\Delta) = (\Gamma K\Delta)$ ἤτοι $(AB\Delta) -$
$- (BK\Delta) = (A\Gamma\Delta) - (\Gamma K\Delta) \Longrightarrow (AKB) = (AK\Gamma)$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $(AK\Gamma) = (BK\Gamma)$.

596. Τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ ἀπό τάς ἴσας πλευράς ἰσοῦται μέ τό ἕν ἐκ τῶν ἴσων ὕψων.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Δ τυχόν σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καί ΔΕ, ΔΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπό τάς ἴσας πλευράς. Εἶναι $(AB\Gamma) =$
$= (AB\Delta) + (A\Gamma\Delta)$ (1). Ἀλλά $\frac{1}{2} A\Gamma \cdot \upsilon_B = \frac{1}{2} AB \cdot \Delta E +$
$+ \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Delta Z \Longrightarrow \upsilon_B = \Delta E + \Delta Z.$



Παρατηρήσεις:

Διά τῆς ἰδίας μεθόδου, δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς διαφορᾶς τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ εἶναι ἴση πρός ἕν ἐκ τῶν παρά τήν βάσιν ὑψῶν. Ἐπίσης ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐντός ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται πρός τό ὕψος του. (Ἰδέ καί ἄσκ. 5)

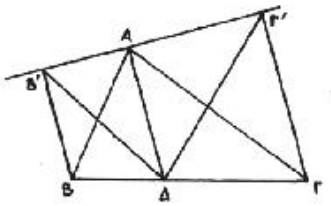
597. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$, $A\Delta$ εἶναι ἡ διχοτόμος καί $B'\Gamma'$ ἡ προβολή τῆς $B\Gamma$ ἐπί τήν ἐξωτερικήν διχοτόμον τῆς $\hat{A}$. Νά δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Delta \cdot B'\Gamma'$.

Ἀπόδειξις:

Ἐπειδή $A\Delta \parallel BB' \Longrightarrow (AB\Delta) = (AB'\Delta)$ (1).

Ὁμοίως $(A\Gamma\Delta) = (A\Gamma'\Delta)$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow (AB\Gamma) = (B'\Delta\Gamma') = \frac{1}{2} A\Delta \cdot B'\Gamma'$.



598. $\upsilon_\alpha = \rho_\alpha \Longrightarrow 2\alpha = \beta+\gamma$.

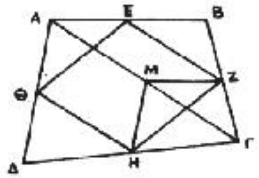
Ἀπόδειξις:

Διότι $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \rho_\alpha (\tau-\alpha)$. Ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τήν ὑπόθεσιν γίνεται $\alpha = 2(\tau-\alpha) \Longrightarrow 2\alpha = \beta+\gamma$.

599. Ἄν $AB\Gamma\Delta$ κυρτόν τετράπλευρον καί E,Z,H,Θ τά μέσα τῶν πλευρῶν του τότε $(AB\Gamma\Delta) = 2(EZH\Theta)$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω M τό μέσον τῆς $A\Gamma$. Εἶναι $\hat{HMZ} = \hat{\Theta AE}$ καί $(EZH\Theta) = (AEZM) + (A\Theta HM) =$
$= \frac{1}{2}(AB\Gamma) + \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.



600. Ἔστω τριγώνου $A_1A_2A_3$ καί M τυχόν σημεῖον. Θέτομεν
a_1, a_2, a_3 τάς πλευράς τοῦ $A_1\hat{A}_2A_3$
$(\overline{A_2A_3M}) = \overline{E_1}$ (1), $(\overline{A_3A_1M}) = \overline{E_2}$, $(\overline{A_1A_2M}) = \overline{E_3}$
$\overline{A_1M} = \overline{x_1}$, $\overline{A_2M} = \overline{x_2}$, $\overline{A_3M} = \overline{x_3}$
A_i' τό σημεῖον τομῆς τῆς A_iM μετά τῆς πλευρᾶς a_i
$\overline{MA_1'} = \overline{u_1}$, $\overline{MA_2'} = \overline{u_2}$, $\overline{MA_3'} = \overline{u_3}$.

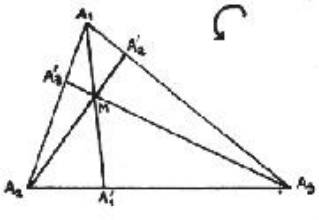
Θά δείξωμεν ὅτι α) $\frac{\overline{x_1}}{\overline{u_1}} = \frac{\overline{E_2}+\overline{E_3}}{\overline{E_1}}$ β) $\frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_2'A_3}} = \frac{\overline{E_2}}{\overline{E_3}}$.

Ἀπόδειξις:

α) $\frac{\overline{x_1}}{\overline{u_1}} = \frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_1'}} = \frac{\overline{E_3}}{(\overline{A_2A_1'M})} = \frac{\overline{E_3}}{(\overline{A_1'A_2M})} =$
$= \frac{\overline{E_2}+\overline{E_3}}{\overline{E_1}}$.

β) $\frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_2'A_3}} = \frac{(\overline{A_1A_2A_2'})}{(\overline{A_2A_1A_2'})} = \frac{(\overline{A_2A_1'M})}{(\overline{A_2MA_2'})} =$

$= \frac{(\overline{A_1A_2A_2'}) - (\overline{A_2A_1'M})}{(\overline{A_2A_1A_2'}) - (\overline{A_2MA_2'})} = \frac{\overline{E_2}}{\overline{E_3}}$.



---

(1) $(\overline{A_2A_3M}) = \overline{E_1}$: προσανατολισμένον ἐμβαδόν (ἰδέ 7.5).

601. Διά τά δεδομένα τῆς Ἀσκ. 600 νά ἀποδειχθῆ ὅτι

α) $\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}+\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+\bar{u}_2}+\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_3+\bar{u}_3}=2$ β) $\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}+\frac{\bar{u}_2}{\bar{x}_2+\bar{u}_2}+\frac{\bar{u}_3}{\bar{x}_3+\bar{u}_3}=1$.

Ἀπόδειξις:

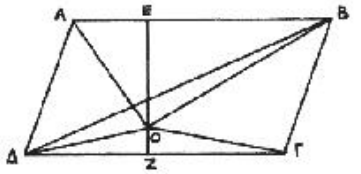
α) $\frac{\bar{x}_1}{\bar{u}_1}=\frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}_1}\Rightarrow\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}=\frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}}$. Ἄρα $\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}+\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2+\bar{u}_2}+\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_3+\bar{u}_3}=\frac{2(\bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3)}{\bar{E}}=\frac{2\bar{E}}{\bar{E}}=2$.

β) $\frac{\bar{x}_1}{\bar{u}_1}=\frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}_1}\Rightarrow\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}=\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}}$. Ἄρα $\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1+\bar{u}_1}+\frac{\bar{u}_2}{\bar{x}_2+\bar{u}_2}+\frac{\bar{u}_3}{\bar{x}_3+\bar{u}_3}=\frac{\bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}}=1$.

602. Ἐάν εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, λάβωμεν τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον Ο θά εἶναι

α) $(AOB)+(\Gamma O\Delta)=(AO\Delta)+(\Gamma OB)$.

β) $(BO\Delta)=|(AOB)-(B O\Gamma)|$.



Ἀπόδειξις:

α) $(AOB)+(\Gamma O\Delta)=\frac{1}{2}AB\cdot OE+\frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot OZ=$
$=\frac{1}{2}AB\cdot EZ=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$

β) $(BO\Delta)=(B\Gamma\Delta)-(\Gamma O\Delta)-(B O\Gamma)=$
$=(AOB)+(\Gamma O\Delta)-(\Gamma O\Delta)-(B O\Gamma)=(AOB)-(B O\Gamma)$.

603. Ἐάν Η τό ὀρθόκεντρον τριγώνου καί τεθῆ $AH=\alpha'$, $BH=\beta'$, $\Gamma H=\gamma'$ τότε $\frac{\alpha\beta'}{\alpha\beta}+\frac{\beta\gamma'}{\beta\gamma}+\frac{\gamma\alpha'}{\gamma\alpha}=1$.

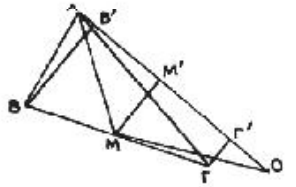
Ἀπόδειξις:

Εἶναι $B\hat{H}\Gamma+\hat{A}=2^{\text{L}}$ (διότι ἔχουν τάς πλευράς καθέτους). Ἄρα $\frac{(BH\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}$ κ.τ.λ.

604. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ διάμεσος ΑΜ καί τυχόν σημεῖον Ο. Νά δειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΟΑΜ ἰσοῦται πρός τό ἡμιάθροισμα ἤ τήν ἡμιδιαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΑΓ, καθ' ὅσον τά Β, Γ κεῖνται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΟΑ ἤ ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ εὑρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΟΑ. Προβάλλομεν τά σημεῖα Β, Μ, Γ ἐπί τήν ΟΑ. Θά εἶναι $MM'=\frac{BB'+\Gamma\Gamma'}{2}$ (1).



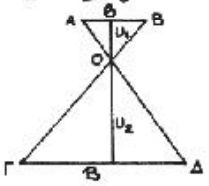
Πολλαπλασιάζομεν τήν ἰσότητα (1) ἐπί $\frac{1}{2}OA$ καί λαμβάνεται $(OAM)=\frac{(OAB)+(OA\Gamma)}{2}$.

Εἰς τήν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ ΑΒ, ΑΓ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΟΑ ἡ ἀπόδειξις μέ τόν ἴδιον τρόπον λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $MM'=\frac{|BB'-\Gamma\Gamma'|}{2}$.

605. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν μή κυρτοῦ τραπεζίου μέ ὕψος υ καί βάσεις β καί Β δίδεται ἀπό τόν τύπον $E=\frac{1}{2}\upsilon\cdot\frac{B^2+\beta^2}{B+\beta}$.

Ἀπόδειξις:

Μή κυρτόν $(AB\Gamma\Delta)=(AOB)+(\Gamma O\Delta)=$
$=\frac{1}{2}u_1\beta+\frac{1}{2}u_2B$ (1).

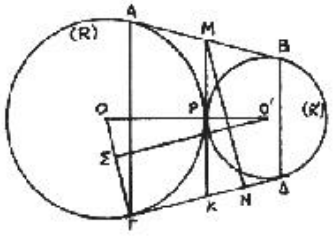


$A\hat{O}B\sim\Delta\hat{O}\Gamma\Rightarrow\frac{u_1}{u_2}=\frac{\beta}{B}\Rightarrow\frac{u_1}{\upsilon}=\frac{\beta}{B+\beta}\Rightarrow$
$\Rightarrow u_1=\frac{\beta\upsilon}{B+\beta}$. Ὁμοίως $u_2=\frac{B\upsilon}{B+\beta}$.

Ὁ τύπος (1) γίνεται: μή κυρτὸν $(AB\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\upsilon\frac{\beta^2}{\beta+\beta}+\frac{1}{2}\upsilon\frac{\beta^2}{\beta+\beta}=\frac{1}{2}\upsilon\frac{\beta^2+\beta^2}{\beta+\beta}$.

606. Δύο περιφέρειαι (O,R) καὶ (O',R') ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας AB καὶ $\Gamma\Delta$. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν R, R' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου $AB\Delta\Gamma$.

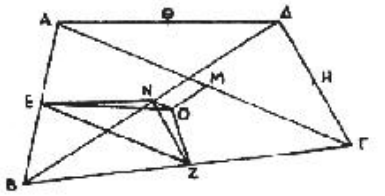
Λύσις:



Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ μέσον M. Ἔστω MN ἡ ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τὴν $\Gamma\Delta$. Εἶναι ὡς γνωστὸν $(AB\Delta\Gamma)=\Gamma\Delta\cdot MN$ (1). $\Gamma\Delta=2\sqrt{RR'}$ (Ἄσκ. 263). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\overset{\triangle}{KNM}$, $\overset{\triangle}{OO'\Sigma}$, ὅπου $O'\Sigma\perp OI$, ὑπολογίζεται ἡ MN ὡς ἑξῆς: $\frac{MN}{O'\Sigma}=\frac{MK}{OO'}\Rightarrow\frac{MN}{\Gamma\Delta}=\frac{\Gamma\Delta}{R+R'}\Rightarrow$ $\Rightarrow MN=\frac{4RR'}{R+R'}$. καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται $(AB\Delta\Gamma)=\frac{8RR'\sqrt{RR'}}{R+R'}$.

607. Ἀπὸ τὸ μέσον ἑκάστης τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον. Συνδέομεν τὴν τομὴν τῶν παραλλήλων αὐτῶν μὲ τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον διηρέθη εἰς τέσσερα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

Ἀπόδειξις:



$ON\parallel EZ\Rightarrow(EOZ)=(ENZ)\Rightarrow$

$\Rightarrow(EOZB)=(ENZB)=(ENZ)+(EBZ)$ (1).

$\overset{\triangle}{ENZ}\sim\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ (λόγος ὁμοιότητος $\frac{1}{2}$) (2).

$\overset{\triangle}{EBZ}\sim\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (λόγος ὁμοιότητος $\frac{1}{2}$) (3).

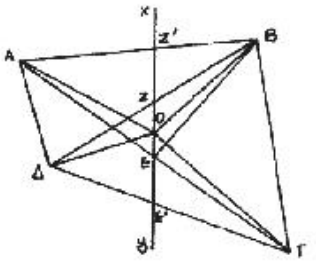
(2) $\Rightarrow(ENZ)=\frac{1}{4}(A\Delta\Gamma)$ (4).

(3) $\Rightarrow(EBZ)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)$ (5).

(4), (5), (1) $\Rightarrow(EOZB)=\frac{1}{4}(A\Delta\Gamma)+\frac{1}{4}(AB\Gamma)=\frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

608. Ἐὰν O τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐσωτερικοῦ τριγώνου EZ τοῦ κυκλέως του τὰ μέσα τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ νὰ δειχθῇ ὅτι $(AOB)+(\Gamma O\Delta)=(AO\Delta)+(BO\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:



$(AOB)=(AEB)-(AOE)-(BOE)=$

$=\frac{1}{2}(AB\Gamma)-(\Gamma OE)-(\Delta OE)$ (1).

$(\Delta O\Gamma)=(\Delta E\Gamma)+(\Gamma OE)+(\Delta OE)=$

$=\frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)+(\Gamma OE)+(\Delta OE)$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow(AOB)+(\Delta O\Gamma)=\frac{1}{2}(AB\Gamma)+$

$+\frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

Σημειώσεις:

Δείξατε ἀκόμη ὅτι τὸ θεώρημα ἰσχύει δι' ὅλο τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα $E'Z'$ (ἰδὲ σχῆμα). Ἐὰν OE ἡμιευθεῖαν (Z',x) ποία ἡ σχέσις τῶν ἐμβαδῶν; Διατυπώσατε τὸ θεώρημα ὡς θέμα τῆς προσανατολισμένης Γεωμετρίας.

609. Διὰ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}+\hat{B}'=2^L$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{a}{a'}=\frac{\beta}{\beta'}$.

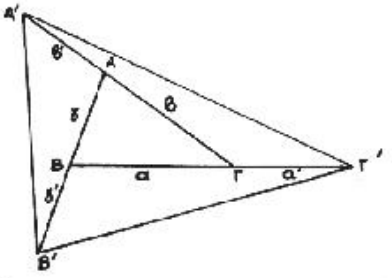
Απόδειξις:

$\hat{A}=\hat{A}' \Longrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')}=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$ (1). $\hat{B}+\hat{B}'=2^L \Longrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} \Longrightarrow \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$.

610. Τριγώνου $AB\Gamma$ αἱ πλευραὶ α,β,γ προεκτείνονται κατὰ τμήματα α',β',γ' καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἑξαγώνου κορυφαὶ τὰ πέρατα τῶν προεκτάσεων.

Λύσις:



Ζητοῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

$\frac{(A'AB')}{E}=\frac{\beta'(\gamma+\gamma')}{\beta\gamma}$ (1).

$\frac{(B'B\Gamma')}{E}=\frac{\gamma'(\alpha+\alpha')}{\alpha\gamma}$ (2).

$\frac{(\Gamma'\Gamma A')}{E}=\frac{\alpha'(\beta+\beta')}{\alpha\beta}$ (3).

(1),(2),(3) $\Longrightarrow (A'B'\Gamma')=$

$=\frac{E}{\alpha\beta\gamma}(\alpha\beta\gamma+\alpha'\beta\gamma+\beta'\gamma\alpha+\gamma'\alpha\beta+\alpha\beta'\gamma'+\beta\gamma\alpha'+\gamma\alpha'\beta')$ (4).

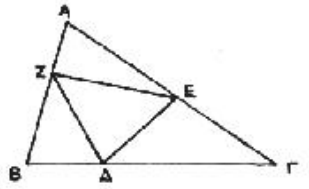
Παρατήρησις:

Ἐὰν $\alpha'=\lambda\alpha, \beta'=\mu\beta, \gamma'=\nu\gamma$ ὁ τύπος (4) γίνεται $(A'B'\Gamma')=E(1+\lambda+\mu+\nu+\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu)$.

Ἐὰν ἀκόμη $\lambda=\mu=\nu=\rho$ $(A'B'\Gamma')=E(1+3\rho+3\rho^2)$.

611. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ,E,Z ὥστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\lambda}{\lambda'}$, $\frac{\Gamma E}{EA}=\frac{\mu}{\mu'}$ καὶ $\frac{AZ}{ZB}=\frac{\nu}{\nu'}$ Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\Delta EZ)=\frac{(\lambda\mu\nu+\lambda'\mu'\nu')E}{(\lambda+\lambda')(\mu+\mu')(\nu+\nu')}$.

Απόδειξις:



$(\Delta EZ)=(AB\Gamma)-(AZE)-(B\Delta Z)-(\Gamma E\Delta) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{(\Delta EZ)}{E}=1-\frac{(AZE)}{E}-\frac{(B\Delta Z)}{E}-\frac{(\Gamma E\Delta)}{E}$ (1).

$\frac{(AZE)}{E}=\frac{AZ\cdot AE}{\beta\gamma}$, $AZ=\frac{\nu}{\nu+\nu'}\gamma$, $AE=\frac{\mu'}{\mu+\mu'}\beta$.

Ἄρα $\frac{(AZE)}{E}=\frac{\nu\mu'}{(\nu+\nu')(\mu+\mu')}$ (2). Ὁμοίως

$\frac{(B\Delta Z)}{E}=\frac{\lambda\nu'}{(\lambda+\lambda')(\nu+\nu')}$ (3) καὶ $\frac{(\Gamma E\Delta)}{E}=\frac{\mu\lambda'}{(\mu+\mu')(\lambda+\lambda')}$ (4).

(1),(2),(3),(4) $\Longrightarrow \frac{(\Delta EZ)}{E}=1-\frac{\nu\mu'}{(\nu+\nu')(\mu+\mu')}-\frac{\lambda\nu'}{(\lambda+\lambda')(\nu+\nu')}-\frac{\mu\lambda'}{(\mu+\mu')(\lambda+\lambda')}=\frac{\lambda\mu\nu+\lambda'\mu'\nu'}{(\lambda+\lambda')(\mu+\mu')(\nu+\nu')}$.

Τελικῶς ἔχομεν $(\Delta EZ)=\frac{(\lambda\mu\nu+\lambda'\mu'\nu')E}{(\lambda+\lambda')(\mu+\mu')(\nu+\nu')}$ (5).

Ὁ τύπος (5) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\Delta EZ)=\frac{(B\Delta\cdot\Gamma E\cdot AZ+\Delta\Gamma\cdot EA\cdot ZB)\cdot E}{\alpha\beta\gamma}$$

ἢ ἀκόμη $4R(\Delta EZ)=B\Delta\cdot\Gamma E\,AZ+\Delta\Gamma\cdot EA\cdot ZB$.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι $A\Delta, BE, \Gamma Z$ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου θὰ ἰσχύῃ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva, δηλαδὴ $\lambda\mu\nu=\lambda'\mu'\nu'$, ὅτε ὁ τύπος (5) γίνεται

$$(\Delta EZ)=\frac{2\lambda\mu\nu E}{(\lambda+\lambda')(\mu+\mu')(\nu+\nu')} \quad (6).$$

Ἐφαρμογαὶ τῶν τύπων (5) καὶ (6):

α) Τὰ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ἐξωτερικῶν δικοτόμων ἔχει ἐμβαδὸν μηδέν. Ἤτοι οἱ πόδες τῶν ἐξωτερικῶν δικοτόμων κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον (5) ἐὰν τεθῇ $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=-\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\Gamma E}{EA}=-\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{AZ}{ZB}=-\frac{\beta}{\alpha}$.

β) Διὰ ἐφαρμογῆς τοῦ (5) προκύπτει τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου ὡς καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

γ) Ἐὰν λάβωμεν τὰ σημεῖα Δ',E',Z' συμμετρικὰ τῶν Δ,E,Z ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν θὰ εἶναι ἐκ τοῦ τύπου (5) $(\Delta'E'Z')=(\Delta EZ)$.

δ) Ἐὰν τὰ σημεῖα M,M' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὰ ποδικὰ τρίγωνα τῶν M,M' θὰ εἶναι ἰσοδύναμα

ἐκ τοῦ τύπου (5).

ε) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον (6)

$$(\Delta EZ) = \frac{2\alpha\theta\gamma E}{(\alpha+\theta)(\theta+\gamma)(\gamma+\alpha)}.$$

στ) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου $\frac{\delta\alpha}{\delta\Gamma} = \frac{\epsilon\varphi B}{\epsilon\varphi\Gamma}$ κ.τ.λ. $\Longrightarrow (\overline{\Delta EZ}) = 2(\overline{AB\Gamma})\,\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$ (προφανῆ ἐμβαδά).

ζ) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$

$$(\Delta EZ) = \frac{2E^3}{\tau\cdot\alpha\theta\gamma}.$$

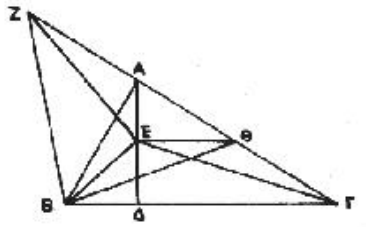
612. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$.

Λύσις:

$(I_\alpha I_\beta I_\gamma) = E + (BI_\alpha\Gamma) + (\Gamma I_\beta A) + (AI_\gamma B) = E + \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha + \frac{1}{2}\theta\rho_\theta + \frac{1}{2}\delta\rho_\gamma = E + \frac{1}{2}\alpha\frac{E}{\tau-\alpha} + \frac{1}{2}\beta\frac{E}{\tau-\beta} + \frac{1}{2}\gamma\frac{E}{\tau-\gamma}$ καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων προκύπτει $(I_\alpha I_\beta I_\gamma) = \frac{\tau\alpha\theta\gamma}{2E}$.

613. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΑΔ. Εἰς τυχὸν σημεῖον Ε τοῦ ὕψους φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ α) $(BAZ) = (B\Gamma E)$ β) Ἐὰν Θ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΑΓ θὰ εἶναι $AZ = \Gamma\Theta$.

Ἀπόδειξις:



α) Τὸ τετράπλευρον ΒΕΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ συνεπῶς $\hat{ZBA} = \hat{ZEA}$. Ἀλλὰ $\hat{ZEA} = \hat{EB\Delta}$ διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους. Τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΕΒΓ ἔχουν $\hat{ZBA} = \hat{EB\Gamma}$. Ἄρα $\frac{(ABZ)}{(EB\Gamma)} = \frac{AB\cdot BZ}{B\Gamma\cdot BE}$ (1). Ἀλλὰ $\hat{EBZ} = \hat{AB\Gamma} \Longrightarrow \Longrightarrow \hat{BEZ} \sim \hat{B\Delta\Gamma} \Longrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{BE}{BZ}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{(ABZ)}{(EB\Gamma)} = 1$.

β) $(B\Theta\Gamma) = (B\Theta\Gamma)$. Ἀλλὰ $(B\Theta\Gamma) = (BAZ)$ συνεπῶς $(B\Theta\Gamma) = (BAZ) \Longrightarrow \Gamma\Theta = AZ$.

614. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Ο εἶναι τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον καὶ $\Delta = AO \cap B\Gamma$, $E = BO \cap A\Gamma$, $Z = \Gamma O \cap AB$ τότε $\frac{AO}{O\Delta} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:

$\frac{AO}{O\Delta} = \frac{(ABO)}{(B\Delta O)} = \frac{(AO\Gamma)}{(O\Delta\Gamma)} = \frac{(ABO)+(AO\Gamma)}{(B\Gamma O)} = \frac{(ABO)}{(B\Gamma O)} + \frac{(AO\Gamma)}{(BO\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma} + \frac{AZ}{ZB}$.

Ἰδὲ ἐξ ἄλλου ἄσκησιν 600 τῆς ὁποίας ἡ ἀνωτέρω εἶναι ἁπλῆ ἐφαρμογή.

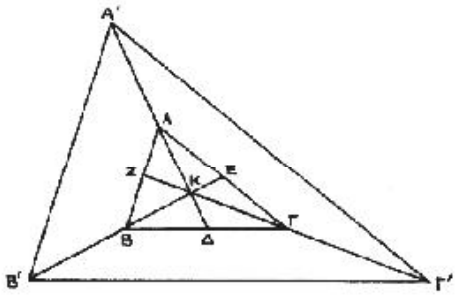
615. Προεκτείνομεν πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς ἑκάστην διάμεσον τριγώνου ΑΒΓ μέχρι διπλασιασμοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

Λύσις:

$\frac{KA}{KA'} = \frac{2/3\,\mu_\alpha}{3/3\,\mu_\alpha} = \frac{2}{5}$. Ὁμοίως $\frac{KB}{KB'} = \frac{2}{5}$. Ἄρα $AB \parallel A'B'$. Ὁμοίως $B\Gamma \parallel B'\Gamma'$, $A\Gamma \parallel A'\Gamma'$ ἤτοι τὰ τρίγωνα $\hat{AB\Gamma}$ καὶ $\hat{A'B'\Gamma'}$ εἶναι ὅμοια μὲ λόγον ὁμοιότητος $\lambda = \frac{2}{5}$.

Συνεπῶς $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Longrightarrow$

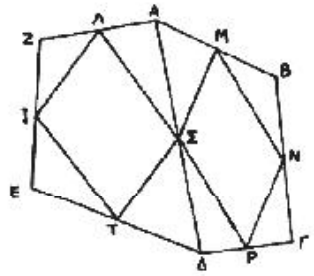
$\Longrightarrow (A'B'\Gamma') = \frac{25}{4}(AB\Gamma)$.



616. Ἐὰν δύο ἑξαγώνων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τότε τὰ ἑξάγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὴν ΑΔ. Λαμβάνομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν καὶ τὸ μέσον τῆς ΑΔ. Τὰ τετράπλευρα ΙΛΣΤ, ΜΝΡΣ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ εἶναι $(AZB\Delta) = 2(\Lambda IT\Sigma)$, $(AB\Gamma\Delta) = 2(MNP\Sigma)$. Ἄρα $(AB\Gamma\Delta EZ) =$ $= 2(\Lambda IT\Sigma) + 2(MNP\Sigma)$.

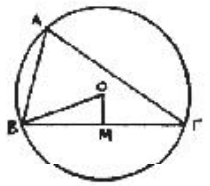


617. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν του ἐπὶ ἕναν παράγοντα ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς περιεχομένης γωνίας. Ἤτοι $(AB\Gamma) = K(A)\cdot\beta\gamma$. (Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας $K(A) = \frac{1}{2}\eta\mu A$).

Ἀπόδειξις:

Εἶναι $(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R}\cdot\beta\gamma$ (1). Ἐὰν λάβωμεν ὅλα τὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς γωνίας Α, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΜΟ διατηρεῖ πάντοτε τὰς ἰδίας ὀξείας γωνίας του $\hat{A}$, $90° - \hat{A}$ (ἐὰν ἡ $\hat{A}$ εἶναι ἀμβλεῖα $180° - \hat{A}$, $\hat{A} - 90°$). Ἄρα ὁ λόγος $\frac{BM}{OB} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{R}$ εἶναι σταθερὸς δι' ὅλα τὰ τρίγωνα γωνίας Α. Θέτομεν $\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{R} = K(A)$ (2).

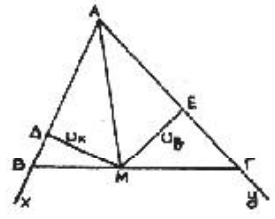
(1), (2) $\Longrightarrow (AB\Gamma) = K(A)\cdot\beta\gamma$.



618. Δίδεται μία γωνία xAy καὶ σημεῖον Μ ἐντὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ σημείου Μ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΒΜΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{(ABM)} + \frac{1}{(A\Gamma M)} =$ $=$ σταθερόν (ἀνεξάρτητον τῆς τεμνούσης).

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν ἐκ τοῦ Μ τὰς καθέτους ΜΔ καὶ ΜΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Ax καὶ Ay. Θέτομεν $M\Delta = u_x$, $ME =$ $= u_y$. Θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{(ABM)} + \frac{1}{(A\Gamma M)} = \frac{(AB\Gamma)}{(ABM)(A\Gamma M)} =$ $= \frac{K(A)\beta\gamma}{\frac{1}{2}\gamma u_x \cdot \frac{1}{2}\beta u_y} = \frac{4K(A)}{u_x u_y} =$ σταθερόν.



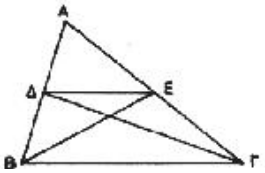
619. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ABE)^2 = (A\Gamma\Delta)^2 = (A\Delta E)(AB\Gamma)$.

Απόδειξις:

$\frac{(A\Delta E)}{(ABE)} = \frac{A\Delta}{AB}$ (1).

$\frac{(A\Gamma B)}{(AEB)} = \frac{A\Gamma}{AE}$ (2).

$\frac{(A\Delta E)(AB\Gamma)}{(ABE)^2} = \frac{A\Delta}{AE}\cdot\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta}{AE}\cdot\frac{AE}{A\Delta} = 1.$



620. Τό ἐμβαδόν ὀξυγωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του ἐπί τήν ἡμιπερίμετρον τοῦ ὀρθικοῦ.

Απόδειξις:

Ἔστω γνωστόν (Ἄσκ. 109) $AO \perp ZE$, $BO \perp \Delta Z$, $\Gamma O \perp \Delta E$.

$(AB\Gamma) = (OEAZ) + (OZB\Delta) + \text{μή κυρτόν } (O\Delta\Gamma E)$

ἤ $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}OA\cdot ZE + \frac{1}{2}OB\cdot\Delta Z + \frac{1}{2}O\Gamma\cdot\Delta E =$

$= R\cdot\frac{\Delta E+EZ+Z\Delta}{2}$.

Ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

Ἔστω $\hat{A} > 1^L$, ὁ τύπος γίνεται

$(AB\Gamma) = R\,\frac{\Delta E+\Delta Z-EZ}{2}$.

Διότι:

$(AB\Gamma) = \text{μή κυρτόν } (O\Delta BE) + (\Delta\Gamma Z) - (\Delta ZO) -$

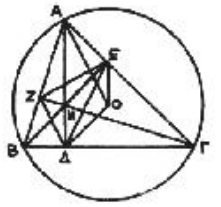
$-$ μή κυρτόν $(AEOZ)$.

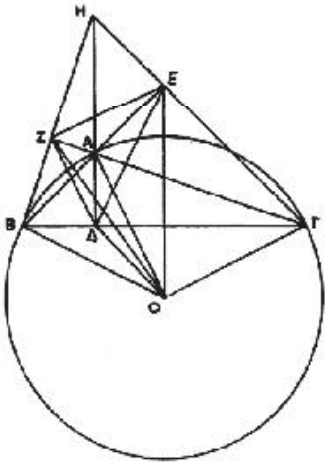
μή κυρτόν $(O\Delta BE) = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot\Delta E$

$(\Delta\Gamma Z) - (\Delta ZO) = \frac{1}{2}O\Gamma\cdot\Delta Z$

μή κυρτόν $(AEOZ) = \frac{1}{2}OA\cdot ZE$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν προηγουμένην ἰσότητα.





621. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Φέρομεν τήν διάμεσον $A\Delta$ αὐτοῦ καί ἐκ τοῦ Δ τήν ΔH παράλληλον καί ἴσην πρός τήν δευτέραν διάμεσον BE αὐτοῦ. Νά δειχθῇ ὅτι α) Ἡ AH εἶναι ἴση καί παράλληλος πρός τήν τρίτην διάμεσον.

β) $(A\Delta H) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

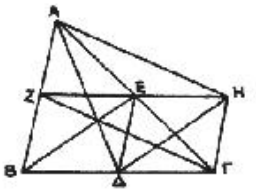
γ) Ἔστω $(A\Delta H) = E_1$. Τό τρίγωνον μέ πλευράς τάς διαμέσους τοῦ $A\hat{\Delta}H$ ἔστω E_2. E_3 τό τρίγωνον μέ πλευράς τάς διαμέσους τοῦ E_2 κ.ο.κ. Ποῖον τό ἄθροισμα τῶν ἀπείρων οὕτως κατασκευαζομένων τριγώνων;

Λύσις:

α) ΔHEB παραλληλόγραμμον $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow EH \parallel\!\!\parallel B\Delta \Longrightarrow EH \parallel \Delta\Gamma$. Ὅθεν οἱ διαγώνιοι τοῦ $AZ\Gamma H$ διχοτομοῦνται.

β) Τό E εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ $A\hat{\Delta}H$. Ἄρα $(A\Delta H) = 3(A\Delta E)$. Ἀλλά $(A\Delta E) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$. Ἄρα $(A\Delta H) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

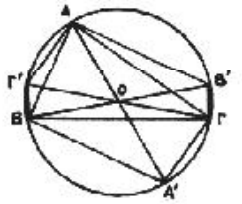


γ) $E_2 = \frac{3}{4}E_1$, $E_3 = \frac{3}{4}E_2$, ..., $E_{\rho+1} = \frac{3}{4}E_\rho$. Ἤτοι τά $E_1, E_2, \ldots, E_\rho, \ldots$ ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικήν πρόοδον, συνεπῶς $\Sigma = E_1 + E_2 + \cdots + E_\rho + \cdots =$

$= \frac{E_1}{1-3/4} = 4E_1 = 4\cdot\frac{3}{4}E = 3E$.

622. Ἔστω A', B', Γ' τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῶν κορυφῶν A, B, Γ τριγώνου $AB\Gamma$ πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύκλον. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(BA'\Gamma B'A\Gamma') = 2(AB\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:



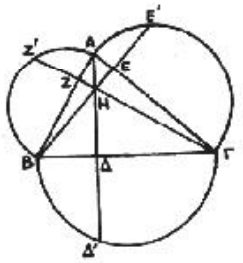
Τὸ ἑξάγωνον $BA'\Gamma B'A\Gamma'$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τετράπλευρα $\Gamma B'A\Gamma'$, $\Gamma A'B\Gamma'$ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς O.

Ἀλλὰ $(AO\Gamma) = (AO\Gamma')$ (1), $(AOB) = (AOB')$ (2), $(BO\Gamma) = (B'O\Gamma)$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow (AB\Gamma) = (\Gamma B'A\Gamma')$ καὶ συνεπῶς $(BA'\Gamma B'A\Gamma') = 2(AB\Gamma)$.

623. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Τὰ ὕψη $A\Delta, BE, \Gamma Z$ τέμνουν τὰς ἡμιπεριφερείας εἰς Δ', E', Z' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma)^2 = (B\Delta'\Gamma)^2 + (\Gamma E'A)^2 + (AZ'B)^2$.

Ἀπόδειξις:



Ὡς γνωστὸν (Ἄσκ. 312) $B\Delta \cdot \Delta\Gamma = AH \cdot H\Delta$.

Ἀλλὰ $B\Delta \cdot \Delta\Gamma = \Delta\Delta'^2$. Ἄρα $\Delta H \cdot AH = \Delta\Delta'^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{B\Gamma \cdot \Delta H}{2} \cdot \frac{B\Gamma \cdot AH}{2} = \left(\frac{\Delta\Delta' \cdot B\Gamma}{2}\right)^2 \Longrightarrow (AB\Gamma)(\Delta H\Gamma) = (B\Delta'\Gamma)^2$ (1)

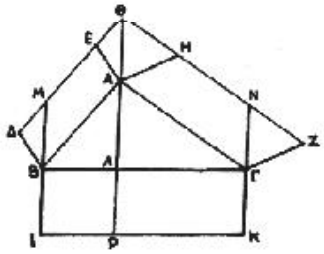
Ὁμοίως $(AB\Gamma)(\Gamma HA) = (\Gamma E'A)^2$ (2) καὶ $(AB\Gamma)(AHB) = (\Gamma Z'B)^2$ (3).

Ἡ πρόσθεσις τῶν (1), (2), (3) δίδει τὸ ζητούμενον.

624. Θεώρημα τοῦ Πάππου.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζομεν αὐθαιρέτως τὰ παραλληλόγραμμα $AB\Delta E$ καὶ $A\Gamma ZH$. Ἔστω $\Theta = \Delta E \cap ZH$. Φέρομεν $BI \parallel\!\!= \Theta A$ καὶ κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $BI K\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Delta E) + (A\Gamma ZH) = (BIK\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:



Προεκτείνομεν τὴν ΘA καὶ λαμβάνομεν $\Lambda P \parallel\!\!= \Theta A$. Ἔστω $M = BI \cap \Delta E$, $N = \Gamma K \cap ZH$.

Εἶναι $(AB\Delta E) = (AB M\Theta)$ (1)

$(AB M\Theta) = (BI P\Lambda)$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow (AB\Delta E) = (BI P\Lambda)$ (3).

Ὁμοίως $(A\Gamma ZH) = (\Gamma K P\Lambda)$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow (AB\Delta E) + (A\Gamma ZH) = (BIK\Gamma)$.

625. Δίδεται κυκλικὸν τόξον $B\Gamma$ μήκους a καὶ A τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma) < \frac{a^3}{16R}$.

Ἀπόδειξις:

Εἶναι ὡς γνωστὸν $AB < \overset{\frown}{AB} = \frac{a}{2}$, $A\Gamma < \overset{\frown}{A\Gamma} = \frac{a}{2}$ καὶ $B\Gamma < \overset{\frown}{B\Gamma} = a$. Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἐκφράσεις κατὰ μέλη. Θὰ ἔχωμεν $AB \cdot A\Gamma \cdot B\Gamma < \frac{a^3}{4}$. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $AB \cdot A\Gamma \cdot B\Gamma = 4R(AB\Gamma)$ καὶ συνεπῶς $(AB\Gamma) < \frac{a^3}{16R}$.

626. Ἐὰν δύο ὁμόκεντρα τετράγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλή-

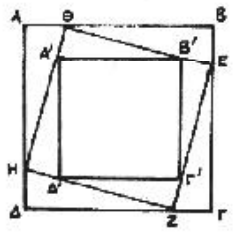
λους νά δειχθῆ ὅτι τό τετράγωνον τό ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τό ἕν καί περιγεγραμμένον εἰς τό ἄλλο εἶναι μέσον ἀνάλογον αὐτῶν.

Ἀπόδειξις:

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι $A\hat{\Theta}H = B\hat{E}\Theta = \Gamma\hat{Z}E = \Delta\hat{H}Z$ καί $A'\hat{\Theta}B' = B'\hat{E}\Gamma' = \Gamma'\hat{Z}\Delta' = \Delta'\hat{H}A'$.

Ἀκόμη $\Theta\hat{A}H \sim A'\hat{\Theta}B' \Rightarrow \frac{\Theta H}{A'B'} = \frac{A\Theta}{\Theta A'}$ $= \frac{AH}{\Theta B'} = \frac{A\Theta + AH}{\Theta A' + \Theta B'} = \frac{AB}{\Theta H}$.

Ἄρα $\Theta H^2 = AB \cdot A'B'$ κ.τ.λ.



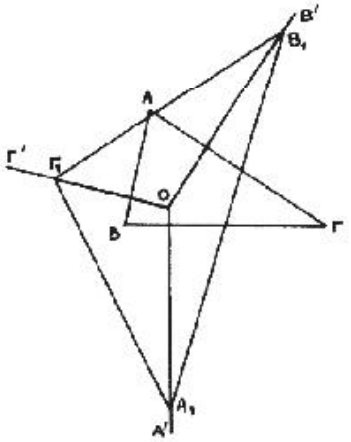
627. Ἀπό σημεῖον Ο ἐντός τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τάς καθέτους $OA', OB', O\Gamma'$ ἐπί τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καί ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $OA_1 = B\Gamma$, $OB_1 = \Gamma A$, $O\Gamma_1 = AB$. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό σημεῖον Ο εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Ἀπόδειξις:

$\hat{B} + A_1\hat{O}\Gamma_1 = 2L \Rightarrow (A_1O\Gamma_1) = (AB\Gamma)$.

Ὁμοίως $(B_1O\Gamma_1) = (AB\Gamma)$ καί $(A_1OB_1) = (AB\Gamma)$.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό Ο εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ $A_1\hat{B}_1\Gamma_1$. Διότι ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι $(A_1O\Gamma_1) = (A_1OB_1)$ συμπεραίνομεν ὅτι τά B_1, Γ_1 ἰσαπέχουν τῆς A_1O. Ἤτοι ἡ εὐθεῖα A_1O διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμον τμῆμα $B_1\Gamma_1$ κ.τ.λ.



628. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Ο ἐντός αὐτοῦ. Ἐξωτερικῶς τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ κατασκευάζομεν τά ὀρθογώνια $B\Gamma\Delta E$, $AB\Theta H$, $\Gamma\Lambda AI$ ὥστε $(B\Gamma\Delta E) = (AB\Theta H) = (\Gamma A\Theta I) = 2(AB\Gamma)$. Νά δειχθῆ ὅτι $(OE\Delta) + (OI\Theta) + (OZH) = 4(AB\Gamma)$.

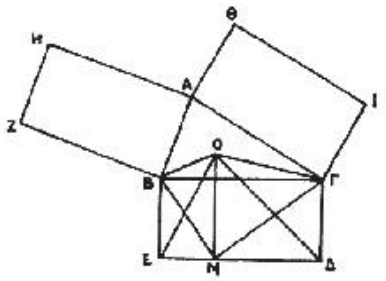
Ἀπόδειξις:

$(BOE) = (BME)$, $(\Gamma O\Delta) = (\Gamma M\Delta)$. Ἄρα $(BOE) + (\Gamma O\Delta) = \frac{1}{2}(B\Gamma\Delta E) = (AB\Gamma)$.

$(OE\Delta) = (BO\Gamma\Delta E) - (BOE) - (\Gamma O\Delta) = (BO\Gamma) + (B\Gamma\Delta E) - (AB\Gamma) = (BO\Gamma) + (AB\Gamma)$ (1).

Ὁμοίως $(OI\Theta) = (AO\Gamma) + (AB\Gamma)$ (2), $(OZH) = (AOB) + (AB\Gamma)$ (3).

Προσθέτομεν τάς (1), (2), (3).

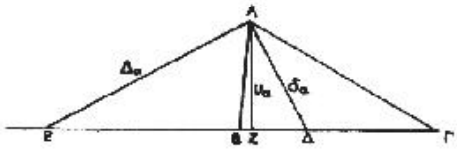


629. Εἰς πᾶν τρίγωνον $\frac{1}{\delta_\alpha^2} + \frac{1}{\Delta_\alpha^2} + \frac{1}{\delta_\beta^2} + \frac{1}{\Delta_\beta^2} + \frac{1}{\delta_\gamma^2} + \frac{1}{\Delta_\gamma^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4E^2}$.

Ἀπόδειξις:

Ἀπό τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΕ ἔχομεν ὡς γνωστόν $\frac{1}{\delta_\alpha^2} + \frac{1}{\Delta_\alpha^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$.

Ἀλλά $2E = \alpha u_\alpha \Rightarrow \frac{1}{u_\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{4E^2}$. Ἄρα $\frac{1}{\delta_\alpha^2} + \frac{1}{\Delta_\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{4E^2}$. Διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς

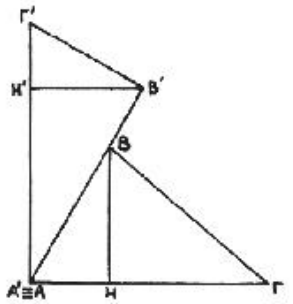


των α,β,γ θα έχωμεν δύο ακόμη εκέσεις. Η πρόσθεσις κατά μέλη δίδει το ζητούμενον.

630. Εάν αί γωνίαι A και A' δύο τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι συμπληρωματικαί τότε $\left(\frac{E}{a\beta}\right)^2+\left(\frac{E'}{a'\beta'}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Απόδειξις:

Τοποθετούμεν τά τρίγωνα όπως φαίνεται είς τό σχήμα.



Θά είναι $\hat{\Gamma A\Gamma'}=1^L$.

$2E=a\upsilon_a$, $2E'=a'\upsilon'_a$ (1).

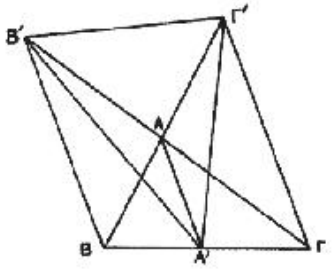
$\overset{\triangle}{BAH}\sim\overset{\triangle}{A'B'H'}\Longrightarrow\frac{\upsilon_a}{A'H'}=\frac{AH}{\upsilon'_a}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{\upsilon_a^2}{\gamma'^2-\upsilon_a'^2}=\frac{\gamma^2-\upsilon_a^2}{\upsilon_a'^2}\Longrightarrow\frac{\upsilon_a^2}{\gamma^2}+\frac{\upsilon_a'^2}{\gamma'^2}=1$ (2).

Εις τάς (1),(2) απαλείφομεν τά υ_a,υ'_a.

631. Διά των κορυφών A,B,Γ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τάς παραλλήλους πρός δοθείσαν διεύθυνσιν τεμνούσας τάς αντιστοίχους πλευράς του τριγώνου είς τά σημεία A',B',Γ'. Νά δειχθή ότι $(A'B'\Gamma')=2(AB\Gamma)$.

Απόδειξις:



$AA'\parallel BB'\Longrightarrow(A'B'A)=(A'BA)$ (1)

$AA'\parallel\Gamma\Gamma'\Longrightarrow(A'\Gamma'A)=(A'\Gamma A)$ (2)

$BB'\parallel\Gamma\Gamma'\Longrightarrow(\Gamma B'\Gamma')=(\Gamma B\Gamma')$ (3) Η

$(AB'\Gamma')=(\Gamma B'\Gamma')-(\Gamma A\Gamma')=(\Gamma B\Gamma')-(\Gamma A\Gamma')=$

$=(AB\Gamma)$ (4).

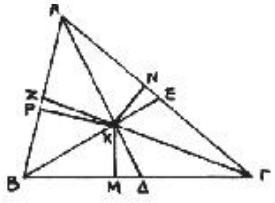
(1),(2),(4) $\Longrightarrow(A'B'\Gamma')=2(AB\Gamma)$.

632. Έστω M,N,P αί προβολαί του κέντρου βάρους K τριγώνου $AB\Gamma$ επί των πλευρών $B\Gamma,\Gamma A,AB$. Νά δειχθή ότι $(MNP)=\frac{4E^3}{9a^2\beta^2\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Απόδειξις:

$P\hat{K}N+\hat{A}=2^L\Longrightarrow\frac{(PKN)}{E}=\frac{KP\cdot KN}{\beta\gamma}=\frac{\upsilon_\beta\cdot\upsilon_\gamma}{9\beta\gamma}=$

$=\frac{\beta\upsilon_\beta}{9\beta^2}\cdot\frac{\gamma\upsilon_\gamma}{9\gamma^2}=\frac{4E^2}{9\beta^2\gamma^2}$ (1).



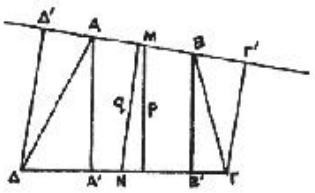
Όμοίως $(PKM)=\frac{4E^3}{9a^2\gamma^2}$ (2) και

$(MKN)=\frac{4E^3}{9a^2\beta^2}$ (3).

(1),(2),(3) $\Longrightarrow(MNP)=\frac{4E^3}{9a^2\beta^2\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

633. Δίδεται τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ και έστω p,q αί αποστάσεις των μέσων M,N των πλευρών $AB,\Gamma\Delta$ από τάς απέναντι πλευράς αυτών. Νά δειχθή ότι $2(AB\Gamma\Delta)=q\cdot AB+p\cdot\Gamma\Delta$.

Απόδειξις:



Έστω AA',BB' αί αποστάσεις των A,B από την πλευράν $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma',\Delta\Delta'$ αί αποστάσεις των Γ,Δ από την AB.

$(AB\Gamma\Delta)=(B\Delta\Gamma)+(BA\Delta)\Longrightarrow$

$\Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot BB' + \frac{1}{2}AB\cdot\Delta\Delta'$ (1).

$(AB\Gamma\Delta) = (\Gamma A\Delta) + (\Gamma BA) \Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot AA' + \frac{1}{2}AB\cdot\Gamma\Gamma'$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow 2(AB\Gamma\Delta) = AB\cdot\frac{\Gamma\Gamma'+\Delta\Delta'}{2} + \Gamma\Delta\cdot\frac{AA'+BB'}{2}$ (3).

Ἐκ τῶν τραπεζίων $\Gamma\Gamma'\Delta'\Delta$, $AA'B'B$ ἔχομεν $q = \frac{\Gamma\Gamma'+\Delta\Delta'}{2}$, $p = \frac{AA'+BB'}{2}$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow 2(AB\Gamma\Delta) = q\cdot AB + p\cdot\Gamma\Delta$.

634. Τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O,R). Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{OA^2}{O\Gamma^2} = \frac{AB\cdot A\Delta}{\Gamma B\cdot\Gamma\Delta}$.

Ἀπόδειξις:

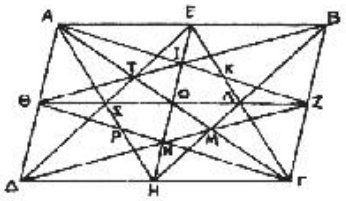
Αἱ $AO, BO, \Gamma O, \Delta O$ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἄρα $O\hat{A}B + O\hat{B}A + O\hat{A}\Gamma + O\hat{\Gamma}\Delta = 2^L \Longrightarrow A\hat{O}B + \Delta\hat{O}\Gamma = 2^L$ (1).

(1) $\Longrightarrow \frac{(AOB)}{(\Gamma O\Delta)} = \frac{OA\cdot OB}{O\Gamma\cdot O\Delta}$ (2). Ἀλλὰ $(AOB) = \frac{1}{2}R\cdot AB$, $(\Gamma O\Delta) = \frac{1}{2}R\cdot\Gamma\Delta$ (3).

(2), (3) $\Longrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{OB}{O\Delta}$ (4). Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν $\frac{A\Delta}{\Gamma B} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{O\Delta}{OB}$ (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4), (5) ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

635. Εἰς παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ ωνόμασεν ὁ εὐθειῶν τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς μὲ τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σχηματιζόμενον ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου ὀκτάγωνον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἀπόδειξις:



Αἱ ΘZ καὶ EH τέμνονται εἰς τὸ κέντρον O τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἡ AZ διχοτομεῖ τὴν BO.

$\overset{\Delta}{AT\Theta} \sim \overset{\Delta}{OTI} \Longrightarrow \frac{OT}{TA} = \frac{OI}{A\Theta} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (OTI) = \frac{1}{2}(OTE) = \frac{1}{6}(AEO) = \frac{1}{12}(AEO\Theta) =$

$= \frac{1}{48}(AB\Gamma\Delta)$.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀκταγώνου εἶναι $8\cdot\frac{1}{48}(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{6}(AB\Gamma\Delta)$.

636. Θεωροῦμεν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς O. Ἐὰν E_1, E_2, E_3, E_4 εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $OAB, OB\Gamma, O\Gamma\Delta, O\Delta A$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\sqrt{E_1E_4}+\sqrt{E_2E_3}}{\sqrt{E_1E_2}+\sqrt{E_3E_4}}$.

Ἀπόδειξις:

$\frac{OB}{O\Delta} = \frac{E_1}{E_4}$, $\frac{OB}{O\Delta} = \frac{E_2}{E_3} \Longrightarrow \frac{OB}{O\Delta} = \frac{\sqrt{E_1E_2}}{\sqrt{E_3E_4}} \Longrightarrow \frac{B\Delta}{O\Delta} = \frac{\sqrt{E_1E_2}+\sqrt{E_3E_4}}{\sqrt{E_3E_4}}$ (1). Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{A\Gamma}{O\Gamma} = \frac{\sqrt{E_1E_4}+\sqrt{E_2E_3}}{\sqrt{E_2E_3}}$ (2).

Ἀλλὰ $\frac{O\Gamma}{O\Delta} = \frac{OB}{OA} = \sqrt{\frac{OB}{O\Delta}\cdot\frac{O\Gamma}{OA}} = \sqrt{\frac{E_2}{E_4}}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\sqrt{E_1E_4}+\sqrt{E_2E_3}}{\sqrt{E_1E_2}+\sqrt{E_3E_4}}$.

637. Δίδεται περιφέρεια (O) καὶ διάμετρος $B\Gamma$ αὐτῆς. Ἔστω A τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Μὲ διαμέτρους AB καὶ $A\Gamma$ γράφομεν περιφερείας. Ἐὰν $(I_1), (I_2)$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σκιαζομένων μηνίσκων (Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους) νὰ δειχθῇ ὅτι $(I_1)+(I_2) = (AB\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:

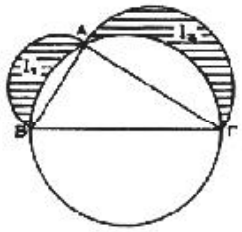
Παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μηνίσκων I_1 καὶ I_2 ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ: τοῦ $\hat{AB\Gamma}$,

τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ, τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΓ καὶ ἀφαιρέσωμεν : τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΒΓ.

$(I_1)+(I_2) = (AB\Gamma)+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2+$
$+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2$ (1).

Ἀλλὰ $B\Gamma^2 = AB^2+B\Gamma^2$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow$ $(I_1)+(I_2)=(AB\Gamma)$.



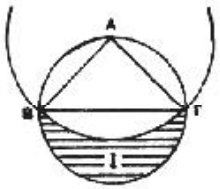
638. Ἐὰν περιγραφῇ κύκλος περὶ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, γραφῇ δὲ κύκλος μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν κάθετον πλευράν, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέρος τοῦ πρώτου κύκλου τὸ κείμενον ἐκτὸς τοῦ δευτέρου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον.

Ἀπόδειξις :

$(I) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2-\left[\frac{1}{4}\pi AB^2-(AB\Gamma)\right]$ (1).

Ἀλλὰ $B\Gamma = AB\sqrt{2}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow$ $(I)=(AB\Gamma)$.

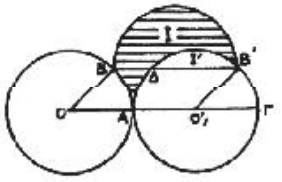


639. Δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἔστω ΟΒ καὶ Ο′Β′ δύο ἀκτῖνες αὐτῶν παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου ΒΒ′ ἐξωτερικῶς τοῦ σχήματος. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα Ι τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΑΒ′ τῶν (Ο),(Ο′) εἶναι ἰσεμβαδικὸν πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΟΒΒ′Ο′.

Ἀπόδειξις :

$BB' = A\Gamma \Longrightarrow$ ἡμιπερ. διαμέτρου $BB' =$ $=$ ἡμιπερ. διαμέτρου $A\Gamma$ (1).

Ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἀφαιρεῖται τὸ κυκλικὸν τμῆμα Ι′ (τὸ ὁριζόμενον ἐπὶ τοῦ (Ο′) ὑπὸ τῆς χορδῆς ΔΒ′) καὶ προστίθεται τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα ΒΑΔ. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τομεὺς ΒΟΑ = τομεὺς Β′Ο′Γ, θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον, ἤτοι (Ι)=(ΟΒΒ′Ο′).



640. Ἐπ' εὐθείας (ε) δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε ὥστε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = \alpha$. Γράφομεν τὰς περιφερείας (B,α), (Γ,α), (Δ,α). Ἔστω ΖΗ ἡ κάθετος διάμετρος ἐπὶ τὴν (ε) τῆς περιφερείας (Γ). Μὲ κέντρα Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως γράφομεν τὰ τόξα τῶν περιφερειῶν τὰ ὁποῖα ἐφάπτονται τῶν κύκλων (Β) καὶ (Δ). Σχηματίζεται οὕτω ἓν ὠοειδὲς σχῆμα, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδόν.

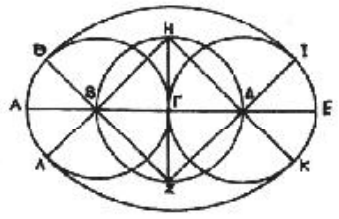
Λύσις :

Περίμετρος ὠοειδοῦς σχήματος = 2 · τὸ μῆκος τοῦ τόξου $(\overset{\frown}{I\Theta\Lambda}) =$ $= 2(\overset{\frown}{\Theta\Lambda}) + 2(\overset{\frown}{I\Theta})$ (1).

$(\overset{\frown}{\Theta\Lambda}) = \frac{2\pi a}{4} = \frac{\pi a}{2}$ (2)

$(\overset{\frown}{I\Theta}) = \frac{2\pi \cdot ZI}{4} = \frac{(1+\sqrt{2})\pi a}{2}$ (3)

(1),(2),(3) $\Longrightarrow$ περίμετρος ωοειδοῦς σχήματος $= (2+\sqrt{2})\pi a$.



Ἐμβαδόν ωοειδοῦς σχήματος = $2\cdot$ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(\Theta ZI) + 2\cdot$ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(\Theta B\Lambda) - (BH\Delta Z)$ (4).

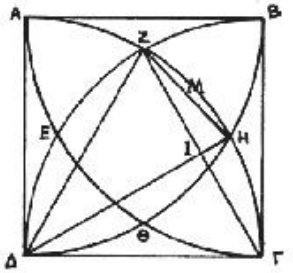
Εἶναι ὅμως: ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(\Theta B\Lambda) = \frac{\pi a^2}{4}$ (5) καὶ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(\Theta ZI) = \frac{(1+\sqrt{2})^2\pi a^2}{4} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi a^2$ (6) καὶ $(BH\Delta Z) = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$ (7).

(4),(5),(6),(7) $\Longrightarrow$ ἐμβ. ωοειδοῦς σχήματος $= \pi(2+\sqrt{2})a^2 - 2a^2$.

641. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν τεσσάρων κύκλων οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ δοθέντος τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Λύσις:

Τὸ τετράπλευρον EZHΘ εἶναι ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται τετράγωνον.

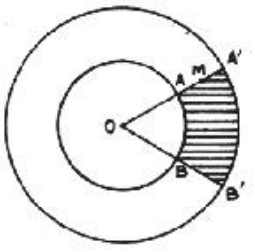


Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος EZHΘ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου EZHΘ πλησμένον κατὰ τέσσαρες φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος M τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς χορδῆς ZH τοῦ κύκλου (Δ, a) καὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι $\Delta\hat{\Gamma}Z, A\hat{\Delta}H$ ἰσόπλευρα. Ἄρα $Z\hat{\Delta}H = 30°$ καὶ ZH πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Δ, a). Εἶναι λοιπὸν $ZH^2 = (2-\sqrt{3})a^2$ (1). Ἀκόμη $(M) =$ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(Z\Delta H) - (Z\Delta H) = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{1}{2}\Delta H \cdot ZI = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4}$ (2). Ἄρα ἐμβ. καμπυλογράμμου σχήματος $EZH\Theta = (2-\sqrt{3})a^2 + \frac{\pi a^2}{3} - a^2 = \frac{\pi a^2}{3} + (1-\sqrt{3})a^2$.

642. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι $(O,R), (O,R')$ καὶ δύο ἀκτῖνες $OA A', OB B'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο σχηματιζομένων κυκλικῶν τομέων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τὸ τόξον ὁμοκέντρου περιφερείας, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων AA' καὶ BB' τῶν δύο ἀκτίνων.

Ἀπόδειξις:

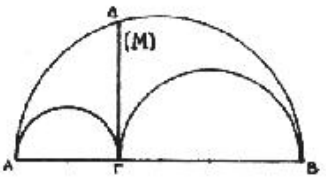
Ἔστω $A\hat{O}B = a°$.



Ἐμβ. καμπυλογράμμου σχήματος $ABB'A' =$ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(A'OB') -$ ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως $(AOB) = \pi\frac{a°}{360°}R'^2 - \pi\frac{a°}{360°}R^2 = \pi\frac{a°}{360°}\cdot(R'^2 - R^2) = 2\pi\frac{a°}{360°}\cdot\frac{R+R'}{2}(R'-R) = 2\pi\frac{a°}{360°}\cdot OM\cdot(R-R')$ ὅπου M τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA'.

643. Ἐπί τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Γ καί πρός τό αὐτό μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ γράφομεν ἡμικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἡ κάθετος εἰς Γ ἐπί τήν ΑΒ τέμνει τήν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου ΑΒ εἰς Δ. Νά δειχθῇ ὅτι τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου τό περιεχόμενον μεταξύ τῶν τριῶν ἡμικυκλίων ἔχει ἐμβαδόν ἴσον πρός τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

Ἀπόδειξις:

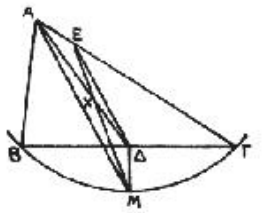


Ἔστω $A\Gamma = 2\alpha$, $B\Gamma = 2\beta$.

Εἶναι $(M) = \frac{1}{2}\pi(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{2}\pi\alpha^2 - \frac{1}{2}\pi\beta^2 = \pi\frac{4\alpha\beta}{4} = \pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2$.

644. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχόν τόξον κύκλου χορδῆς ΒΓ ἐκτός τοῦ τριγώνου. Ἔστω Μ τό μέσον αὐτοῦ. Φέρομεν τήν ΜΑ καί ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ τήν παράλληλον πρός τήν ΜΑ, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τό Ε τήν περίμετρον τοῦ τριγώνου. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ΜΕ διχοτομεῖ τήν ἐπιφάνειαν τήν ὁριζομένην ὑπό τῶν ΑΒ, ΑΓ καί τοῦ $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:



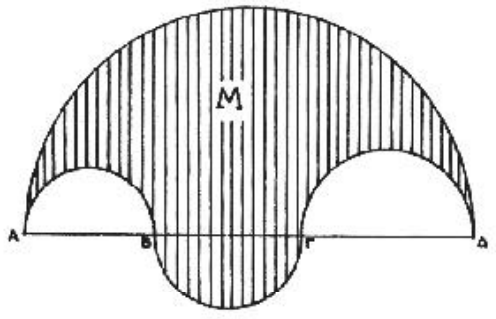
Ἔστω Χ ἡ τομή τῶν ΑΔ, ΕΜ. Ἐκ τοῦ τραπεζίου ΑΕΔΜ εἶναι γνωστόν ὅτι $(AEX) = (M\Delta X)$ (1).

Ἡ γραμμή ΑΔΜ χωρίζει προφανῶς τό μικτόγραμμον σχῆμα $AB\Gamma\overset{\frown}{MB}A$ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη. Ἤτοι $(A\Delta\overset{\frown}{MB}A) = (A\Delta\overset{\frown}{M\Gamma}A)$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow (A\Delta\overset{\frown}{MB}A) + (AEX) - (M\Delta X) = (A\Delta\overset{\frown}{M\Gamma}A) + (M\Delta X) - (AEX)$ καί τελικῶς $(AE\overset{\frown}{MB}A) = (\Gamma E\overset{\frown}{M\Gamma})$.

645. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ καί τά σημεῖα Β καί Γ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τάς ἡμιπεριφερείας μέ διαμέτρους ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη, δευτέρα καί τελευταία πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἡ τρίτη πρός τό ἕτερον ἡμιεπίπεδον. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ μεταξύ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν περιεχομένη ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοδύναμος πρός τόν κύκλον ὅστις ἔχει διάμετρον τήν μέσην ἀνάλογον τῶν ΑΓ καί ΒΔ.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $AB = 2x$, $B\Gamma = 2y$, $\Gamma\Delta = 2z$.

Ἐάν (Μ) παριστᾷ τό ἐμβαδόν τοῦ σκιασμένου μέρους θά ἔχωμεν $(M) = \frac{1}{2}\pi(x+y+z)^2 - \frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi z^2 + \frac{1}{2}\pi y^2 = \pi(x+y)(y+z) = \pi\frac{A\Gamma}{2}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \pi\left[\frac{\sqrt{A\Gamma\cdot B\Delta}}{2}\right]^2$.

646. Δύο τρίγωνα ἔχουν πλευράς $\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\sqrt{\mu^2+\kappa^2}$ καί $\sqrt{p^2+q^2}$, $\sqrt{q^2+r^2}$, $\sqrt{r^2+p^2}$. Ἐάν $\kappa^2\lambda^2 + \lambda^2\mu^2 + \mu^2\kappa^2 = p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2$ νά δειχθῇ ὅτι τά τρίγωνα θά

εἶναι ἰσοδύναμα.

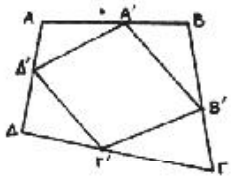
Ἀπόδειξις:

Θεωροῦμεν τὰς τριεδρους $OAB\Gamma$ καὶ $O'A'B'\Gamma'$ ὥστε $OA=\kappa$, $OB=\lambda$, $O\Gamma=\mu$, $O'A'=\rho$, $O'B'=\sigma$, $O'\Gamma'=\tau$. Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν πλευρὰς τὰς δοθείσας ἀντιστοίχως. Εἶναι ὅμως (θεώρημα de Cua de Malves) γνωστὸν ὅτι $(AOB)^2+(BO\Gamma)^2+(\Gamma OA)^2=(AB\Gamma)^2 \Longrightarrow \kappa^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2+\mu^2\kappa^2=(AB\Gamma)^2$ (1) καὶ ὁμοίως $\rho^2\sigma^2+\sigma^2\tau^2+\tau^2\rho^2=(A'B'\Gamma')^2$ (2).

$(1),(2)\Longrightarrow (AB\Gamma)=(A'B'\Gamma')$.

647. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma, \Gamma A, A\Delta$ κυρτοῦ τετραπλεύρου λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A', B', Γ', Δ' ἀντιστοίχως ὥστε $\frac{AA'}{A'B}=\frac{BB'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta\Delta'}{\Delta'A}=\frac{m}{n}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(A'B'\Gamma'\Delta')}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$.

Ἀπόδειξις:



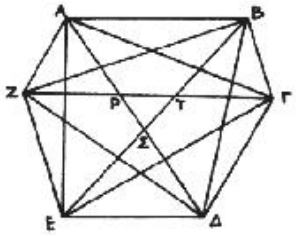
Θέτομεν $(AB\Gamma\Delta)=S$, $(A'B'\Gamma'\Delta')=S'$.

Ἔχομεν $2S=(AB\Delta)+(\Gamma B\Delta)+(A\Delta\Gamma)+(AB\Gamma)$.

$\frac{AA'}{A'B}=\frac{m}{n}\Longrightarrow\frac{AA'}{AB}=\frac{m}{m+n}$, ἐπίσης $\frac{A\Delta'}{A\Delta}=\frac{n}{m+n}$. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν ἐμβαδῶν ἔχομεν $\frac{(AA'\Delta')}{(AB\Delta)}=\frac{AA'\cdot A\Delta'}{AB\cdot A\Delta}=\frac{mn}{(m+n)^2}$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{(AA'\Delta')}{(AB\Delta)}=\frac{(BB'A')}{(B\Gamma A)}=\frac{(\Gamma\Gamma'B)}{(\Gamma\Delta B)}=\frac{(\Delta\Delta'\Gamma')}{(\Delta A\Gamma)}=\frac{S-S'}{2S}\Longrightarrow\frac{S'}{S}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$.

648. Δίδεται ἑξάγωνον $AB\Gamma\Delta EZ$ μὲ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(A\Gamma E)=(B\Delta Z)$.

Ἀπόδειξις:



$AB\parallel\Delta E\Longrightarrow(EA\Delta)=(EB\Delta)\Longrightarrow(AZE)=(BZ\Delta)$ (1).

$B\Gamma\parallel ZE\Longrightarrow(\Gamma TE)=(BTZ)$ (2).

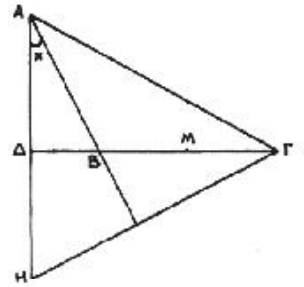
$\Gamma\Delta\parallel AZ\Longrightarrow(AP\Gamma)=(\Delta PZ)$ (3).

Ἐκ τῶν (1),(2),(3) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη συμπεραίνομεν ὅτι $(A\Gamma E)=(B\Delta Z)$.

Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰδία πρότασις διὰ μὴ κυρτὸν ἑξάγωνον. Πῶς μποροῦμε νὰ λύσωμεν τὸ ἴδιο πρόβλημα δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀσκήσεως 612;

649. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^\circ$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\beta^2-\gamma^2)^2=a^2(\beta^2+\gamma^2)$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $A\Delta$ τὸ ὕψος. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ λαμβάνομεν $\hat{B}=90^\circ+\hat{x}$. Ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν $\hat{x}=\hat{\Gamma}$. Ἤτοι $\overset{\triangle}{AB\Delta}\sim\overset{\triangle}{\Gamma A\Delta}$ (1).

$(1)\Longrightarrow A\Delta^2=v_a^2=\Delta B\cdot\Delta\Gamma$ (2).

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $2^{ον}$ θεώρημα τῶν διαμέσων $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\Delta B+\frac{a}{2}=\frac{\beta^2-\gamma^2}{2a}$ (3).

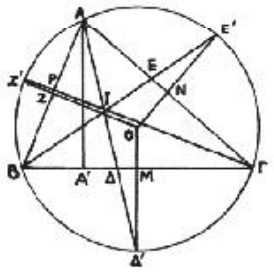
$(2),(3)\Longrightarrow\frac{4E^2}{a^2}=\left(\frac{\beta^2-\gamma^2}{2a}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\beta^2-\gamma^2}{2a}+\frac{a}{2}\right)$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις ἔχομεν $[(a+\beta)^2-\gamma^2][\gamma^2-(a-\beta)^2]=(\beta^2-\gamma^2)^2-a^4\Longrightarrow a^2(\beta^2+\gamma^2)=(\beta^2-\gamma^2)^2$.

Χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἐκείνην ἀποδείξατε ὅτι $\delta_a=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$.

650. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ διχοτόμοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Δ′, Ε′, Ζ′ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ΔΔ'}{δ_α} + \frac{ΕΕ'}{δ_β} + \frac{ΖΖ'}{δ_γ} + 1 = \frac{R}{ρ}$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Μ, Ν, Ρ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ ΑΑ′ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Εἶναι $\overset{\triangle}{ΔΔ'M} \sim \overset{\triangle}{ΔAA'}$ καὶ συνεπῶς $\frac{ΔΔ'}{δ_α} = \frac{Δ'M}{υ_α} = \frac{R-OM}{υ_α} = \frac{R}{υ_α} - \frac{OM}{υ_α} = \frac{R}{υ_α} - \frac{(BOΓ)}{(ABΓ)}$ (1).

Ὁμοίως $\frac{ΕΕ'}{δ_β} = \frac{R}{υ_β} - \frac{(ΓOA)}{(ABΓ)}$ (2) καὶ $\frac{ΖΖ'}{δ_γ} = \frac{R}{υ_γ} - \frac{(AOB)}{(ABΓ)}$ (3).

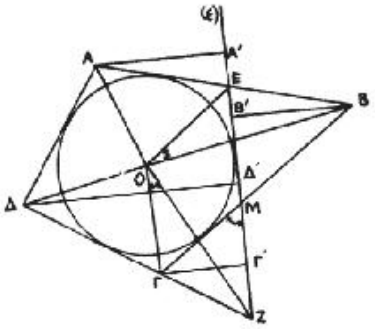
$(1),(2),(3) \Longrightarrow \frac{ΔΔ'}{δ_α} + \frac{ΕΕ'}{δ_β} + \frac{ΖΖ'}{δ_γ} + 1 = R\left(\frac{1}{υ_α} + \frac{1}{υ_β} + \frac{1}{υ_γ}\right)$ (4).

Ὡς γνωστὸν ὅμως $\frac{1}{υ_α} = \frac{α}{2(ABΓ)}$, ἄρα $\frac{1}{υ_α} + \frac{1}{υ_β} + \frac{1}{υ_γ} = \frac{2τ}{2(ABΓ)} = \frac{1}{ρ}$ (5).

$(4),(5) \Longrightarrow \frac{ΔΔ'}{δ_α} + \frac{ΕΕ'}{δ_β} + \frac{ΖΖ'}{δ_γ} + 1 = \frac{R}{ρ}$.

651. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Ο, R). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην (ε) τοῦ κύκλου καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ ἐπ' αὐτήν. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ΑΑ'\cdot ΓΓ'}{ΒΒ'\cdot ΔΔ'} = \frac{OA\cdot OΓ}{OB\cdot OΔ}$ (ἤτοι ἀνεξάρτητος τῆς (ε)).

Ἀπόδειξις:



$\overset{\triangle}{AEA'} \sim \overset{\triangle}{BEB'} \Longrightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{AE}{BE}$ Ὁμοίως $\frac{ΓΓ'}{ΔΔ'} = \frac{ΓZ}{ΔZ}$. Ὅθεν $\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{ΓΓ'}{ΔΔ'} = \frac{AE}{BE}\cdot\frac{ΓZ}{ΔZ}$ (1).

Ἀλλὰ $\frac{AE}{BE} = \frac{(AOE)}{(BOE)}$, $\frac{ΓZ}{ΔZ} = \frac{(ΓOZ)}{(ΔOZ)}$

Καὶ συνεπῶς $\frac{AE}{BE}\cdot\frac{ΓZ}{ΔZ} = \frac{(AOE)}{(ΔOZ)}\cdot\frac{(ΓOZ)}{(BOE)}$ (2).

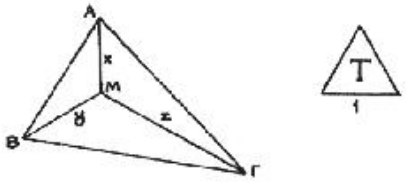
Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $\hat{ΓOZ} = \hat{BOE} = \frac{\hat{ΓMZ}}{2}$ ὅπου καὶ $\hat{AOE} + \hat{ΔOZ} = 2^L$.

Ἄρα συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν ἔχομεν $\frac{(ΓOZ)}{(BOE)} = \frac{OΓ\cdot OZ}{OB\cdot OE}$ (3), $\frac{(AOE)}{(ΔOZ)} = \frac{OA\cdot OB}{OΔ\cdot OZ}$ (4).

$(1),(2),(3),(4) \Longrightarrow \frac{AA'\cdot ΓΓ'}{BB'\cdot ΔΔ'} = \frac{OA\cdot OΓ}{OB\cdot OΔ}$.

652. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου $\max(\hat{A}, \hat{B}, \hat{Γ}) < 120°$. Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον $\hat{BMΓ} = \hat{ΓMA} = \hat{AMB} = 120°$. (Τὸ σημεῖον θὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ τριγώνου, διατί;) Θέτομεν $AM = x$, $BM = y$, $ΓM = z$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ABΓ) = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$.

Ἀπόδειξις:



Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον Τ πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μονάδα. Διὰ τὰ τρίγωνα ΒΜΓ, Τ ἰσχύει τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν. $\frac{(BMΓ)}{T} = \frac{yz}{1} \Longrightarrow (BMΓ) = \frac{\sqrt{3}}{4}yz$.

Ὁμοίως $(BMA) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$, $(ΓMA) = \frac{\sqrt{3}}{4}zx$ καὶ διὰ προσθέσεως $(ABΓ) = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$.

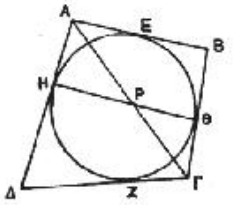
Σημειώσις:

Ἂν μία γωνία ἦτο μεγαλυτέρα τῶν 120°, θὰ ὑπῆρχεν ἐντὸς τῆς παρ-

ενθέσεως ἕν ἀλλαχμένον πρόβλημον.

ΟΜΑΣ Β'.

653. Ἐάν τετράπλευρον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον τότε αἱ χορδαὶ τοῦ κύκλου αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἀπέναντι σημεῖα ἐπαφῆς καὶ αἱ διαγώνιοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Ἀπόδειξις:

Ἔστω $P = A\Gamma \cap H\Theta$.

$H\hat{P}A = \Theta\hat{P}\Gamma \Longrightarrow \frac{(HPA)}{(\Theta P\Gamma)} = \frac{PH\cdot PA}{P\Theta\cdot P\Gamma}$ (1).

$A\hat{H}P + P\hat{\Theta}\Gamma = 2^L \Longrightarrow \frac{(AHP)}{(\Theta P\Gamma)} = \frac{AH\cdot HP}{\Theta\Gamma\cdot\Theta P}$ (2).

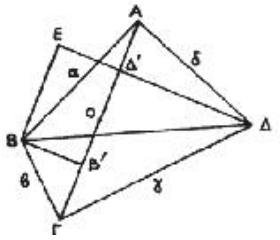
(1), (2) $\Longrightarrow \frac{AH}{\Theta\Gamma} = \frac{AP}{\Gamma P}$ (3).

Ἐάν θέσωμεν $P' = A\Gamma \cap EZ$, θὰ εὕρωμεν ὁμοίως $\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AP'}{\Gamma P'}$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow \frac{AP}{\Gamma P} = \frac{AP'}{\Gamma P'} \Longrightarrow P \equiv P'$.

Διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν $EZ, H\Theta$ διέρχεται ἡ διαγώνιος $A\Gamma$. Ὁμοίως καὶ ἡ $B\Delta$.

654. Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αἱ πλευραὶ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ καὶ x, y αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ θὰ δείξωμεν ὅτι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)^2}$.



Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὰ ὕψη BB' καὶ $\Delta\Delta'$ τῶν $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{A\Delta\Gamma}$ καὶ τὴν $BE \perp \Delta\Delta'$.

$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}BB'\cdot A\Gamma + \frac{1}{2}\Delta\Delta'\cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\Delta E\cdot A\Gamma$ (1).

Ἐάν $A\Gamma = x$ καὶ $B\Delta = y$ θὰ εἶναι $\Delta E = \sqrt{y^2 - BE^2}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - x^2\cdot BE^2}$ (3).

Ὑπολογισμὸς τοῦ τμήματος BE.

$2^{\text{ον}}$ θεώρημα τῶν διαμέσων $\hat{AB\Gamma} \Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 2x\cdot OB'$ (4).

$2^{\text{ον}}$ θεώρημα τῶν διαμέσων $\hat{A\Delta\Gamma} \Longrightarrow \gamma^2 - \delta^2 = 2x\cdot O\Delta'$ (5).

(4), (5) $\Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 2\cdot B'\Delta'\cdot x = 2BE\cdot x \Longrightarrow BE^2 = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}{2x}\right)^2$ (6).

(3), (6) $\Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2y^2 - \frac{(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)^2}$.

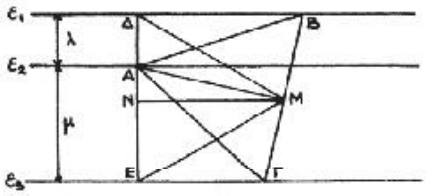
Ἐάν τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον πῶς μετατρέπεται ὁ τύπος;

655. Αἱ κορυφαὶ A, B, Γ ἰσοπλεύρου τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν ἀποστάσεων λ, μ τῶν παραλλήλων.

Λύσις:

Διὰ τοῦ A φέρομεν τὴν $\Delta E \perp \varepsilon_1, \varepsilon_3$ καὶ τὴν διάμεσον AM. Τὰ τετράπλευρα $AMB\Delta$ καὶ $AM\Gamma E$ εἶναι ἐγγράψιμα καὶ εὐκόλως προκύπτει ἀπ' αὐτὰ ὅτι τὸ $\hat{\Delta ME}$ εἶναι ἰσόπλευρον.

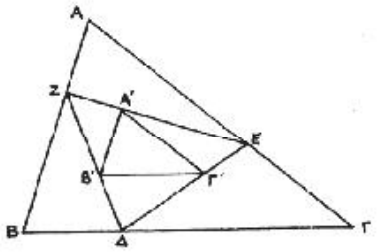
Ἔστω $AB = x$. Ἡ AM ὡς διάμεσος τοῦ ἰσοπλεύρου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ εἶναι $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Ἡ διάμεσος MN τοῦ $\overset{\Delta}{AME}$ εἶναι $MN = \frac{(\lambda+\mu)\sqrt{3}}{2}$. Ὑπολογίζομεν τὸ τμῆμα $AN = \frac{\lambda+\mu}{2} - \lambda = \frac{\mu-\lambda}{2}$.



Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\overset{\Delta}{ANM}$: $AM^2 = AN^2 + MN^2$ ἢ $\left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \left[\frac{(\lambda+\mu)\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{\mu-\lambda}{2}\right]^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{4}{3}(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)$ καὶ $(AB\Gamma) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)$.

656. Δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τὸ ἓν περιέχεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου. Τρίτον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τριγώνων καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸ ἕτερον. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ των ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω α', υ_α ἡ πλευρὰ $B'\Gamma'$ καὶ τὸ ὕψος ἐκ τῆς A' τοῦ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

$AB \parallel A'B' \Longrightarrow (A'ZB') = (A'AB')$ (1)

$A\Gamma \parallel A'\Gamma' \Longrightarrow (A'E\Gamma') = (A'A\Gamma')$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow (\Delta EZ) = (B'A\Gamma'\Delta) = \frac{1}{2}\alpha'\upsilon_\alpha$ (3).

Ἀλλὰ ἐπειδὴ $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \sim \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha'\upsilon_\alpha = \alpha\upsilon_{\alpha'} \Longrightarrow \frac{1}{4}\alpha'^2\upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha \cdot \frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$ (4).

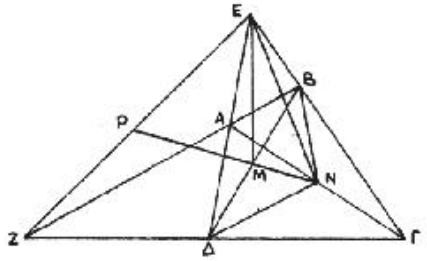
(3), (4) $\Longrightarrow (\Delta EZ)^2 = (AB\Gamma)(A'B'\Gamma')$.

Πόρισμα:

Ἐὰν Δ, E, Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ θὰ εἶναι $(AB\Gamma)^2 = (\Delta EZ)(I_\alpha I_\beta I_\gamma)$. Τοῦτο συμβαίνει διότι αἱ πλευραὶ τοῦ $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ $\overset{\Delta}{I_\alpha I_\beta I_\gamma}$.

657. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

Ἀπόδειξις:



$(AB\Gamma\Delta) = (\Gamma\Delta E) - (ABE)$ (1).

$(\Gamma\Delta E) = 2(\Delta NE)$, $(ABE) = 2(EBN)$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = 2[(\Delta NE) - (EBN)]$ (3).

$(\Delta NE) = (MNE) + (E\Delta M) + (\Delta MN) = (MNE) + (EMB) + (BMN) = 2(MNE) + (EBN)$ (4).

(3), (4) $\Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = 4(MNE)$.

Παρατηρήσεις:

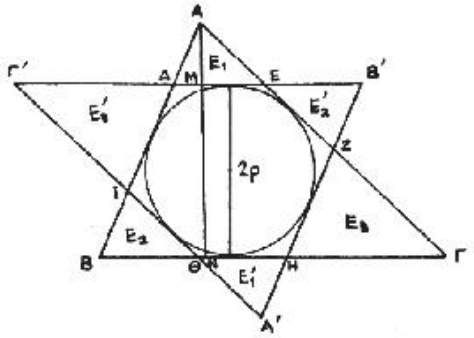
Θὰ ἔχωμεν ἀκόμα $(AB\Gamma\Delta) = 4(MNZ)$, ἤτοι $(MNE) = (MNZ)$. Ἤτοι αἱ ἀποστάσεις τῶν E, Z ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν MN εἶναι ἴσαι, συνεπῶς ἡ εὐθεῖα MN διχοτομεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα EZ.

Πόρισμα:

Τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

658. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι περιγεγραμμένα περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο,ρ) καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀκτὼ τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον πρὸς ρ^{16}.

Ἀπόδειξις:



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια. Ἐπειδὴ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον ὁ λόγος ὁμοιότητος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα.

Ὁμοίως διαπιστώνομεν τὴν ἰσότητα καὶ τῶν $\hat{\Delta AE} = \hat{\mu A'\theta}$, $\hat{EBZ} = \hat{\theta BI}$, $\hat{Z\Gamma H} = \hat{I\Gamma'\Delta}$. Ἐὰν θέσωμεν $E = (AB\Gamma)$, $E' = (A'B'\Gamma')$, $E_1, E_2, E_3, E'_1, E'_2, E'_3$ ὡς φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα θὰ πρέπῃ νὰ δείξωμεν $E\cdot E'E_1E_2E_3E'_1E'_2E'_3 = \rho^{16}$ ἢ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ἀνὰ δύο εἶναι ἴσα $EE_1E_2E_3 = \rho^8$.

$\Delta AE \sim BA\Gamma \Longrightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{AM^2}{AN^2} = \left(\frac{\upsilon_\alpha - 2\rho}{\upsilon_\alpha}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\rho}{\upsilon_\alpha}\right)^2$ (1).

Ἀλλὰ $2\tau\rho = \alpha\upsilon_\alpha \Longrightarrow \frac{2\rho}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{\tau}$ (2),

(1),(2) $\Longrightarrow \frac{E_1}{E} = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}\right)^2 \Longrightarrow E_1 = \left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}\right)E$ (3). Ὁμοίως $E_2 = \left(\frac{\tau-\beta}{\tau}\right)^2 E$ (4), $E_3 = \left(\frac{\tau-\gamma}{\tau}\right)^2 E$ (5).

(3),(4),(5) $\Longrightarrow EE_1E_2E_3 = \frac{(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2}{\tau^6}E^4 = \frac{\tau^2(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2}{\tau^8}E^4 = \frac{E^8}{\tau^8} = \rho^8$.

659. Ἐὰν εἰς τρίγωνον $\alpha = \upsilon_\alpha$ τότε $\frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}-1) < \beta < \frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Ἀπόδειξις:

$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\frac{2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{16}} \Longrightarrow 5\alpha^4 - 2\alpha^2(\beta^2+\gamma^2) + (\beta^2-\gamma^2)^2 = 0$ (1).

Αἱ ρίζαι πρὸς α^2 τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαὶ ἄρα $\Delta \geqslant 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\beta^2+\gamma^2)^2 - 5(\beta^2-\gamma^2)^2 \geqslant 0$ (2). Θέσωμεν $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = x$.

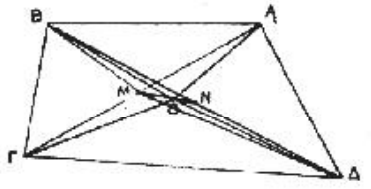
(2) $\Longrightarrow x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ (3).

Ἵνα ἐπαληθεύεται ἡ (3) ὁ x πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ἄρα $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \leqslant \frac{\beta}{\gamma} \leqslant \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \Longrightarrow \frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}-1) \leqslant \beta \leqslant \frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}+1)$.

660. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο ὥστε $(\overline{AB}O) + (\overline{\Gamma\Delta}O) = (\overline{B\Gamma}O) + (\overline{\Delta A}O)$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Ἀπόδειξις:



Εἶναι προφανὲς $(\overline{AB}O) + (\overline{\Gamma\Delta}O) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ (1).

Ἀκόμη $(\overline{AB}O) = (\overline{ABM}) + (\overline{MOA}) - (\overline{BMO})$ ἢ $(\overline{AB}O) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) + (\overline{MOA}) - (\overline{BMO})$ (2).

Ἐπίσης $(\overline{\Gamma\Delta}O) = (\overline{\Gamma\Delta M}) - (\overline{M\Gamma O}) + (\overline{M\Delta O})$ ἢ $(\overline{\Gamma\Delta}O) = \frac{1}{2}(\Gamma\Delta A) - (\overline{M\Gamma O}) + (\overline{M\Delta O})$ (3).

(2), (3) $\Longrightarrow (\overline{AB\Theta}) + (\overline{\Gamma\Delta\Theta}) = \frac{1}{2}(\overline{AB\Gamma\Delta}) + (\overline{M\Delta\Theta}) - (\overline{BM\Theta})$ (4), διότι $(\overline{M\Theta A}) - (\overline{M\Gamma\Theta}) = 0$.

(1), (4) $\Longrightarrow (\overline{M\Delta\Theta}) = (\overline{BM\Theta})$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία ΜΟ διχοτομεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΔ.

Ἐφαρμογαί:

α) Εἰς πᾶν τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον ἡ εὐθεία ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου.

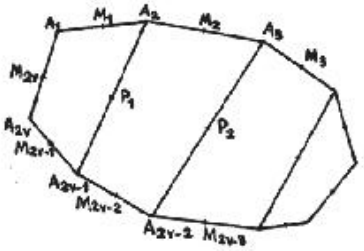
Ἐὰν ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἔχομεν: ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον $\Longrightarrow$ ΑΒ+ΓΔ = ΒΓ + ΔΑ ἢ $\rho\cdot AB + \rho\cdot\Gamma\Delta = \rho\cdot B\Gamma + \rho\cdot\Delta A \Longrightarrow (AB\Theta) + (\Gamma\Delta\Theta) = (\Delta A\Theta) + (B\Gamma\Theta)$.

β) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἡ εὐθεία ἡ ὁποία συνδέει τὸ Μ μὲ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

γ) Τὸ αὐτὸ διὰ τὸν παρεγγεγραμμένον κύκλον εἰς τὴν ΒΓ. Ἡ εὐθεία ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ μὲ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ, ὅπου Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν ΒΓ, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν ΒΓ.

661. Δύο τυχόντα πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ ἀρτίου πλήθους πλευρῶν εἶναι ἰσοδύναμα ἐὰν αἱ πλευραί των ἔχουν τὰ αὐτὰ μέσα.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $A_1A_2A_3\cdots A_{2\nu}$ τὸ ἓν πολύγωνον καὶ $M_1, M_2, \ldots, M_{2\nu}$ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2\nu}A_1$. Φέρομεν τὰς διαγωνίους $A_2A_{2\nu-1}$, $A_3A_{2\nu-2}$, $A_4A_{2\nu-3}, \ldots, A_{\nu-1}A_{\nu+2}$. Τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς ν-1 τετράπλευρα. Ἔστω $P_1, P_2, \ldots, P_{\nu-3}$ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων $A_2A_{2\nu-1}$, $A_3A_{2\nu-2}, \ldots, A_{\nu-1}A_{\nu+2}$. Θὰ εἶναι $(A_1A_2A_{2\nu-1}A_{2\nu}) = 2(M_1P_1M_{2\nu-1}M_{2\nu}) = 2\pi_1$, $(A_2A_3A_{2\nu-2}A_{2\nu-1}) = 2(M_2P_2M_{2\nu-2}P_1) = 2\pi_2, \ldots, (A_{\nu-1}A_\nu A_{\nu+1}A_{\nu+2}) = 2(M_{\nu-1}M_\nu M_{\nu+1}P_{\nu-3}) = 2\pi_{\nu-3}$. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν $(A_1A_2A_3\cdots A_{2\nu}) = 2(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_{\nu-3})$. Διὰ οἱονδήποτε ἄλλο πολύγωνον $A_1'A_2'A_3'\cdots A_{2\nu}'$ μὲ τὰ αὐτὰ μέσα $M_1, M_2, \ldots M_{2\nu}$ τῶν πλευρῶν του τὰ παραλληλόγραμμα $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\nu-3}$ εἶναι ἀκριβῶς τὰ ἴδια. Ἄρα $(A_1'A_2'\ldots A_{2\nu}') = 2(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_{\nu-3})$.

662. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς τ περιοχάς. Ἐὰν $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Μ ἀπὸ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν 8 σχέσεων $\pm\frac{\rho_\alpha}{u_\alpha} \pm \frac{\rho_\beta}{u_\beta} \pm \frac{\rho_\gamma}{u_\gamma} = 1$ ἰσχύουν αἱ τ, (πλὴν τῆς προφανῶς μὴ ἰσχυούσης) μία δι' ἑκάστην ἐκ τῶν προαναφερθεισῶν περιοχῶν.

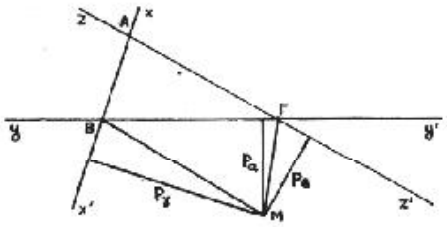
Ἀπόδειξις:

Διὰ τὴν περιοχὴν x'Βz'.

$(AB\Gamma) + (A\Gamma M) - (BM\Gamma) = (AB\Gamma)$ ἢ $\frac{1}{2}\gamma\rho_\beta + \frac{1}{2}\beta\rho_\beta - \frac{1}{2}a\rho_\alpha = E$ ἢ $\frac{1}{2}\frac{2E}{u_\gamma}\rho_\beta + \frac{1}{2}\frac{2E}{u_\beta}\rho_\beta - \frac{1}{2}\frac{2E}{u_\alpha}\rho_\alpha = E$ ἢ $\frac{\rho_\beta}{u_\beta} + \frac{\rho_\gamma}{u_\gamma} - \frac{\rho_\alpha}{u_\alpha} = 1$.

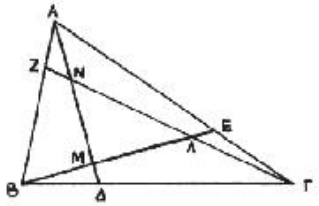
Ὁμοίως διὰ τὰς ὑπολοίπους περιοχάς.

Διὰ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου $\frac{P_\alpha}{U_\alpha}+\frac{P_\beta}{U_\beta}+\frac{P_\gamma}{U_\gamma}=1$.



663. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ, E, Z ὥστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\lambda$, $\frac{\Gamma E}{EA}=\mu$, $\frac{AZ}{ZB}=\nu$. Ἂν θέσωμεν $M=A\Delta\cap BE$, $N=A\Delta\cap\Gamma Z$, $\Lambda=\Gamma Z\cap BE$ νὰ δειχθῇ ὅτι $(\Lambda NM)=\frac{(1-\lambda\mu\nu)^2E}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\lambda\nu)}$ ὅπου $E=(AB\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:



Ὡς γνωστὸν (Ἄσκ. 600)

$\frac{(AB\Lambda)}{(B\Gamma\Lambda)}=\frac{EA}{\Gamma E}=\frac{1}{\mu}$ (1), $\frac{(A\Lambda\Gamma)}{(B\Gamma\Lambda)}=\frac{AZ}{ZB}=\nu$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{(AB\Lambda)+(A\Lambda\Gamma)}{(B\Gamma\Lambda)}=\frac{1}{\mu}+\nu \Longrightarrow$

$\frac{E}{(B\Gamma\Lambda)}=\frac{1+\mu+\mu\nu}{\mu} \Longrightarrow (B\Gamma\Lambda)=\frac{\mu E}{1+\mu+\mu\nu}$ (3).

Ὁμοίως $(A\Lambda\Gamma)=\frac{\nu E}{1+\nu+\nu\lambda}$ (4),

$(ABM)=\frac{\lambda E}{1+\lambda+\lambda\mu}$ (5).

$(\Lambda NM)=E-(B\Gamma\Lambda)-(A\Lambda\Gamma)-(ABM)=E\left(1-\frac{\mu}{1+\mu+\mu\nu}-\frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\right)=$

$=\frac{(1-\lambda\mu\nu)^2E}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\lambda\nu)}$ (6).

Παρατηρήσεις:

Ἐὰν $\lambda=\mu=\nu$ ὁ προηγούμενος τύπος δίνεται $(\Lambda MN)=\frac{(1-\lambda)^3}{1-\lambda^3}E$.

Διὰ $\lambda=2$ $(\Lambda MN)=\frac{E}{7}$.

Ἐὰν λάβωμεν τὰ σημεῖα Δ', E', Z' συμμετρικὰ τῶν προηγουμένων Δ, E, Z πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀντιστοίχως θὰ προκύψῃ ἓν λαμβανόμενον ὡς προηγουμένως τρίγωνον $\Lambda'N'M'$. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπον (6) ἂν τεθοῦν ἀντὶ τῶν λ,μ,ν τὰ $\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\mu},\frac{1}{\nu}$. Κατὰ συνέπειαν $(\Lambda NM)=(\Lambda'N'M')$.

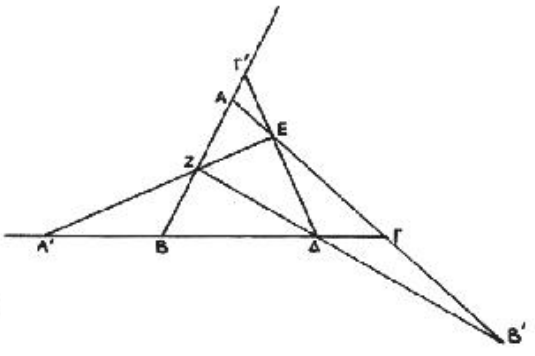
664. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ δίδονται τὰ σημεῖα Δ, E, Z ὥστε $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}}=\lambda$, $\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{EA}}=\mu$, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=\nu$. Θέτομεν $A'=B\Gamma\cap EZ$, $B'=\Gamma A\cap Z\Delta$, $\Gamma'=AB\cap\Lambda E$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

Λύσις:

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου ἔχομεν $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma E}}{EA}\cdot\frac{\overline{AZ}}{ZB}=-1$ ἢ $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\mu\cdot\nu=-1\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}}=-\frac{1}{\mu\nu}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{\overline{\Gamma B'}}{\overline{B'A}}=-\frac{1}{\lambda\mu}$, $\frac{\overline{A\Gamma'}}{\overline{\Gamma'B}}=-\frac{1}{\lambda\nu}$.



Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῆς ἀσκ. 611 θὰ ἔχωμεν $(A'B'\Gamma')=$

$=\frac{\left(1-\frac{1}{\lambda^2\mu^2\nu^2}\right)E}{\left(1-\frac{1}{\lambda\mu}\right)\left(1-\frac{1}{\lambda\nu}\right)\left(1-\frac{1}{\mu\nu}\right)}=\frac{(\lambda^2\mu^2\nu^2-1)E}{(1-\lambda\mu)(1-\lambda\nu)(1-\mu\nu)}$

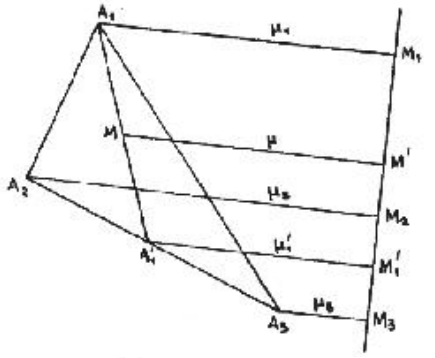
Παρατηροῦμεν ὅτι ἵνα τὰ A', B', Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\lambda^2\mu^2\nu^2=1$ ἢ $\lambda\mu\nu=\pm1$ δηλαδὴ α) αἱ $A\Delta, BE, \Gamma Z$ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου $(\lambda\mu\nu=1)$ ἢ β) $\lambda\mu\nu=-1$.

Διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύει τὸ θεώρημα τοῦ Ceva, ἐὰν δὲ M τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $A\Delta, BE, \Gamma Z$ ἡ εὐθεία A', B', Γ' ὀνομάζεται συνήθως πολικὴ

τοῦ M πρός $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ἰσχύει τό θεώρημα τοῦ Μενελάου.

665. Δίδεται τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καί εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου του. M', M_1, M_2, M_3 αἱ προβολαί ἐπί τήν (ε) τυχόντος σημείου M καί τῶν κορυφῶν A_1, A_2, A_3 ἀντιστοίχως. Θέτομεν $\overline{MM'} = \bar{\mu}$, $\overline{A_iM_i} = \bar{\mu}_i$, $i = 1,2,3$. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς συμβολισμούς τῆς ἀσκήσεως 600 θά ἀποδείξωμεν ὅτι $\bar{\mu}\cdot\bar{E} = \mu_1\cdot\bar{E}_1 + \mu_2\cdot\bar{E}_2 + \mu_3\bar{E}_3$.

Ἀπόδειξις:



Χρησιμοποιοῦμεν τάς ἀσκ. 264,600 Τήν ἀπόστασιν τοῦ A_i ὀνομάζομεν $\bar{\mu}_i'$, ὁπλαδή $\overline{A_i'M_i'} = \bar{\mu}_i'$.

$\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_1'}} = \frac{\bar{x}_1}{u_1} = \frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}_1}$. Ἀπό τό τραπέζιον $A_1M_1M_1'A_1'$ θά ἔχωμεν

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{\mu}_1'(\bar{E}_2+\bar{E}_3)+\bar{\mu}_1\bar{E}_1}{\bar{E}} \quad (1).$$

Ἀλλά $\frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2} \Longrightarrow \bar{\mu}_1' = \frac{\bar{\mu}_2\bar{E}_2+\bar{\mu}_3\bar{E}_3}{\bar{E}_2+\bar{E}_3}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \bar{\mu}\bar{E} = \bar{\mu}_1\bar{E}_1+\bar{\mu}_2\bar{E}_2+\bar{\mu}_3\bar{E}_3$ (3).

Ἐφαρμογαί τοῦ ἀνωτέρω τύπου:

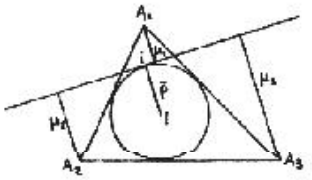
α) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεία (ε) εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (O) περί τό $\overset{\Delta}{A_1A_2A_3}$ καί τό σημεῖον M ταυτίζεται μέ τό σημεῖον O.

$$\frac{a_1a_2a_3}{4} = \bar{E}\cdot R = \bar{\mu}_1\cdot\bar{E}_1+\bar{\mu}_2\bar{E}_2+\bar{\mu}_3\bar{E}_3$$

β) Ἐάν τό σημεῖον M κεῖται ἐπί τῆς (ε)

$$\bar{\mu}_1\cdot\bar{E}_1+\bar{\mu}_2\cdot\bar{E}_2+\bar{\mu}_3\bar{E}_3 = 0.$$

γ) Ἔστω ὅτι ἡ (ε) εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καί $M \equiv I$. Εἶναι $\rho\bar{E} = \bar{\mu}_1\bar{E}_1+\bar{\mu}_2\bar{E}_2+\bar{\mu}_3\bar{E}_3 \Longrightarrow \rho\bar{E} = \bar{\mu}_1\frac{\rho a_1}{2} + \bar{\mu}_2\frac{\rho a_2}{2} + \bar{\mu}_3\frac{\rho a_3}{2} \Longrightarrow 2E = -\mu_1a_1+\mu_2a_2+\mu_3a_3$.



Ἐνδιαφέρουσα εἶναι καί ἡ κάτωθεν ἀπόδειξις διά τό ἴδιο πρόβλημα. Θεωροῦμεν ὅτι ἐπί τῶν κορυφῶν ἐφαρμόζονται δυνάμεις ἐμβέρειαι καί ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς. Ἤτοι $F_{A_1} = a_1$, $F_{A_2} = a_2$, $F_{A_3} = a_3$. Τό κέντρον βάρους τοῦ συστήματος εἶναι ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων ἡ δέ συνισταμένη $F_\Sigma = 2\tau$. Ἐάν λάβωμεν τό θεώρημα τῶν ροπῶν πρός τήν (ε) θά ἔχωμεν $\bar{\rho}F_\Sigma = \bar{\mu}_1F_{A_1}+\bar{\mu}_2F_{A_2}+\bar{\mu}_3F_{A_3}$ $(\bar{\rho} = \overline{Il})$ ἤ $2\tau\bar{\rho} = \bar{\mu}_1a_1+\bar{\mu}_2a_2+\bar{\mu}_3a_3$ ἤ $2E = -\mu_1a_1+\mu_2a_2+\mu_3a_3$.

δ) Ἐφαρμόσατε τόν τύπον διά τούς παρεγγεγραμμένους κύκλους.

666. Διά σημείου O τυχόντος τριγώνου φέρομεν τάς παραλλήλους πρός τάς πλευράς αὐτοῦ. Τό τρίγωνον χωρίζεται εἰς τρία παραλληλόγραμμα καί τρία τρίγωνα. Ἔστω Π_A, Π_B, Π_Γ τά ἐμβαδά τῶν παραλληλογράμμων καί E_A, E_B, E_Γ τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων. Νά δειχθῇ:

α) $\Pi_A\,\Pi_B\cdot\Pi_\Gamma = 8\cdot E_A\cdot E_B\,E_\Gamma$

β) $\sqrt{E} = \sqrt{E_A}+\sqrt{E_B}+\sqrt{E_\Gamma}$.

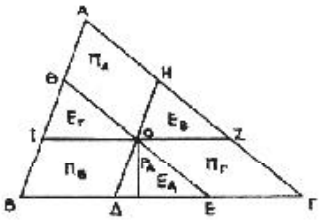
Ἀπόδειξις:

Ἐάν $\rho_A, \rho_B, \rho_\Gamma$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ O ἀπό τάς πλευράς α, β, γ εἶναι

ὡς γνωστόν $\frac{P_A}{U_A}+\frac{P_B}{U_B}+\frac{P_\Gamma}{U_\Gamma}=1$ (1).

Ἀκόμη λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἔχομεν $\frac{E_A}{E}=\frac{O\Delta\cdot OE}{\Theta\gamma}=\frac{P_A^2}{U_A^2}$ (2) ἢ $\frac{E_A^2}{E^2}=\frac{O\Delta\cdot OE\cdot P_A^2}{\Theta\gamma U_A^2}\Longrightarrow O\Delta\cdot OE\cdot P_A^2=4\frac{\Theta\gamma}{a^2}E_A^2$ (3).

α) $\Pi_A^2\Pi_B^2\Pi_\Gamma^2=P_A^2P_B^2P_\Gamma^2\cdot O1\cdot OZ\cdot OH\cdot O\Delta\cdot O\Theta\cdot OE=$ $=8^2E_A^2E_B^2E_\Gamma^2$ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (3). Τελικῶς ἔχομεν τὸ ζητούμενον $\Pi_A\Pi_B\Pi_\Gamma=$ $=8E_AE_BE_\Gamma$.



β) Ἀπὸ τὴν (2) $\frac{\sqrt{E_A}}{\sqrt{E}}=\frac{P_A}{U_A}$ (4). Οἱ σχέσεις (1), (4) δίδουν τὸ ζητούμενον $\sqrt{E}=$ $=\sqrt{E_A}+\sqrt{E_B}+\sqrt{E_\Gamma}$.

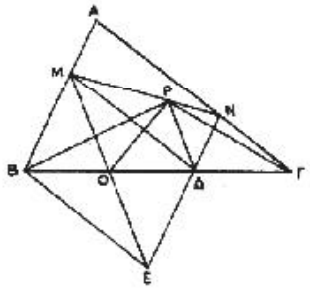
667. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως καὶ ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΜΝ τὸ σημεῖον Ρ ὥστε $\frac{BM}{AM}=\frac{AN}{\Gamma N}=\frac{PM}{PN}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(B\Gamma P)=2(AMN)$.

Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὴν $N\Delta\parallel AB$. Θὰ ἔχωμεν $\frac{BM}{AM}=\frac{AN}{N\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\Longrightarrow M\Delta\parallel A\Gamma$, ἤτοι ΑΜΔΝ παραλληλόγραμμον. Ἄρα $(AMN)=(M\Delta N)$.

Θέτομεν $\frac{PM}{PN}=\frac{\mu}{\nu}$. $(MP\Delta)=\frac{MP}{MN}(M\Delta N)\Longrightarrow$ $\Longrightarrow(MP\Delta)=\frac{\mu}{\mu+\nu}(M\Delta N)$. Ἐπίσης $(BP\Delta)=\frac{B\Delta}{B\Gamma}\cdot$ $(B\Gamma P)\Longrightarrow(BP\Delta)=\frac{\mu}{\mu+\nu}(B\Gamma P)$.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι $(BP\Delta)=2(MP\Delta)$.



Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΜΔ τέμνουσαν τὴν ΝΔ εἰς Ε. Θὰ εἶναι $\frac{E\Delta}{\Delta N}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{PM}{PN}\Longrightarrow P\Delta\parallel ME$. Τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ΜΒΕΔ καὶ συνεπῶς $(PO\Delta)=(MP\Delta)\Longrightarrow(BP\Delta)=$ $=2(MP\Delta)$.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀσκήσεως 264 παραθέτομεν καὶ μίαν δευτέραν λύσιν. Προβάλλομεν τὰ σημεῖα Μ, Α, Ρ, Ν ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς Μ', Α', Ρ', Ν' ἀντιστοίχως. Ἔστω ὅτι $\frac{BM}{AM}=\frac{AN}{\Gamma N}=\frac{PM}{PN}=\frac{\mu}{\nu}$.

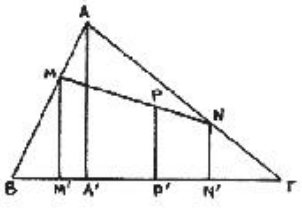
Ἀπὸ τὸ τραπέζιον ΜΝΝ'Μ' $PP'=\frac{\mu NN'+\nu MM'}{\mu+\nu}$ (1).

$A\hat{B}A'\Longrightarrow MM'=\frac{\mu}{\mu+\nu}U_\alpha$ (2).

$A\hat{\Gamma}A'\Longrightarrow NN'=\frac{\nu}{\mu+\nu}U_\alpha$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow PP'=\frac{2\mu\nu U_\alpha}{(\mu+\nu)^2}$.

$(B\Gamma P)=\frac{1}{2}\alpha\cdot PP'=\frac{\mu\nu\alpha U_\alpha}{(\mu+\nu)^2}=\frac{2\mu\nu(AB\Gamma)}{(\mu+\nu)^2}$ (4).

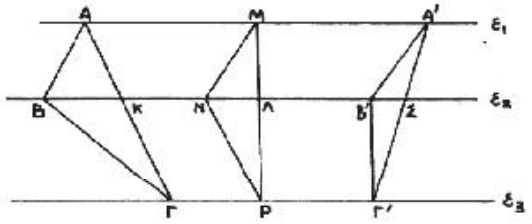


Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΜΝ καὶ ΑΒΓ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν. Θὰ ἔχωμεν $\frac{(AMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{AM\cdot AN}{\Theta\gamma}$, ἀλλὰ $AM=\frac{\nu\gamma}{\mu+\nu}$, $AN=\frac{\mu\theta}{\mu+\nu}$ ἄρα $\frac{(AMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}$ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων (4), (5) $\Longrightarrow(B\Gamma P)=2(AMN)$.

668. Ἐπὶ τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ δίδονται τὰ σημεῖα Α, Α' ἐπὶ τῆς πρώτης, Β, Β' ἐπὶ τῆς δευτέρας καὶ Γ, Γ' ἐπὶ τῆς τρίτης. Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ ὥστε $\frac{\overline{AM}}{\overline{MA'}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{NB'}}=\frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{P\Gamma'}}=\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\overline{MNP})=\frac{\nu(\overline{AB\Gamma})+\mu(\overline{A'B'\Gamma'})}{\mu+\nu}$.

Ἀπόδειξις:

$\varepsilon_1 \| \varepsilon_2 \| \varepsilon_3 \Longrightarrow \frac{(\overline{AB\Gamma})}{B\kappa} = \frac{(\overline{A'B'\Gamma'})}{B'\Sigma} = \frac{(\overline{MNP})}{N\Lambda}$ (1).



Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν $\frac{K\Lambda}{\Lambda\Sigma} = \frac{AM}{MA'} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἄρα $\frac{BN}{NB'} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Sigma} = \frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow \frac{K\Lambda - BN}{\Lambda\Sigma - NB'} = \frac{-BK + N\Lambda}{-N\Lambda + B'\Sigma} = \frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow N\Lambda = \frac{\nu BK + \mu B'\Sigma}{\mu+\nu}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow (\overline{MNP}) = \frac{\nu(\overline{AB\Gamma}) + \mu(\overline{A'B'\Gamma'})}{\mu+\nu}$.

Παρατήρησις:

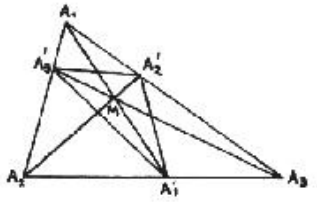
Εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ τυχόν πολυγώνου.

669. Ἔστω τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ σημεῖον M. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{u_1u_2u_3}{x_1x_2x_3} = \frac{(A_1'A_2'A_3')}{2(A_1A_2A_3)}$. (Οἱ συμβολισμοὶ ἐκ τῆς ἀσκ. 600).

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν $(A_1'A_2'A_3') = \frac{2(A_1A_2A_3)}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$ (1) (ἄσκ. 611, (6)) ὅπου $\frac{\overline{A_2A_1'}}{\overline{A_1'A_3}} = \lambda$, $\frac{\overline{A_3A_2'}}{\overline{A_2'A_1}} = \mu$, $\frac{\overline{A_1A_3'}}{\overline{A_3'A_2}} = \nu$. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν (ἄσκ. 600) ὅτι $\lambda = \frac{E_3}{E_2}$, $\mu = \frac{E_1}{E_3}$, $\nu = \frac{E_2}{E_1}$ ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) γίνεται $(A_1'A_2'A_3') = \frac{2(A_1A_2A_3)}{(1+\frac{E_3}{E_2})(1+\frac{E_1}{E_3})(1+\frac{E_2}{E_1})} \Longrightarrow \frac{(A_1'A_2'A_3')}{(A_1A_2A_3)} = \frac{E_1E_2E_3}{(E_1+E_2)(E_2+E_3)(E_3+E_1)}$ (2). Ἀλλὰ ὡς γνωστόν $\frac{E_1}{E_2+E_3} = \frac{u_1}{x_1}$ κ.τ.λ. (ἄσκ. 601). Ἄρα τελικῶς ὁ τύπος (2) θὰ γίνῃ $\frac{(A_1'A_2'A_3')}{2(A_1A_2A_3)} = \frac{u_1u_2u_3}{x_1x_2x_3}$.

Μία ἀνεξάρτητος ἀπόδειξις μὴ βασιζομένη εἰς τὸν τύπον (1) εἶναι ἡ κάτωθι.

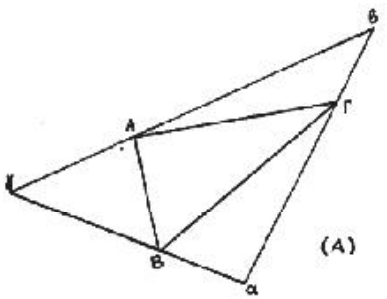


$\frac{(A_2'A_3'M)}{E_1} = \frac{u_2u_3}{x_2x_3}$, $\frac{E_1}{E} = \frac{u_1}{u_1+x_1}$. Ἄρα $(A_2'A_3'M) = \frac{u_1u_2u_3}{x_2x_3(u_1+x_1)}E$ καὶ συνεπῶς $\frac{(A_1'A_2'A_3')}{E} = \frac{u_1u_2u_3}{x_1x_2x_3}\left(\frac{x_1}{u_1+x_1} + \frac{x_2}{u_2+x_2} + \frac{x_3}{u_3+x_3}\right)$.

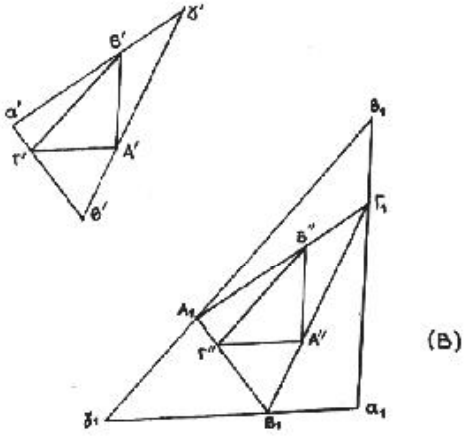
Ἀλλὰ ὡς γνωστόν ἡ παράστασις εἶναι ἴση πρὸς 2 (ἄσκ. 601).

670. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ φέρομεν τὰς εὐθείας $A\chi, B\psi, \Gamma\omega$ σχηματιζούσας γωνίαν θ μετὰ τῶν εὐθειῶν Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντιστοίχως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Διὰ τῶν κορυφῶν Α', Β', Γ' τοῦ $\hat{A'}\hat{B'}\hat{\Gamma'}$ φέρομεν τὰς εὐθείας $B'\chi', \Gamma'\psi', A'\omega'$ σχηματιζούσας γωνίαν π-θ μετὰ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (μὲ τὴν προηγουμένην. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma)(\alpha'\beta'\gamma') = (A'B'\Gamma')(\alpha\beta\gamma)$.

Ἀπόδειξις:



(A)



(B)

Στρέφομεν τὸ σχῆμα (Α) κατὰ γωνίαν θ καὶ ἔστω $A\longrightarrow A_1, B\longrightarrow B_1, \Gamma\longrightarrow\Gamma_1$, $a\longrightarrow a_1, \beta\longrightarrow\beta_1, \gamma\longrightarrow\gamma_1$. Δηλαδή $(A)\longrightarrow(B)$.

Θὰ εἶναι ἀκόμη $a_1\beta_1\parallel A'B'$, $\beta_1\gamma_1\parallel B'\Gamma'$, $\gamma_1a_1\parallel\Gamma'A'$ ὅπως καὶ $A_1B_1\parallel a'\beta'$, $B_1\Gamma_1\parallel\beta'\gamma'$, $\Gamma_1A_1\parallel\gamma'a'$. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ $\hat{A_1B_1\Gamma_1}$ τὸ $\hat{A''B''\Gamma''}$ ὥστε $A''B''\parallel a_1\beta_1$, $B''\Gamma''\parallel\beta_1\gamma_1$, $\Gamma''A''\parallel\gamma_1a_1$[1]. Κατὰ τὴν ἄσκ. 656 ἔχομεν $\frac{(A''B''\Gamma'')}{(A_1B_1\Gamma_1)}=\frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(a_1\beta_1\gamma_1)}$ (1). Τὰ σχήματα $A_1B_1\Gamma_1a_1\beta_1\gamma_1$ καὶ $a'\beta'\gamma'A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια καὶ κατὰ συνέπειαν $\frac{(A''B''\Gamma'')}{(A_1B_1\Gamma_1)}=\frac{(A'B'\Gamma')}{(a'\beta'\gamma')}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(a_1\beta_1\gamma_1)}=\frac{(A'B'\Gamma')}{(a'\beta'\gamma')}$.

Παρατηρήσεις:

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν γωνιῶν $\theta=0$ ἢ $\theta=\frac{\pi}{2}$ θὰ ἔχωμεν τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα

α) Ἐὰν διὰ τῶν κορυφῶν A, B, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους $\beta\gamma, \gamma a, a\beta$ πρὸς τὰς πλευρὰς $B'\Gamma', \Gamma'A', A'B'$ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν A', B', Γ' τὰς $\beta'\gamma', \gamma'a', a'\beta'$ παραλλήλους πρὸς τὰς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τοῦ $\hat{AB\Gamma}$ θὰ εἶναι $(AB\Gamma)(a'\beta'\gamma')=(A'B'\Gamma')(a\beta\gamma)$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ $A\beta\gamma, B\gamma a, \Gamma a\beta$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τότε καὶ αἱ $A'\beta'\gamma', B'\gamma'a', \Gamma'a'\beta'$ θὰ διέρχωνται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

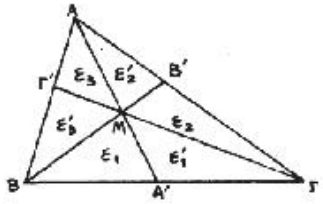
β) Τὸ αὐτὸ μὲ τὸ (α) μὲ ἐναλλαγὴν τῆς λέξεως παράλληλος μὲ τὴν λέξιν κάθετος (Ἰδὲ ἄσκ. 330).

Τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατυπώσωμεν καὶ μίαν γενίκευσιν τῆς ἀσκ. 330.

Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A'B'\Gamma'$. Ἐὰν αἱ διὰ τῶν κορυφῶν A, B, Γ ἀγόμεναι εὐθεῖαι καὶ σχηματίζουσαι γωνίαν θ μὲ τὰς πλευρὰς $B'\Gamma', \Gamma'A', A'B'$ (κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν) διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου τότε καὶ αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι διὰ τῶν A', B', Γ' καὶ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ γωνίαν $\pi-\theta$ (κατὰ προηγουμένην φορὰν) θὰ διέρχωνται ἐπίσης δι' ἑνὸς σημείου.

671. Λύεται τριγώνων ΑΒΓ καὶ σημείου Μ ἐντὸς αὐτοῦ. Αἱ εὐθεῖαι $AM, BM, \Gamma M$ τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς A', B', Γ'. Θέτομεν $(BA'M)=\varepsilon_1$, $(A'\Gamma M)=\varepsilon_1'$, $(\Gamma B'M)=\varepsilon_2$, $(B'AM)=\varepsilon_2'$, $(A\Gamma'M)=\varepsilon_3$, $(\Gamma'BM)=\varepsilon_3'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις $\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}=\frac{1}{\varepsilon_1'}+\frac{1}{\varepsilon_2'}+\frac{1}{\varepsilon_3'}$.

Ἀπόδειξις:



Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν εὐντομον ἀπόδειξιν δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀσκ. 618 ὡς κάτωθι:

$$\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{(\Gamma AM)}=\frac{1}{\varepsilon_3'}+\frac{1}{(ABM)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{(ABM)}=\frac{1}{\varepsilon_1'}+\frac{1}{(B\Gamma M)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{(B\Gamma M)}=\frac{1}{\varepsilon_2'}+\frac{1}{(\Gamma AM)} \quad (3).$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1), (2), (3) ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Μία ἄλλη ἀνεξάρτητος λύσις ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς.

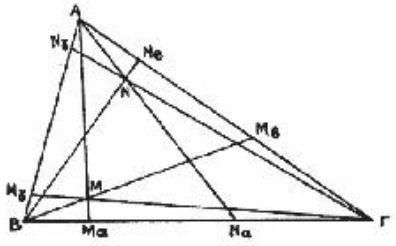
Μὲ τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'$ (1). Ἐπίσης ἔχομεν $\frac{AM}{MA'}=\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'}=\frac{\varepsilon_2'+\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\Longrightarrow\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1'\varepsilon_3'=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1'\varepsilon_2'$ (2) καὶ διὰ κυκλικῆς

(1) Ἀποδεικνύεται θεώρημα ὑπάρξεως.

ἐναλλαγῆς $\varepsilon_2'\varepsilon_1 + \varepsilon_2'\varepsilon_1' = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3'$ (3), $\varepsilon_3'\varepsilon_2 + \varepsilon_3'\varepsilon_2' = \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_3\varepsilon_1'$ (4).

Διά προσθέσεως τῶν (2), (3), (4) $\Longrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \varepsilon_1'\varepsilon_2' + \varepsilon_2'\varepsilon_3' + \varepsilon_3'\varepsilon_1'$ (5). Τελικῶς ἄν διαιρέσωμεν τήν ἐκέίνην (5) διά τῆς (1) ἔχομεν τό ζητούμενον.

672. Ἔστω Μ καί Ν ἰσογώνια συζυγῆ σημεῖα ἐντός τριγώνου $\hat{AB\Gamma}$ (ἰδέ 11.12.2). Ἐάν $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma, N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$ τά σημεῖα τομῆς τῶν $AM, BM, \Gamma M, AN, BN, \Gamma N$ μετά τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τοῦ $\hat{AB\Gamma}$ ἀντιστοίχως νά δειχθῇ ὅτι $\frac{(M_\alpha M_\beta M_\gamma)}{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)} = \frac{AM_\alpha \cdot BM_\beta \cdot \Gamma M_\gamma}{AN_\alpha \cdot BN_\beta \cdot \Gamma N_\gamma}$.



Ἀπόδειξις:

Ἐκ τῆς ἀσκ. 611 ἔχομεν

$(M_\alpha M_\beta M_\gamma) = \frac{2 \cdot BM_\alpha \cdot \Gamma M_\beta \cdot AM_\gamma \cdot (AB\Gamma)}{a\beta\gamma}$ ἤ

$(M_\alpha M_\beta M_\gamma) = \frac{BM_\alpha \cdot \Gamma M_\beta \cdot AM_\gamma}{2R}$ (1). Ὁμοίως

$(N_\alpha N_\beta N_\gamma) = \frac{BN_\alpha \cdot \Gamma N_\beta \cdot AN_\gamma}{2R}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{(M_\alpha M_\beta M_\gamma)}{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)} = \frac{BM_\alpha \cdot \Gamma M_\beta \cdot AM_\gamma}{BN_\alpha \cdot \Gamma N_\beta \cdot AN_\gamma}$ (3).

Διά τά $\hat{BAM_\alpha}, \hat{\Gamma AN_\alpha}$ ἐπειδή $\hat{BAM_\alpha} = \hat{\Gamma AN_\alpha}$ θά ἔχωμεν $\frac{(BAM_\alpha)}{(\Gamma AN_\alpha)} = \frac{AB \cdot AM_\alpha}{A\Gamma \cdot AN_\alpha} = \frac{BM_\alpha}{\Gamma N_\alpha}$ (4).

Ὁμοίως $\frac{B\Gamma \cdot BM_\beta}{AB \cdot BN_\beta} = \frac{\Gamma M_\beta}{AN_\beta}$ (5) καί $\frac{\Gamma A \cdot \Gamma M_\gamma}{\Gamma B \cdot \Gamma N_\gamma} = \frac{AM_\gamma}{BN_\gamma}$ (6).

(3), (4), (5), (6) $\Longrightarrow \frac{(M_\alpha M_\beta M_\gamma)}{(N_\alpha N_\beta N_\gamma)} = \frac{AM_\alpha \cdot BM_\beta \cdot \Gamma M_\gamma}{AN_\alpha \cdot BN_\beta \cdot \Gamma N_\gamma}$.

673. Εἰς τό $\hat{AB\Gamma}$ $\mu_\alpha = \Delta_\alpha \Longrightarrow 4\rho\rho_\alpha = (\beta-\gamma)^2$.

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν $\rho = \frac{E}{\tau}$, $\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$. Ἄρα $4\rho\rho_\alpha = \frac{4E^2}{\tau(\tau-\alpha)} = 4(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = a^2 - (\beta-\gamma)^2$ (1).

Ἐξ ἄλλου τά θεωρήματα τῶν διαμέσων καί τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου μᾶς δίδουν $\frac{a^2}{2} + 2\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (2) καί $\frac{a^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \Delta_\alpha^2 = \beta\gamma$ (3).

Πολλαπλασιάζομεν τήν ἐκείνην (3) ἐπί τό 2 καί προσθέτομεν εἰς τήν (2). Θά ἔχωμεν $\frac{a^2}{2} + \frac{2a^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} = (\beta+\gamma)^2$ (4) διότι $\Delta_\alpha = \mu_\alpha$. Μετά τάς πράξεις ἡ (4) γίνεται $a^2 = 2(\beta-\gamma)^2 \Longrightarrow a^2 - (\beta-\gamma)^2 = (\beta-\gamma)^2$ (5).

(1), (5) $\Longrightarrow 4\rho\rho_\alpha = (\beta-\gamma)^2$.

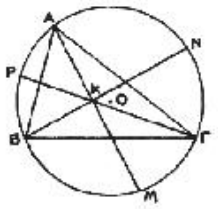
Παρατήρησις:

Εἰς αὐτό τό τρίγωνον εἶναι ἀκόμη $\mu_\alpha^2 = \beta\gamma$. (Διατί;)

674. Αἱ διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τήν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τά σημεῖα Μ, Ν, Ρ. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{(MNP)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)^3}{27\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$.

Ἀπόδειξις:

Τό θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν διά τά $\hat{PKN}$, $\hat{BK\Gamma}$: $\frac{(PKN)}{(BK\Gamma)} = \frac{KP \cdot KN}{KB \cdot K\Gamma} \Longrightarrow \frac{3(PKN)}{(AB\Gamma)} = \frac{\mathcal{D}_o^2(K)}{KB^2 \cdot K\Gamma^2} = \frac{\mathcal{D}_o^2(K)}{\frac{16}{81}\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$ (1).



Εἶναι γνωστόν ὅμως ὅτι $\mathcal{D}_o(K) = -\frac{a^2+\beta^2+\gamma^2}{9}$ (2) (ἄσκ. 522)

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{3(PKN)}{(AB\Gamma)} = \frac{(a^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{16\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$. Ἀλλά $a^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{4}{3}(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)$ καί τελικῶς $\frac{(PKN)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)^2}{27\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$ (3).

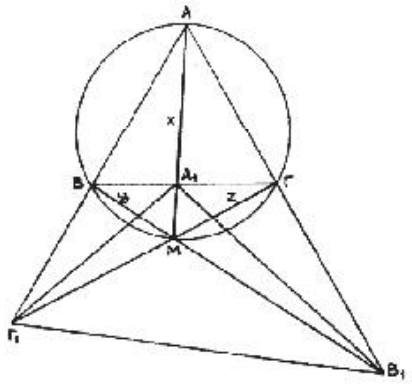
Ὁμοίως $\frac{(PKM)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)^2}{27\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$ (4) καί $\frac{(MKN)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)^2}{27\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$ (5).

(3), (4), (5) $\Longrightarrow \frac{(MNP)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)^3}{27\mu_\alpha^2\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$.

675. Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ μικροτέρου τόξου ΒΓ περιφερείας περιγεγραμμένης περί τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐάν θέσωμεν $A_1 = MA \cap B\Gamma$, $B_1 = MB \cap \Gamma A$,

$\Gamma_1 = M\Gamma \cap AB$ νά δειχθῆ ὅτι $(A_1B_1\Gamma_1) = 2(AB\Gamma)$.

Ἀπόδειξις:



Θέτομεν $AM = x$, $BM = y$, $\Gamma M = z$. Εἶναι ὡς γνωστόν $x = y + z$ (1).

Εἰς τό $\overset{\triangle}{BM\Gamma}$ ἡ MA_1 διχοτομεῖ τήν $\hat{BM\Gamma}$. Ἄρα $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1\Gamma}} = \frac{y}{z}$ (2).

Διά τό $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ ἡ MB_1 ἐξωτερική διχοτόμος τῆς $\hat{AM\Gamma}$. Ἄρα $\frac{\overline{\Gamma B_1}}{\overline{B_1 A}} = -\frac{z}{x}$ (3).

Ὁμοίως $\frac{\overline{A\Gamma_1}}{\overline{\Gamma_1 B}} = -\frac{x}{y}$ (4).

Ὡς γνωστόν τό ἐμβαδόν τοῦ $\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1}$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (Ἄσκ. 611):

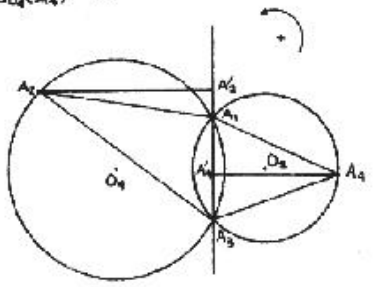
$$(A_1B_1\Gamma_1) = \frac{\left[1+\left(\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)\right](AB\Gamma)}{\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)} \quad (5).$$

Τελικῶς ἐκ τῶν (1), (5) ἔχομεν $(A_1B_1\Gamma_1) = 2(AB\Gamma)$.

676. Δίδονται ἐπί ἐπιπέδου τά σημεῖα A_1, A_2, A_3, A_4. Καλέσωμεν (O_i, R_i) τόν κύκλον πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} - \{A_i\}$. Νά δειχθῆ ὅτι:

$$\frac{1}{\Delta_{O_1}(A_1)} + \frac{1}{\Delta_{O_2}(A_2)} + \frac{1}{\Delta_{O_3}(A_3)} + \frac{1}{\Delta_{O_4}(A_4)} = 0.$$

Ἀπόδειξις:



Εἶναι γνωστόν ὅτι $\Delta_{O_2}(A_2) = 2\,\overline{O_4O_2}\cdot\overline{A'_2A_2}$ (Ἄσκ. 490). Ἐπίσης $\Delta_{O_4}(A_4) = 2\,\overline{O_2O_4}\cdot\overline{A'_4A_4}$. Διά διαιρέσεως κατά μέλη τῶν δύο σχέσεων ἔχομεν $\frac{\Delta_{O_2}(A_2)}{\Delta_{O_4}(A_4)} = -\frac{\overline{A'_2A_2}}{\overline{A'_4A_4}} = \frac{(\overline{A_1A_2A_3})}{(\overline{A_3A_4A_1})}$ (1).

Θέτομεν $(\overline{A_1A_2A_3}) = \bar{E}_4$, $(\overline{A_3A_2A_4}) = \bar{E}_1$, $(\overline{A_3A_4A_1}) = \bar{E}_2$, $(\overline{A_1A_4A_2}) = \bar{E}_3$ (2).

Ἐκ τῆς (1) θά ἔχωμεν $\bar{E}_1\cdot\Delta_{O_1}(A_1) = \bar{E}_2\cdot\Delta_{O_2}(A_2) = \bar{E}_3\cdot\Delta_{O_3}(A_3) = \bar{E}_4\cdot\Delta_{O_4}(A_4)$ (3).

Εὐκόλως δέ ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν (ἄν θέσωμεν τάς ἰσότητας $\frac{1}{k}$) ὅτι $\frac{1}{\Delta_{O_1}(A_1)} + \frac{1}{\Delta_{O_2}(A_2)} + \frac{1}{\Delta_{O_3}(A_3)} + \frac{1}{\Delta_{O_4}(A_4)} = k(\bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3+\bar{E}_4)$. Ἀλλά $\bar{E}_1+\bar{E}_2+\bar{E}_3+\bar{E}_4 = 0$ καί συνεπῶς ἀποδείχθη τό ζητούμενον.

677. Ἔστω τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καί σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἔστω M_i ἡ προβολή τοῦ M ἐπί τήν εὐθείαν ἐπί τῆς ὁποίας κεῖται ἡ πλευρά a_i.

Τό τρίγωνον $M_1M_2M_3$ ὀνομάζεται ποδικόν τρίγωνον τοῦ M.

Συναρτήσει τῶν $\bar{E}_i$ (ἰδέ ἄσκ. 600) νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ ποδικοῦ τριγώνου τοῦ M.

Λύσις:

Θέτομεν $\overline{MM_i} = p_i$. Εἶναι $\frac{(\overline{M_2MM_3})}{E} = \frac{P_2P_3}{a_2a_3} = \frac{4\bar{E}_2\bar{E}_3}{a_2^2a_3^2}$ ἤ $(\overline{M_2MM_3}) = 4\bar{E}\frac{\bar{E}_2\bar{E}_3}{a_2^2a_3^2}$. Ὁμοίως ὑπολογίζομεν τά $(\overline{M_3MM_1})$, $(\overline{M_1MM_2})$. Ἡ πρόσθεσις κατά μέλη δίδει $(\overline{M_3M_2M_1}) = \frac{4\bar{E}}{a_1^2a_2^2a_3^2}(\bar{E}_1\bar{E}_2a_3^2 + \bar{E}_2\bar{E}_3a_1^2 + \bar{E}_3\bar{E}_1a_2^2) = \frac{1}{4\bar{E}R^2}(\bar{E}_1\bar{E}_2a_3^2 + \bar{E}_2\bar{E}_3a_1^2 + \bar{E}_3\bar{E}_1a_2^2)$ (1).

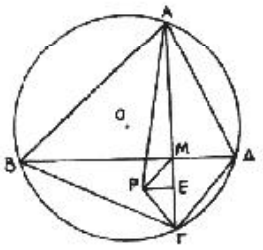
Παρατηρήσεις:

Ἐάν λυθῆ ὑπ' ὄψιν ἡ ἄσκησις 887, εὑρίσκομεν $\frac{(M_1M_2M_3)}{E} = \frac{|\Delta_O(M)|}{4R^2}$ (2).

Ἐάν M' ἕτερον τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $A_1A_2A_3$ μέ προβολάς M'_i, ἐκ τοῦ τύπου (2) προκύπτει εὐκόλως $\left|\frac{\Delta_O(M)}{\Delta_O(M')}\right| = \frac{(M_1M_2M_3)}{(M'_1M'_2M'_3)}$ (3).

678. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) καὶ P εἶναι τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(B\Gamma\Delta)\cdot PA^2 + (AB\Delta)\cdot P\Gamma^2 = (A\Gamma\Delta)\cdot PB^2 + (AB\Gamma)\cdot P\Delta^2$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $\hat{\Gamma M P} < 1^L$. Εἰς τὰ τρίγωνα $\hat{\Gamma MP}$, $\hat{\Delta MP}$ ἐφαρμόζομεν ἀντιστοίχως τὰ θεωρήματα τῆς ὀξείας καὶ ἀμβλείας γωνίας. Θὰ ἔχωμεν $\hat{\Gamma MP} \Longrightarrow P\Gamma^2 = PM^2 + \Gamma M^2 - 2\Gamma M\cdot ME$ (1) καὶ $\hat{AMP} \Longrightarrow PA^2 = PM^2 + AM^2 + 2\,AM\cdot ME$ (2). Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἐκφράσεις (1),(2) ἀντιστοίχως ἐπὶ $AM, \Gamma M$ καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη. Θὰ ἔχωμεν $AM\cdot P\Gamma^2 + \Gamma M\cdot PA^2 = PM^2\cdot A\Gamma + AM\cdot\Gamma M\cdot A\Gamma$ [1] (3).

Εἶναι εὔκολον ὅμως νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{(AB\Delta)}{(B\Gamma\Delta)} = \frac{AM}{\Gamma M}$ (4) καὶ $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{BM}{\Delta M}$ (5).

(3),(4),(5) $\Longrightarrow (B\Gamma\Delta)\,PA^2 + (AB\Delta)\,P\Gamma^2 = (AB\Gamma\Delta)\left[PM^2 + AM\cdot\Gamma M\right]$ (6).

Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $AM\cdot\Gamma M = BM\cdot\Delta M$ (7).

Ἐκ τῶν ἐκφράσεων (6),(7) ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Παρατηρήσεις:

α) Ἰδὲ ἀπόδειξιν τοῦ ἰδίου θεωρήματος κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀσκ. 886.

β) Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ τύπου $\alpha\beta\gamma = 4ER$ διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου, ἐκ τοῦ ἀποδειχθέντος τύπου, διὰ τοποθετήσεως τοῦ P πρώτον εἰς μίαν κορυφήν (π.χ. $P=\Delta$) καὶ κατόπιν διὰ τὸ δεύτερο θεώρημα, εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου O.

679. Τριγώνου ΑΒΓ G τὸ κέντρον βάρους καὶ A', B', Γ' τὰ κέντρα τῶν κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα $BG\Gamma, \Gamma GA, AGB$ ἀντιστοίχως. Θέτομεν E, E' τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$ καὶ R_1, R_2, R_3 τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ $\hat{BG\Gamma}$, $\hat{\Gamma GA}$, $\hat{AGB}$ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ α) $48\cdot E\cdot E' = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$

β) $K = \frac{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)}{R_1^2} + \frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{R_2^2} + \frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{R_3^2} = 0$.

Ἀπόδειξις:

α) Ἔστω α', β', γ' αἱ πλευραὶ τοῦ $\hat{A'B'\Gamma'}$ καὶ $\hat{M}$ τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς διαμέσους $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$. Ὡς γνωστὸν $(M) = \frac{3}{4}E$ καὶ $\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι $A'B'\Gamma' \sim \hat{M}$. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς $\frac{\alpha'}{\mu_\alpha} = \frac{\beta'}{\mu_\beta} = \frac{\gamma'}{\mu_\gamma} = \sqrt{\frac{4E'}{3E}}$ (1).

Ἀκόμη $\frac{\alpha'}{\mu_\alpha} = \frac{\beta'}{\mu_\beta} = \frac{\gamma'}{\mu_\gamma} = \frac{\alpha'\mu_\alpha+\beta'\mu_\beta+\gamma'\mu_\gamma}{\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2} = \frac{6E'}{3/4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} = \frac{8E'}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow 48\cdot E\,E' = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$.

β) Ἐκ τοῦ $\hat{BG\Gamma}$ ἔχομεν $4R_1\frac{1}{3}E = \frac{2}{3}\mu_\beta\cdot\frac{2}{3}\mu_\gamma\,\alpha \Longrightarrow R_1 = \frac{\mu_\beta\mu_\gamma\alpha}{3E}$. Ἀντικαθιστῶμεν καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)}{R_1^2} = 9E^2\frac{\beta^2-\gamma^2}{\mu_\beta^2\mu_\gamma^2}$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\mu_\alpha^2(\beta^2-\gamma^2) + \mu_\beta^2(\gamma^2-\alpha^2) + \mu_\gamma^2(\alpha^2-\beta^2) = 0$. Ἢ $\alpha^2(\mu_\beta^2-\mu_\gamma^2) + \beta^2(\mu_\alpha^2-\mu_\gamma^2) + \gamma^2(\mu_\gamma^2-\mu_\beta^2) = 0$. Τοῦτο ὅμως εἶναι εὔκολον, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν τὰς διαμέσους συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

680. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν 120°, κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $BA'\Gamma$, $\Gamma B'A$,

---

[1] Τύπος τοῦ Stewart.

$A\Gamma'B$. Ἐάν $E=(AB\Gamma)$ καί $E'=(A'B'\Gamma')$, νά δειχθῆ ὅτι $E'=\frac{5}{2}E+\frac{\sqrt{3}}{8}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, ὅπου α,β,γ αἱ πλευραί τοῦ $\overset{\frown}{AB\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου M (σημεῖον Steiner) καί σχηματίζουσι γωνίας 120° ἀνά δύο. Θέτομεν $AM=x, BM=y, \Gamma M=z$. Διά τό σημεῖον M τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπί τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό $\overset{\frown}{A\Gamma'B}$ ἰσχύει ἡ σχέσις $M\Gamma'=x+y$. Ὁμοίως $MA'=y+z$, $MB'=x+z$.

Ἐάν εἰς τό τρίγωνον $BM\Gamma$ ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα τῆς ἀμβλείας γωνίας εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha^2=y^2+z^2+yz$. Ὁμοίως $\beta^2=z^2+x^2+zx$, $\gamma^2=x^2+y^2+xy$ (1).

Συμφώνως πρός τήν ἄσκ. 652 ἔχομεν $E'=\frac{\sqrt{3}}{4}(MA'\cdot MB'+MB'\cdot M\Gamma'+M\Gamma'\cdot MA')$ ἤ $E'=\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+y)(x+z)+(y+x)(y+z)+(z+x)(z+y)]$ (2) καί $E=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$ (3).

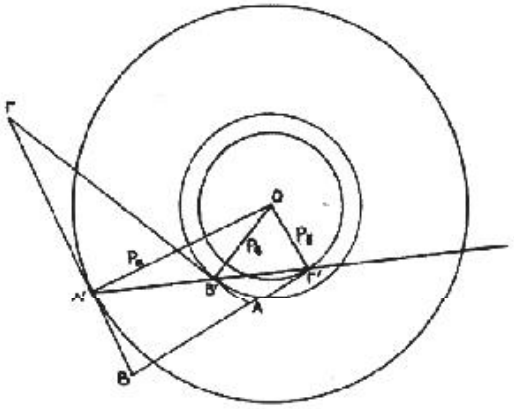
(1),(2),(3) $\Longrightarrow E'=\frac{5}{2}E+\frac{\sqrt{3}}{8}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Σημείωσις:

Ἐάν μία γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 120°, ὁ ὑπολογισμός τοῦ E' γίνεται διά τῆς ἰδίας μεθόδου.

681. Εὐθεία (ε) τέμνει τρεῖς ὁμοκέντρους κύκλους $(O,\rho_\alpha),(O,\rho_\beta),(O,\rho_\gamma)$ εἰς τά σημεῖα A',B',Γ' ἀντιστοίχως. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων εἰς τά σημεῖα A',B',Γ' τέμνονται ἀνά δύο εἰς τά σημεῖα Γ,A,B. Ἐάν ρ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τήν (ε) νά ἀποδειχθῆ ὅτι $(AB\Gamma)=\frac{A'B'\cdot B'\Gamma'\cdot\Gamma'A'}{2\rho}$.

Ἀπόδειξις:



Συμφώνως πρός τό ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Simson τά σημεῖα A,B,Γ,O εἶναι ὁμοκυκλικά καί εἶναι ὡς γνωστόν ἀπό 11.3.8 $\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma=2\rho R^2$ ὅπου R ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου περί τό $AB\Gamma$.

Ἀκόμη ἐκ τῶν $\overset{\frown}{OA'B'}$, $\overset{\frown}{\Gamma AB}$ ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν ἐμβαδῶν ἔχομεν $\frac{(OA'B')}{(AB\Gamma)}=\frac{\rho_\alpha\rho_\beta}{\alpha\beta}$ (1).

Ἀλλά $(OA'B')=\frac{1}{2}\rho\cdot A'B'$ καί $(AB\Gamma)=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$. Διά ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (1) θά ἔχωμεν $\rho_\alpha\rho_\beta=\frac{2R}{\gamma}\rho\cdot A'B'$ (2).

Κυκλικῶς λαμβάνομεν δύο ἀκόμη ἐξέσεις καί διά πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν καί τῆς (2) κατά μέλη λαμβάνομεν $\rho_\alpha^2\rho_\beta^2\rho_\gamma^2=\frac{8R^3}{\alpha\beta\gamma}\rho^3 A'B'\cdot B'\Gamma'\cdot\Gamma'A'$ (3).

Ἐκ τῆς (3) λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς $\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma=2\rho R^2$ καί τῆς $(AB\Gamma)=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ ἔχομεν τό ζητούμενον.

682. Μέ διαμέτρους τάς πλευράς τριγώνου γράφομεν κύκλους. Ἐάν D ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ ἐφαπτομένου τῶν τριῶν προηγουμένων κύκλων ἐξωτερικῶς νά δειχθῆ ὅτι $\sqrt{\frac{D}{\tau-\alpha}-1}+\sqrt{\frac{D}{\tau-\beta}-1}+\sqrt{\frac{D}{\tau-\gamma}-1}=\sqrt{\frac{\tau}{D-\tau}}$.

Ἀπόδειξις:

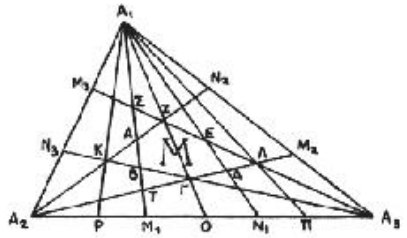
Ἔστω O τό κέντρον τοῦ κύκλου μέ διάμετρον D καί M,N,P τά μέσα τῶν πλευρῶν $B\Gamma,\Gamma A,AB$. Θά ἔχωμεν $OM=\frac{1}{2}(D-\alpha), ON=\frac{1}{2}(D-\beta), OP=\frac{1}{2}(D-\gamma)$ (1). Ἀκόμη $(OMN)+(ONP)+(OPM)=(MNP)$ (2).

Ἐκφράζοντες ἀπό τάς σχέσεις (1) εἰς τήν σχέσιν (2) τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων διά τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος ἔχομεν τό ζητούμενον ἀποτέλεσμα.

683. Ἐπί τῶν πλευρῶν A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 τριγώνου $A_1A_2A_3$ λαμβάνομεν τά σημεῖα M_1-N_1, M_2-N_2, M_3-N_3 ἀντιστοίχως ὥστε $A_3M_1 = M_1N_1 = N_1A_3$, $A_3M_2 = M_2N_2 = N_2A_1$, $A_1M_3 = M_3N_3 = N_3A_2$. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ κοινοῦ $M = M_1A_1N_1 \cap M_2A_2N_2 \cap M_3A_3N_3$.

Λύσις:

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι τά σημεῖα $\Gamma = A_2M_2 \cap A_3N_3$, $Z = A_2N_2 \cap A_3M_3$ κεῖνται ἐπί τῆς διαμέσου A_1O τοῦ $A_1A_2A_3$. Θέτομεν $K = A_2N_2 \cap A_3N_3$ καί $P = A_1K \cap A_2A_3$, $\Lambda = A_3M_2 \cap A_3M_3$ καί $\Pi = A_1\Lambda \cap A_2A_3$. Ἐκ τοῦ θεωρήματος πάλιν τοῦ Ceva εὑρίσκεται ὅτι $A_2P = \Pi A_3 = \frac{1}{4}A_2A_3$, ὅθεν τό χωρίον Μ εἶναι ἑξάγωνον. Θά ἔχωμεν $(M) = (T\Sigma\Lambda) - (\Delta\Lambda E) - (Z\Sigma A) - (BT\Gamma)$.



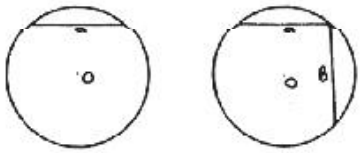
Ἀλλά ὡς γνωστόν (ἄσκ. 663) $(T\Sigma\Lambda) = \frac{1}{7}E$, ὅπου $E = (A_1A_2A_3)$. Ἐπίσης ὁ ἐφαρμογῆς τῆς ἰδίας ἀσκ. 663 εὑρίσκομεν ὅτι $(\Delta\Lambda E) = (Z\Sigma A) = (BT\Gamma) = \frac{1}{70}E$. Ἄρα $(M) = \frac{1}{7}E - \frac{3}{70}E = \frac{E}{10}$.

684. Μέ πλευράς τέσσερα ἄνισα μεταξύ των εὐθύγραμμα τμήματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν τρία μή ἴσα ἐγγεγραμμένα εἰς τόν αὐτόν κύκλον (O, R) τετράπλευρα. Τό ἐμβαδόν τῶν ἐν λόγῳ τετραπλεύρων εἶναι τό αὐτό, ἔστω E, αἱ διαγώνιοι δέ αὐτῶν εἶναι κατά ζεύγη ἴσαι. Ἐάν x, y, z τά μήκη τῶν τριῶν διαφορετικῶν διαγωνίων νά δειχθῇ ὅτι $E = \frac{xyz}{4R}$.

Ἀπόδειξις:

Ἕκαστον τετράπλευρον θά συμβολίζεται διά τῶν πλευρῶν του $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ἡ διαδοχή τῶν γραμμάτων θά δεικνύῃ καί τήν διαδοχήν τῶν πλευρῶν. Θά λέγωμεν π.χ. τό τετράπλευρον $\alpha\beta\gamma\delta$.

Ἡ κατασκευή τῶν ἐν λόγῳ τετραπλεύρων δύναται νά γίνῃ ὡς ἑξῆς: τοποθετοῦμεν τήν πλευράν α εἰς τόν κύκλον (O) (ὡς χορδήν). Ἐν συνεχείᾳ, ὡς διαδοχικήν πλευράν μίαν τῶν ὑπολοίπων ἔστω τήν β.



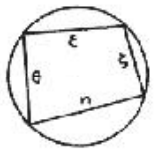
Ἐάν ἤδη τοποθετηθῇ τό ζεῦγος $\gamma\delta$, λαμβάνομεν τό $\alpha\beta\gamma\delta$. Ἐάν τοποθετηθῇ τό $\delta\gamma$ λαμβάνομεν τό μή ἴσον πρός τό προηγούμενον $\alpha\beta\delta\gamma$.

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι μία κυκλική ἐναλλαγή τῶν τεσσάρων γραμμάτων δίδει τό ἴδιον τετράπλευρον (ἴσα τετράπλευρα) ἔχομεν σχηματίσει ἐν συνόλῳ ὀκτώ τετράπλευρα. Συνεχίζοντες οὕτω λαμβάνομεν 24 τετράπλευρα[1], ὡς ὁ κατωτέρω πίναξ:

$\alpha\beta$	$\gamma\delta$ + $\delta\gamma$ ≠	8 τετράπλευρα	$\alpha\delta$	$\beta\gamma$ ≠ $\gamma\beta$ +	8 τετράπλευρα
$\alpha\gamma$	$\beta\delta$ ≠ $\delta\beta$ ≠	8 τετράπλευρα			

(1) Εἶναι αἱ μεταθέσεις τῶν 4 πραγμάτων $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ἐάν ληφθῇ ἓν τυχόν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τετραπλεύρων, π.χ. τό εξηθ, λαμβάνομεν ἴσα τετράπλευρα μέ τήν κυκλικήν ἐναλλαγήν $\theta\binom{\varepsilon}{\eta}\varsigma$. Ἐπίσης καί ἡ κατ' ἀντίστροφον τάξιν γραφή τοῦ τετραπλεύρου δίδει τό ἴδιον τετράπλευρον. Ἀπό τό θηζε ἔχομεν διά τῆς κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τέσσερα ἴσα μεταξύ των τετράπλευρα. Ἤτοι πρός τό εξηθ ἀκτῶ συνολικῶς ἴσα ἀπό τήν ὁμάδα τῶν εἰκοσιτεσσάρων τετραπλεύρων. Ὅθεν συνολικῶς τρία μή ἴσα τετράπλευρα. Ὁ πίναξ δεικνύει τάς ὁμάδας τῶν ἴσων τετραπλεύρων.



εξηθ, θηζε

Τά μή ἴσα τετράπλευρα εἶναι συνεπῶς τά αβγδ — αβδχ — αχβδ.

Τό ἐμβαδόν αὐτῶν εἶναι προφανές ὅτι εἶναι τό αὐτό, ὅπως καί αἱ 6 διαγώνιοί των κατά ξεύγη (ἐάν χίνῃ τό σχῆμα ἤ ἄν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν οἱ κατωτέρω τύποι). Ὡς εἶναι γνωστόν (θεώρημα Πτολεμαίου, ἐφαρμοσταί) αἱ διαγώνιοι τῶν τετραπλεύρων εἶναι:

αβγδ	αβδχ	αχβδ
$x=\frac{(\alpha\chi+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\chi}$	$z=\frac{(\alpha\delta+\theta\chi)(\alpha\theta+\chi\delta)}{\alpha\chi+\delta\delta}$	$x'=\frac{(\alpha\theta+\chi\delta)(\alpha\chi+\theta\delta)}{\alpha\delta+\theta\chi}$
$y=\frac{(\beta\delta+\alpha\chi)(\alpha\delta+\theta\chi)}{\chi\delta+\alpha\beta}$	$y'=\frac{(\alpha\delta+\theta\chi)(\alpha\chi+\theta\delta)}{\alpha\theta+\chi\delta}$	$z'=\frac{(\alpha\beta+\chi\delta)(\alpha\delta+\theta\chi)}{\alpha\chi+\theta\delta}$.

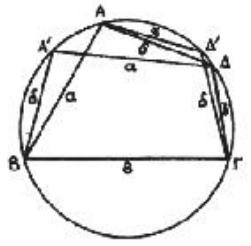
Ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου $R=\frac{1}{4}\left[\frac{(\alpha\theta+\chi\delta)(\alpha\chi+\theta\delta)(\alpha\delta+\theta\chi)}{(s-\alpha)(s-\theta)(s-\chi)(s-\delta)}\right]^{1/2}$

Τό ἐμβαδόν $E=[(s-\alpha)(s-\theta)(s-\chi)(s-\delta)]^{1/2}$ ὅπου $2s=\alpha+\theta+\chi+\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων προκύπτει ὅτι $E=\frac{xyz}{4R}$.

Μία διαφορετική λύσις εἶναι ἡ κάτωθι:

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πλευρά δ εἶναι ἀπέναντι τῆς θ. Κατασκευάζομεν δύο ἄλλα τετράπλευρα, διαφορετικά μεταξύ των καί πρός τό προηγούμενον, τοποθετοῦντες ἀπέναντι τῆς β' τήν α καί κατόπιν τήν χ (ἰδέ σχῆμα).



Οὕτω ἔχομεν κατασκευάσει τά τρία διαφορετικά τετράπλευρα, τά ὁποῖα ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα ἔχουν 6 διαγωνίους κατά ξεύγη ἴσας. Αἱ τρεῖς διαφορετικαί διαγώνιοι εἶναι αἱ $A\Gamma=x$, $B\Delta=y$, $B\Delta'=\Gamma\Delta'=z$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τά τρία τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΑΒΓΔ', Α'ΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα, χωρίς τήν βοήθεια τοῦ τύπου $E=\sqrt{(s-\alpha)(s-\theta)(s-\chi)(s-\delta)}$, καί ἡ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου εἰς τό ΑΒΓΔ μᾶς δίδει $xy=\alpha\chi+\beta\delta$. Πολλαπλασιάζομεν ἐπί z $xyz=\alpha\chi z+\beta\delta z=4R(A'\Gamma\Delta)+4R(A'\Gamma B)=4RE$.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

685. Νά δειχθῇ ὅτι τό ἐμβαδόν παντός τετραπλεύρου ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς διαγωνίου ἐπί τήν προβολήν τῆς ἄλλης διαγωνίου ἐ-

πί εὐθείαν κάθετον πρὸς τὴν πρώτην.

686. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Κατασκευάσομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΕΖ. Συγκρίνατε τὸν ρόμβον μὲ τὸ τετράγωνον.

687. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ (1) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον μὲ ἀπέναντι κορυφὰς Ι, Δ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ.

688. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ὥστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = λ (ὅπου λ δοθὲν μῆκος). Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Ο φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τεμνούσας ἀντιστοίχως τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς Δ′, Ε′, Ζ′ νὰ δειχθῇ ὅτι ΟΔ′+ΟΕ′+ +ΟΖ′ = λ.

689. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

690. Ἐὰν ΑΒΓΔ τετράγωνον καὶ Ε, Ζ, Η τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι (ΑΖΗ) = (ΔΕΖ).

691. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τότε [(ΑΟΒ)+(ΓΟΔ)]-[(ΑΟΔ)+(ΒΟΓ)] = 4(ΕΟΖ).

692. Δύο τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα ἐὰν ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχως διαγωνίους καὶ αἱ διαγώνιοι των σχηματίζουν ἴσας γωνίας.

693. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ τυχόντα σημεῖα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι 2(ΑΕΖ) = (ΑΒΓΔ) − ΒΕ·ΔΖ.

694. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^L$), κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΑΓΖΗ. Ἐὰν Κ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΓ νὰ δειχθῇ α) (ΔΓΚ) = (ΖΓΚ) β) (ΑΔΓ) + (ΑΕΒ) = $\frac{1}{2}$ ΒΓ².

695. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μὲ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαν 60°, μία πλευρὰ ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων 12 ἑκατοστὰ καὶ μὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέσου αὐτοῦ.

696. Εὐθεία διὰ τοῦ μέσου τῆς διαμέσου τραπεζίου καὶ τέμνουσα τὰς παραλλήλους πλευρὰς διχοτομεῖ τὸ τραπέζιον.

697. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετράπλευρον καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἐὰν Η = ΑΖ ∩ ΔΕ καὶ Θ = ΓΕ ∩ ΒΖ τότε (ΕΗΖΘ) = (ΑΗΔ) + (ΒΘΓ).

698. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=1^L$) κατασκευάζομεν ἐκτὸς ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΒΔ)=(ΒΓΔ)-(ΑΓΔ)$.

699. Ἔστω Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΟΑΕΒ, ΟΒΖΓ, ΟΓΗΔ, ΟΔΘΑ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ $(ΕΖΗΘ)=2(ΑΒΓΔ)$.

700. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΑΔΛΜ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΕΒΘ)+(ΙΔΛ)=(ΖΑΜ)+(ΗΓΚ)$.

701. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὰς καθέτους Ox, Oy, Oz, Oω ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτῶν σημεῖα $x_1, y_1, z_1, ω_1$ ὥστε $Ox_1=AB$, $Oy_1=BΓ$, $Oz_1=ΓΔ$, $Oω_1=ΔA$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(x_1y_1z_1ω_1)=2(ΑΒΓΔ)$.

702. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαγωνίου ΒΔ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν γραμμὴν ΔΑΒ εἰς σημεῖον Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΓΖ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

703. Εἰς πᾶν τρίγωνον $E=\frac{δ_α Δ_α}{4}\cdot\frac{K^2-1}{K}$ ὅπου $K=\frac{\max(β,γ)}{\min(β,γ)}$.

704. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς Ε. Ἐὰν $Z=ΒΕ\cap ΓΔ$ νὰ δειχθῇ α) $(ΑΒΖ)=(ΑΓΖ)$ β) Ἡ ΑΖ διχοτομεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ.

705. Διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΒΕΖ)=(ΔΓΕ)$.

706. Διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς ΓΑ, ΓΒ εἰς Δ, Ε ἀντιστοίχως. Ἡ διὰ τοῦ Γ παράλληλος τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΔΖ)=(ΒΕΖ)$.

707. Δύο ἰσοδύναμα καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τοποθετοῦνται ὥστε νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἐὰν Ρ καὶ Κ εἶναι αἱ τομαὶ τῶν διαγωνίων των καὶ ἡ ΡΚ τέμνῃ τὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Μ, Ν ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $PM=KN$.

708. Διὰ σημείου Ρ ἐντὸς κύκλου (ο) φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς ΑΡΒ, ΓΡΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΟΓ)=(ΒΟΔ)$.

709. Διὰ τῶν κορυφῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Ἐὰν αὗται τέμνουν τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου εἰς

Ε,Ζ,Η,Θ νά δειχθῆ ὅτι (ΕΖΗΘ) = (ΑΒΓΔ).

710. Ἐπί εὐθείας δίδονται τρία διαδοχικά σημεῖα Α,Β,Γ ὥστε ΑΒ=α, ΒΓ=β. Πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζομεν τά ἰσόπλευρα $A\hat{B}\Delta$, $B\hat{\Gamma}E$. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου ΑΓΕΔ.

711. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ ὥστε $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \kappa$. Ἐάν θέσωμεν Δ′=ΑΔ∩ΖΕ, Ζ′=ΓΖ∩ΔΕ, Ε′= =ΒΕ∩ΔΖ α) νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\overline{Z\Delta'}}{\overline{\Delta'E}} = \kappa^2$ β) νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ $\Delta'\hat{E}'Z'$ ἐξαρτήσει τοῦ (ΑΒΓ) καί τοῦ κ.

712. Ἐάν Δ εἶναι τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, Ε τό μέσον τῆς ΑΔ, Θ τό μέσον τῆς ΒΕ καί Ζ τό μέσον τῆς ΓΘ νά δειχθῆ ὅτι 8 (ΕΖΘ) = (ΑΒΓ).

713. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον Ρ. Τυχαία εὐθεία τέμνει τήν μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς τά σημεῖα Α καί Δ καί τήν ἄλλην εἰς Β καί Γ. Νά δειχθῆ ὅτι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{PA \cdot PB}{P\Gamma \cdot P\Delta}$.

714. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\hat{B} = 45°$, ἡ δέ διάμεσος ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΑΒ. Νά δειχθῆ ὅτι (ΑΒΓ) = AB^2.

715. Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον ἐντός τριγώνου ΑΒΓ καί Δ,Ε,Ζ τά σημεῖα ὅπου αἱ ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ τέμνουν ἀντιστοίχως τήν περιγεγραμμένην περί τό ΑΒΓ περιφέρειαν. Νά δειχθῆ ὅτι $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{MA \cdot MB \cdot M\Gamma}{M\Delta \cdot ME \cdot MZ}$.

716. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καί $\Delta\hat{E}Z$ τό ὀρθικόν αὐτοῦ. Νά δειχθῆ ὅτι τά ποδικά τρίγωνα τοῦ Η καί τοῦ Ο ὡς πρός τό $\Delta\hat{E}Z$ εἶναι ἰσοδύναμα (Η ὀρθόκεντρον, Ο κέντρον περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ $A\hat{B}\Gamma$).

Ὑπόδειξις: Τά Η, Ο εἶναι συμμετρικά πρός τό κέντρον τῆς περιφερείας περί τό $\Delta\hat{E}Z$. Λάβατε ὑπ' ὄψιν τήν Ἀσκ. 611, ἐφαρμογή 5.

717. Ἡ περίμετρος πολυγώνου περιγεγραμμένου περί κύκλον διαιρεῖται εἰς ν ἴσα μέρη καί τά σημεῖα διαιρέσεως ἑνοῦνται μέ τό κέντρον. Νά δειχθῆ ὅτι τό πολύγωνον διηρέθη εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη.

718. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς τούς πόδας τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καί Γ καί τόν πόδα τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α, συναρτήσει τῶν πλευρῶν α,β,γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

719. Ἐάν Δ,Ε,Ζ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = 1 - \left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right)^2$.

720. Αἱ διά τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ διάμετροι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τοῦ περιγεγραμ-

μένου κύκλου τέμνουν τὰς πλευρὰς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ εἰς M, N, P ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{\Gamma P}=\frac{2}{R}$ β) $\frac{\overline{MA'}}{AM}+\frac{\overline{NB'}}{BN}+\frac{\overline{P\Gamma'}}{\Gamma P}=1$.

721. Τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ πλευραὶ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^4+2x^3+a^2x^2+\beta x+\beta+1=0$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

722. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (O,R) περὶ τὸ $\hat{AB\Gamma}$ ἀπὸ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\alpha}{2E}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)$. $(\hat{A}<1^L)$.

723. Ἐκ σημείου O ἐντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν ἡμιευθείας καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$. Ἐφ' ἑκάστης τούτων καὶ ἀπὸ τοῦ O λαμβάνομεν τμήματα $OA_1=AB$, $OB_1=2\cdot B\Gamma$, $O\Gamma_1=3\cdot\Gamma\Delta$, $O\Delta_1=4\cdot\Delta A$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)=6(AB\Gamma\Delta)+10(A\Gamma\Delta)+2(B\Gamma\Delta)$.

724. Ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ἡ πλευρὰ $A\Delta=\alpha$ καὶ ἡ $\Delta\Gamma=2\alpha$. Ἐπὶ τῆς $A\Delta$ εἰς τυχὸν σημεῖον E αὐτῆς φέρομεν κάθετον καὶ λαμβάνομεν $E\Theta=AE$ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ διάμετρον $A\Delta$, ἥτις τέμνει τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἰς τὰ σημεῖα K καὶ M. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma\Delta)=2\cdot\Delta\Theta^2+KM^2$.

725. Ἐὰν ε καὶ ε_α εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν A τριγώνου $AB\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α) $\varepsilon=\frac{\rho}{2R}E$ β) $\varepsilon_\alpha=\frac{\rho_\alpha}{2R}E$.

726. Ἐὰν Δ, E, Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ $\hat{AB\Gamma}$ μετὰ τῶν πλευρῶν καὶ $\Delta_\alpha, E_\beta, Z_\gamma$ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἀντιστοίχως τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς $\hat{A}$ μετὰ τῆς $B\Gamma$, τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς $\hat{B}$ μετὰ τῆς ΓA, κ.τ.λ. νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\Delta EZ)=(\Delta_\alpha E_\beta Z_\gamma)$.

727. Ἐὰν M τυχὸν σημεῖον ἐντὸς τριγώνου καὶ Δ, E, Z τὰ σημεῖα τομῆς τῶν $AM, BM, \Gamma M$ μὲ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(BM\Gamma)}{(\Gamma M\Delta)}+\frac{(AMB)}{(\Gamma MB)}=1+\frac{(AMB)(AME)}{(\Gamma MB)(AMZ)}$.

728. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$, AM ἡ διάμεσος καὶ $A\Delta$ ἡ δίχοτόμος. Ἡ περιφέρεια περὶ τὸ $\hat{A\Delta M}$ τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\Delta BB')=(\Delta\Gamma\Gamma')$.

729. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ τμήματα $BB'=\Gamma\Gamma'=B\Gamma$. Ἐὰν $B\Delta$ καὶ ΓE αἱ δίχοτόμοι τῶν γωνιῶν B καὶ Γ καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΔE νὰ δειχθῇ ὅτι $(B'M\Gamma')=(B'B\Gamma\Gamma')$.

Ὑπόδειξις: Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς δίχοτόμου ἔχομεν $AE=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$. Ἄρα $\frac{AE}{AB'}=\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$. Ἤτοι $\Delta E\parallel B\Gamma'$ κ.τ.λ.

730. Εἰς τὰς γωνίας ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἐγγεγραμμένοι τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι μεταξύ των ἀκτῖνος ρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ

ἰσοπλεύρου ἐναρτήσει τοῦ ρ.

Τ31. Ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = α. Ἔστω Ε, Ζ αἱ τομαὶ τῶν περιφερειῶν (Β,α), (Γ,α). Ἐὰν γράψωμεν τὰς περιφερείας μὲ κέντρα Ε, Ζ καὶ ἀκτῖνα 2α θὰ προκύψῃ ὡοειδές σχῆμα, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδόν.

Τ32. Εἰς κύκλον (Ο,R) εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Γράφομεν τὰς περιφερείας (Β,R), (Ζ,R), (Α,ΑΕ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς περιοχῆς τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὰ τόξα ΑΟΓ, ΑΟΕ, μικρότερον τόξον ΓΕ.

Τ33. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ σημεῖον Γ ὥστε $\overline{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Ἐκατέρωθεν τῆς ΑΒ γράφομεν τὰ ἡμικύκλια διαμέτρων ΑΓ καὶ ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τόξα τῶν δύο αὐτῶν ἡμικυκλίων διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 2.

Τ34. Δίδεται περιφέρεια (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Ἔστω Γ,Δ σημεῖα τῆς ΑΒ ὥστε ΑΓ = ΓΟ = ΟΔ = ΔΒ. Πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου γράφομεν ἡμιπεριφερείας διαμέτρων ΑΓ, ΑΟ, ΑΔ. Πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου γράφομεν ἡμιπεριφερείας διαμέτρων ΒΔ, ΒΟ, ΒΓ. Αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΑΓ, ΓΒ ὁρίζουν μίαν γραμμὴν τ_1, αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΑΟ, ΟΒ γραμμὴν τ_2 καὶ τέλος αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΑΔ καὶ ΔΒ γραμμὴν τ_3. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τ_1, τ_2, τ_3 χωρίζουν τὸν κύκλον (Ο,R) εἰς τέσσερα ἰσοδύναμα μέρη.

Τ35. Εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγράφομεν κύκλον, εἰς τοῦτον ἰσόπλευρον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφομεν κύκλον· συνεχίζομεν οὕτω ἐπ' ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων κύκλων. Νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ αὐτὸ διὰ κανονικὸν πεντάγωνον, ἑξάγωνον, δεκάγωνον.

Τ36. Εἰς πᾶν τρίγωνον α) $E = \frac{1}{4\sqrt{Y(Y-\upsilon_\alpha)(Y-\upsilon_\beta)(Y-\upsilon_\gamma)}}$ ὅπου $2Y = \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma$

β) $E = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-\mu_\alpha)(M-\mu_\beta)(M-\mu_\gamma)}$ ὅπου $2M = \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.

Τ37. Ἂν α,β,γ,δ πλευραὶ τραπεζίου ΑΒΓΔ (β,δ βάσεις) καὶ 2p = α+β+γ+δ νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΒΓΔ) = \frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}\sqrt{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)}$.

Ἐὰν θέσωμεν λ, λ' τὰς διαφορὰς τῶν βάσεων καὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ μ, μ' τὰ ἀθροίσματα αὐτῶν ἔχομεν $(ΑΒΓΔ) = \frac{\mu}{4\lambda}\sqrt{(\mu'+\lambda)(\mu'-\lambda)(\lambda+\lambda')(\lambda-\lambda')}$.

Τ38. Δύο περιφέρειαι (Ο,R) καὶ (Ο',R') τέμνονται ὀρθογωνίως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τὰ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

Ἀπάντησις: $E = \frac{2RR'\sqrt{2RR'(R+R')}}{R^2+R'^2}$.

739. Δύο κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') εὑρίσκονται ὁ εἷς ἐκτὸς τοῦ ἄλλου. Συναρτήσει τῆς διακέντρου d αὐτῶν καὶ τῶν ἀκτίνων νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

Ἀπάντησις: $E = \frac{R+R'}{d^2}\left(\sqrt{d^2-(R-R')^2}\right)^3$

740. Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον αὐτοῦ. Θέτομεν M,N,P τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου μετὰ τῶν πλευρῶν του. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\Delta EZ)^2 = (AB\Gamma)(MNP)$.

741. Ἔστω τρίγωνον $AB\Gamma$, I τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων αὐτοῦ καὶ ΔEZ τὸ ποδικὸν τρίγωνον τοῦ I. Ἐὰν MNP τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ ΔEZ νὰ δειχθῇ ὅτι $(MNP) = (AB\Gamma)\cdot\frac{\rho^2}{4R^2} = \frac{16(AB\Gamma)^5}{\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)^2}$, ὅπου ρ, R αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου διὰ τὸ $AB\Gamma$.

742. Εἰς πᾶν τρίγωνον αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν προβολῶν τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων.

743. Δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζομεν τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ μὲ πλευρὰς $\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta$, κατόπιν τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ πλευρὰς $\beta_1+\gamma_1, \gamma_1+\alpha_1, \alpha_1+\beta_1$ καὶ τέλος τρίγωνον $A_3B_3\Gamma_3$ μὲ πλευρὰς $\beta_2+\gamma_2, \gamma_2+\alpha_2, \alpha_2+\beta_2$. Ἐὰν E, E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $18E_2^2 = 128E^2 + 24E_1^2 + E_3^2$.

744. Τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ P τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του. Νὰ δειχθῇ α) $\frac{PA}{P\Gamma} = \frac{AB\cdot A\Delta}{\Gamma B\cdot\Gamma\Delta}$ β) $AB\cdot\Gamma\Delta = B\Gamma\cdot\Delta A \Longrightarrow \frac{MA}{M\Gamma} = \frac{AB^2}{B\Gamma^2}$ ὅπου M τὸ μέσον τῆς $B\Delta$.

745. Δίδεται ἰσόπλευρον κυρτὸν πολύγωνον $A_1A_2A_3\cdots A_\nu$ καὶ σημεῖον P ἐσωτερικόν. Ἐὰν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ P ἀπὸ τῶν πλευρῶν $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_\nu A_1$ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $x_1+x_2+\cdots+x_\nu = \frac{2E}{\alpha}$, ὅπου E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου καὶ α ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

746. Θεωροῦμεν ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A}=1^L$) καὶ τρία ὅμοια πρὸς ἄλληλα πολύγωνα F_A, F_B, F_Γ τῶν ὁποίων αἱ $B\Gamma, \Gamma A, AB$ εἶναι αἱ ὁμόλογοι πλευραί. Ἐὰν $(F_A), (F_B), (F_\Gamma)$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν πολυγώνων νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(F_A) = (F_B) + (F_\Gamma)$.

747. Δίδεται τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$. Ἐὰν P τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ αὐτοῦ νὰ δειχθῇ ὅτι $(BP\Gamma)^2 = (APB)\cdot(\Gamma P\Delta)$.

748. Ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ἔστω I τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων $B\Delta$ καὶ ΓE τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(B\Gamma\Delta E) = 2(BI\Gamma)$.

749. Τριγώνου $AB\Gamma$ τὰ ὕψη $A\Delta, BE$ καὶ ΓZ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ', E' καὶ Z' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

α) $\frac{A\Delta'}{U_\alpha}+\frac{BE'}{U_\beta}+\frac{\Gamma Z'}{U_\gamma}=1$ β) $\frac{A\Delta'}{U_\alpha}+\frac{BE'}{U_\beta}+\frac{\Gamma E'}{U_\gamma}=4$.

750. Ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζονται ἐξωτερικῶς τά τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ, ΓΑΘΙ. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ ἑξαγώνου ΔΕΘΙΖΗ, ὅπως καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ $\hat{A}B\Gamma$.

751. Ἐπί τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κεῖνται ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Θεωροῦμεν τάς παραλλήλους Δx, Ey, Zz πρός τάς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Θέτομεν $E'=\Delta x\cap A\Gamma$, $Z'=Ey\cap AB$, $\Delta'=Zz\cap B\Gamma$. Νά δειχθῇ ὅτι $(\Delta EZ)=(\Delta'E'Z')$. Τί παρατηροῦμεν ἄν Δ, Ε, Ζ ἐπ' εὐθείας;

Ὑπόδειξις: Χρησιμοποιήσατε τήν ἄσκ. 611.

752. Σημεῖον Ο εὑρίσκεται ἐντός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Διά τοῦ Ο ἄγονται αἱ εὐθεῖαι (x) καί (y) παράλληλοι πρός δύο διαδοχικάς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου. Αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι χωρίζουν τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τέσσερα παραλληλόγραμμα. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τό Ο εὑρίσκεται ἐπί μιᾶς διαγωνίου εἶναι ὅπως δύο μή διαδοχικά παραλληλόγραμμα (ἐκ τῶν τεσσάρων) εἶναι ἰσοδύναμα.

753. Αἱ παράλληλοι ἐκ τυχόντος σημείου Σ πρός τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τάς ἀντιστοίχους διαμέσους αὐτοῦ εἰς τά σημεῖα Μ, Ν, Ρ. Ἐάν G τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου δείξατε ὅτι $\frac{\overline{GM}}{\overline{GA}}+\frac{\overline{GN}}{\overline{GB}}+\frac{\overline{GP}}{\overline{G\Gamma}}=0$.

754. Ἐάν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνωνται εἰς Ο νά δειχθῇ ὅτι $(AOB)(AB\Gamma\Delta)=(AB\Gamma)(AB\Delta)$.

755. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον καί περιγράψιμον. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι $\rho=\frac{2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$.

756. Τρεῖς κύκλοι διέρχονται δι' ἑνός σημείου. Θεωροῦμεν τά σημεῖα τομῆς τῶν κοινῶν χορδῶν τῶν κύκλων ἀνά δύο λαμβανομένων μέ τόν ὑπολοιπόμενον τρίτον κύκλον. Τά οὕτω λαμβανόμενα τρία σημεῖα καί τά τρία σημεῖα τομῆς τῶν κύκλων (πλήν τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν τριῶν κύκλων) ἀποτελοῦν τάς κορυφάς ἑξαγώνου. Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀρτίας τάξεως εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον τῶν πλευρῶν περιττῆς τάξεως.

757. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα. Ἐάν $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4,\rho_5,\rho_6$ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων αὐτῶν καί R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6 αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων αὐτῶν νά δειχθῇ ὅτι α) $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6}$ β) $R_1R_3R_5=R_2R_4R_6$.

758. Ἐάν τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά νά δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΓ διαιρεῖται ὑπό τῆς ΒΔ εἰς λόγον $AB\cdot A\Delta:\Gamma B\cdot\Gamma\Delta$.

759. Ἔστω Μ σημεῖον ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ὅπου ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ΜΕ}{ΜΖ} = \frac{ΓΕ}{ΑΕ} \cdot \frac{ΑΖ}{ΒΖ} \cdot \frac{ΒΕ}{ΓΖ}$.

760. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΡ, ΒΓΔΜ, ΓΔΑΝ, ΔΑΒΣ. Νὰ δειχθῇ ὅτι (ΡΜΝΣ) = (ΑΒΓΔ).

761. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἐγγεγραμμένου εἰς κυκλικὸν τομέα γωνίας 60° καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν μονάδα.

762. Οἱ μέσιστοι κύκλοι αἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τοὺς μηνίσκους τοῦ Ἱπποκράτους εἶναι ἴσοι.

763. Τὸ τετράγωνον τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης τῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

764. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ὥστε $\frac{ΑΜ}{ΜΒ} = \frac{μ}{ν}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΔΜΓ) = \frac{μ(ΔΒΓ) + ν(ΔΑΓ)}{μ+ν}$.

765. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ δύο κάθετοι διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὁ κύκλος (Α,ΑΒ) τέμνει τὴν ΑΓ εἰς Μ, ὁ δὲ κύκλος (Β,ΒΑ) τὴν ΒΓ εἰς Ν. Συνδέομεν ἀκόμη τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν διὰ τόξου κύκλου (Γ,ΓΜ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς ΑΔΒΜΝΑ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς περικλειομένης ἐπιφανείας.

766. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΜΝΡ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐὰν ἡ κορυφὴ Μ τοῦ ἰσοπλεύρου κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς λόγον $\frac{ΑΜ}{ΜΒ} = \frac{μ}{ν}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου.

ΟΜΑΣ Β΄.

767. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν περιφερείας $(O_α)$, $(O_β)$, $(O_γ)$. Ἔστω $ℓ_α, ℓ_β, ℓ_γ$ αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν (λαμβανομένων ἀνὰ δύο). Νὰ δειχθῇ ὅτι $ℓ_α \cdot ℓ_β \cdot ℓ_γ = ρ \cdot Ε$.

768. Δίδεται τρίγωνον $Α_1Α_2Α_3$ καὶ σημεῖον Μ ἐντὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ σημείου Μ φέρομεν παραλλήλους $(x_1), (x_2), (x_3)$ πρὸς τὰς πλευρὰς $α_1, α_2, α_3$ ἀντιστοίχως. Ἔστω ὅτι $Β_2 = (x_1) \cap α_2$, $Γ_3 = (x_1) \cap α_3$, $Γ_1 = (x_2) \cap α_1$, $Β_3 = (x_2) \cap α_3$, $Γ_2 = (x_3) \cap α_2$, $Β_1 = (x_3) \cap α_1$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(Β_1Β_2Β_3) = (Γ_1Γ_2Γ_3)$.

769. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ΄, ΓΑΒ΄, ΑΒΓ΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἰσοπλεύρων συναρτήσει τῶν πλευ-

ρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

770. Ἔστω Ρ τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ H_A, H_B, H_Γ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων $B\hat{\Gamma}P$, $\Gamma\hat{A}P$, $A\hat{B}P$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(H_AH_BH_\Gamma) = (AB\Gamma)$.

771. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἔστω A', B', Γ' τὰ σημεῖα τομῆς τῶν $AP, BP, \Gamma P$ μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Λαμβάνομεν $\overline{A'\alpha} = -\overline{A\alpha'} = \overline{AA'}$, $\overline{B'\beta} = -\overline{B\beta'} = \overline{BB'}$, $\overline{\Gamma'\gamma} = -\overline{\Gamma\gamma'} = \overline{\Gamma\Gamma'}$. Νὰ δειχθῇ α) $(\alpha\beta\gamma) = 4(A'B'\Gamma') + 3(AB\Gamma)$ β) $(\alpha'\beta'\gamma') = (A'B'\Gamma') + 6(AB\Gamma)$.

772. Ἔστω M, N, P τυχόντα σημεῖα καὶ M', N', P' τὰ ἰσοτομικὰ αὐτῶν πρὸς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(MNP) = (M'N'P')$.

773. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ A', B', Γ' σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ὥστε $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'\Gamma}} = \frac{\overline{\Gamma B'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{A\Gamma'}}{\overline{\Gamma'B}} = \frac{p}{q}$. Νὰ ἀποδειχθῇ α) τὰ τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ εἶναι παράλληλα καὶ ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ β) $\frac{E_1}{E} = \frac{p^2+pq+q^2}{(p+q)^2} = \frac{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{\sqrt{\alpha_1^4+\beta_1^4+\gamma_1^4}}{\sqrt{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}}$.

774. Θέτομεν X, Ψ, Z τὰς προβολὰς τοῦ κέντρου βάρους Κ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως. Ἔστω $X_1 = KX \cap \Gamma A$, $X_2 = KX \cap AB$, $\Psi_1 = K\Psi \cap AB$, $\Psi_2 = K\Psi \cap B\Gamma$, $Z_1 = KZ \cap B\Gamma$, $Z_2 = KZ \cap \Gamma A$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(X_1\Psi_1Z_1) = (X_2\Psi_2Z_2) = \frac{16}{9}\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}E^3$.

775. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Μ. Θέτομεν $\Delta = AM \cap B\Gamma$, $E = BM \cap \Gamma A$, $Z = \Gamma M \cap AB$, $\Delta' = AM \cap EZ$, $E' = BM \cap \Delta Z$, $Z' = \Gamma M \cap E\Delta$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\Delta'\hat{E}'Z'$ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ $A\hat{B}\Gamma$ καὶ τῶν λόγων $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \lambda$, $\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{EA}} = \mu$, $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \nu$.

776. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. Θέτομεν $\alpha = BB_1 \cap \Gamma\Gamma_1$, $\beta = \Gamma\Gamma_1 \cap AA_1$, $\gamma = AA_1 \cap BB_1$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)} = K\cdot\frac{\overline{\beta A_1}\cdot\overline{\gamma B_1}\cdot\overline{\alpha\Gamma_1}}{\overline{\beta A}\cdot\overline{\gamma B}\cdot\overline{\alpha\Gamma}} + \frac{1}{K}\frac{\overline{\gamma A_1}\cdot\overline{\alpha B_1}\cdot\overline{\beta\Gamma_1}}{\overline{\gamma A}\cdot\overline{\alpha B}\cdot\overline{\beta\Gamma}}$ ὅπου $K = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}$.

Ὑπόδειξις: Χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου εὑρίσκομεν $\frac{\overline{\beta A_1}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{\Gamma_1B}\cdot\overline{\Gamma A_1}}{\overline{\Gamma_1A}\cdot\overline{\Gamma B}}$. Μετὰ τὰς κυκλικὰς ἐναλλαγὰς ἔχομεν $K\frac{\overline{\beta A_1}\cdot\overline{\gamma B_1}\cdot\overline{\alpha\Gamma_1}}{\overline{\beta A}\cdot\overline{\gamma B}\cdot\overline{\alpha\Gamma}} = \frac{\overline{A_1\Gamma}\cdot\overline{B_1A}\cdot\overline{\Gamma_1B}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}}$.
Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ὑπολογίζομεν καὶ τὴν παράστασιν $\frac{1}{K}\cdot\frac{\overline{\gamma A_1}\cdot\overline{\alpha B_1}\cdot\overline{\beta\Gamma_1}}{\overline{\gamma A}\cdot\overline{\alpha B}\cdot\overline{\beta\Gamma}}$. Τελικῶς λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἀσκ. 600 ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

777. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, E, Z τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως. Αἱ παράλληλοι ἐκ τῶν κορυφῶν A, B, Γ πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν τέμνουν τὰς $EZ, Z\Delta, \Delta E$ εἰς A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $2(A'B'\Gamma') = (AB\Gamma)$.

778. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον καὶ Δ, E, Z αἱ προβολαὶ αὐτοῦ πρὸς

τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι (1) $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{|\mathcal{P}_o(M)|}{4R^2}$ ὅπου (O,R) ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τὸ $\hat{AB\Gamma}$.

Τί παρατηροῦμεν ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου;

779. Δίδεται τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ εὐθεία (ε). Θέτομεν $P_1 = (\varepsilon) \cap A_2A_3$, $P_2 = (\varepsilon) \cap A_3A_1$, $P_3 = (\varepsilon) \cap A_1A_2$. Ἐὰν $M \in (\varepsilon)$ νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν $E_1 \cdot \overline{MP_2} \cdot \overline{MP_3}$, $E_2 \cdot \overline{MP_3} \cdot \overline{MP_1}$, $E_3 \cdot \overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2}$ ὑπάρχει γραμμικὴ ἐξάρτησις. (Διὰ τοὺς συμβολισμοὺς ἴδε ἄσκ. 600).

780. Διὰ τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν Ε′ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ του ἰσχύει $E' = 4\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} E^3 - 2E$.

781. Τὰς πλευρὰς ΒΑ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ διαιροῦμεν διὰ τῶν σημείων A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (ἢ εἰς τοὺς λόγους $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1\Gamma}} = \lambda$, $\frac{\overline{\Gamma E_1}}{\overline{B_1A}} = \mu$, $\frac{\overline{A\Gamma_1}}{\overline{\Gamma_1B}} = \rho$). Τὰς πλευρὰς $B_1\Gamma_1, \Gamma_1A_1, A_1B_1$ τοῦ νέου τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ διαιροῦμεν ἐπίσης διὰ τῶν σημείων A_2, B_2, Γ_2 ἀντιστοίχως εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (ἢ εἰς τοὺς λόγους $\frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_2\Gamma_1}} = \lambda$, $\frac{\overline{\Gamma_1B_2}}{\overline{B_2A_1}} = \mu$, $\frac{\overline{A_1\Gamma_2}}{\overline{\Gamma_2B_1}} = \rho$). Συνεχίζομεν οὕτω μέχρι τοῦ τριγώνου $A_\nu B_\nu \Gamma_\nu$. Ζητεῖται α) νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $A_\nu B_\nu \Gamma_\nu$. β) Ἂν $\nu \longrightarrow \infty$ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἀπείρων τριγώνων.

782. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Σχηματίζομεν τὸ πλῆρες τετράπλευρον προεκτείνοντες τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ δοθέντος. Ἐὰν $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ Κ, Λ, Μ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$(K\Lambda M) = \frac{4(AB\Gamma\Delta)}{\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} - \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right)}.$$

783. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, (I) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. $(I_\alpha), (I_\beta), (I_\gamma)$ οἱ παρεγγεγραμμένοι κύκλοι καὶ Δ_i, E_i, Z_i, $i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ I_i ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Θέτομεν $(\Delta EZ) = S$, $(\Delta_i E_i Z_i) = S_i$ καὶ $(AB\Gamma) = E$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $E = \frac{1}{2}(S_\alpha + S_\beta + S_\gamma - S)$.

784. Τριγώνου ΑΒΓ ἐμβαδοῦ Ε εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O,ρ). Θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους ἐφαπτομένας πρὸς τὰς πλευρὰς αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τρία τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ. Ἂν ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὰ κύκλων καὶ E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ των νὰ δειχθῇ α) $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ β) $E^{1/2} = E_1^{1/2} + E_2^{1/2} + E_3^{1/2}$ γ) $\rho = (EE_1E_2E_3)^{1/2}$.

785. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον. Θέτομεν $\Delta = BO \cap A\Gamma$, $E = \Gamma O \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\Delta OE) \cdot (AB\Gamma) = (BO\Gamma)(\Delta AE)$.

786. Ἔστω τὸ πεντάγωνον $A_1A_2A_3A_4A_5$. Θέτομεν S τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ $S_i = (A_{i+1}A_iA_{i+1})$, $i = 1,2,3,4,5$, $A_6 = A_5, A_6 = A_1$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $S^2 - S(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5) +$

---

(1) Νὰ εὑρεθῇ λύσις ἀνεξαρτήτως (ἴδε ἄσκ. 677).

$+S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1 = 0.$

787. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε_A) εἰς ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν ΒΓ καὶ παράλληλον πρὸς αὐτήν. Ὁμοίως τὰς $(\varepsilon_B), (\varepsilon_\Gamma)$ εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ΑΓ, ΑΒ, μ καὶ ν ἀντιστοίχως. Ἔστω Α', Β', Γ' τὰ σημεῖα τομῆς τῶν $(\varepsilon_B), (\varepsilon_\Gamma), (\varepsilon_A)$ ἀνὰ δύο ἀντιστοίχως. α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. β) Ἐὰν θέσωμεν $\lambda=\rho_\alpha$, $\mu=\rho_\beta$, $\nu=\rho_\gamma$ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἔτσι τοποθετημένα ὥστε ἐπὶ τοῦ σχήματος νὰ ἔχωμεν ὀκτὼ τρίγωνα νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν περιμέτρων αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ΑΒΓ, ἐνῷ ὁ μέσος γεωμετρικὸς τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν διαφέρει ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ κατὰ τὴν ποσότητα $(\alpha^2\rho_\alpha^2 + \beta^2\rho_\beta^2 + \gamma^2\rho_\gamma^2)/4E$.

788. Θεωροῦμεν τοὺς τρεῖς κύκλους τοὺς ἐγγεγραμμένους εἰς τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐφαπτομένους μεταξύ των. Ἐὰν x, y, z εἶναι τὰ μήκη τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τούτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{4}(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^{1/2}$.

789. Τρεῖς κύκλοι $(A,\alpha), (B,\beta), (\Gamma,\gamma)$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς R τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῶν προηγουμένων δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\sqrt{R\beta\gamma(\beta+\gamma+R)} + \sqrt{R\gamma\alpha(\gamma+\alpha+R)} + \sqrt{R\alpha\beta(\alpha+\beta+R)} = \sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$.

790. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 τριγώνου $A_1A_2A_3$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα $M_1\text{-}N_1$, $M_2\text{-}N_2$, $M_3\text{-}N_3$ ἀντιστοίχως ὥστε $\frac{\overline{A_2M_1}}{\overline{M_1A_3}} = \mu_1$, $\frac{\overline{A_2N_1}}{\overline{N_1A_3}} = \nu_1$, $\frac{\overline{A_3M_2}}{\overline{M_2A_1}} = \mu_2$, $\frac{\overline{A_3N_2}}{\overline{N_2A_1}} = \nu_2$, $\frac{\overline{A_1M_3}}{\overline{M_3A_2}} = \mu_3$, $\frac{\overline{A_1N_3}}{\overline{N_3A_2}} = \nu_3$. Θέτομεν $M = \overset{\triangle}{M_1A_1N_1} \cap \overset{\triangle}{M_2A_2N_2} \cap \overset{\triangle}{M_3A_3N_3}$. Νὰ εὑρεθῇ α) συνθήκη μεταξὺ τῶν δεικτῶν μ_i, ν_i ὥστε $M \neq \phi$ β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ M συναρτήσει τοῦ $(A_1A_2A_3)=E$ καὶ τῶν μ_i, ν_i.

791. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν διαιροῦν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ANB) + (\Gamma M\Delta) = (AB\Gamma\Delta)$.

792. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ὥστε $B\Delta = \Gamma E = AZ = p$. Ἐκ τῶν Δ, Ε, Ζ φέρομεν τὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(K\Lambda M) = \left[2 - \left(\frac{p}{\alpha} + \frac{p}{\beta} + \frac{p}{\delta}\right)\right]^2 \cdot E$, ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν του.

793. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θ καὶ ὁ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ καινὴ κορυφὴ ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων x, y, εἶναι $\frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2\gamma^2 - (x^2+y^2-\beta^2-\delta^2)^2}$.

794. Ἔστω p, q, r αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν A, B, Γ ἀντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ εὐθεῖαν (ε) τέμνουσαν ἐξωτερικῶς τὰς πλευρὰς εἰς Δ, Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ α) $4(AB\Gamma)^2 = \alpha^2(p-q)(p-r) + \beta^2(q-p)(q-r) + \gamma^2(r-p)(r-q)$ β) $EZ = \frac{2p(AB\Gamma)}{(p-q)(p-r)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ 6

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

6-1 Ὁρισμοί

6-1.1

Κανονικόν πολύγωνον ὀνομάζομεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

6-1.2

Μία τεθλασμένη γραμμή, τῆς ὁποίας δύο διαδοχικαὶ γωνίαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐν σχέσει πρὸς τὴν κοινὴν πλευρὰν των, θὰ ὀνομάζεται κανονική ἐὰν αἱ πλευραί της εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι της ἐπίσης ἴσαι.

6-2 Ἰδιότητες κανονικῶν πολυγώνων

6-2.1 Θεώρημα

Ἑκάστη γωνία κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς ἰσοῦται πρὸς $\boxed{2-\frac{4}{\nu}}$ ὀρθάς.

6-2.2 Θεώρημα

Ἐὰν κύκλος εἶναι διηρημένος εἰς ν ἴσα μέρη, τότε τὰ σημεῖα διαιρέσεως εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως εἶναι πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον.

6-2.3 Θεώρημα

Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον $\Pi = A_1A_2A_3 \dots A_n$. Θεωρήσωμεν τὰς μεσοκαθέτους δύο διαδοχικῶν πλευρῶν π.χ. $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} καὶ ἔστω O τὸ σημεῖον τομῆς των. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα $A_{i-1}\overset{\Delta}{O}A_i$, $A_i\overset{\Delta}{O}A_{i+1}$ εἶναι ἴσα. Ἐντεῦθεν $OA_{i-1} = OA_i = OA_{i+1} = R$, ἤτοι τὸ Π ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (O,R) καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον (O,α) ὅπου α τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν βάσιν τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων.

6-2.4

Ἐὰν δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

6-3 Ὁρισμοί

6-3.1

Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον καλεῖται **κέντρον** τοῦ πολυγώνου τούτου.

6-3.2

Ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καλεῖται **ἀκτὶς** τοῦ πολυγώνου.

6-3.3

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καλεῖται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Συμβολισμός. Τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς συμβολίζεται μὲ α_ν. Ἡ πλευρὰ αὐτοῦ λ_ν.

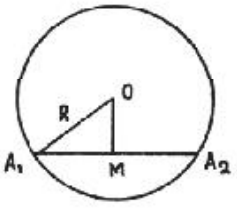
6-3.4

Ἡ κεντρικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὰ $\frac{4}{\nu}$ τῆς ὀρθῆς.

6-4 Διάφοροι ὑπολογισμοί

6-4.1

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς του καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.



Λύσις

1. Ἔστω $A_1A_2=\lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ καὶ $OM=\alpha_\nu$ τὸ ἀπόστημα.

$\overset{\Delta}{OMA_1} \Longrightarrow \alpha_\nu^2 = R^2 - A_1M^2 = R^2 - \frac{\lambda^2}{4} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_\nu = \sqrt{R^2 - \frac{\lambda^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \lambda^2}}$$

2. $(A_1OA_2) = \frac{1}{2}\lambda_\nu \cdot \alpha_\nu = \frac{1}{2}\lambda_\nu\sqrt{R^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$. Ἂν (Π_ν) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $\Pi_\nu = A_1A_2 \ldots A_\nu$ θὰ εἶναι:

$$\boxed{(\Pi_\nu) = \frac{\nu}{2}\lambda_\nu\sqrt{R^2 - \frac{\lambda^2}{4}}}$$

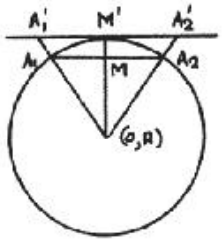
6-4.2

Ἐκ τῆς πλευρᾶς λ_ν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Λύσις

1. Ἐὰν θέσωμεν λ_ν καὶ λ'_ν τὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμέ-

νου πολυγώνου, ἐπειδή τά δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια θά ἔ-
χωμεν:



$$\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{OM'}{OM} = \frac{R}{a_\nu} \quad (1) \quad (\text{ἰδέ σχῆμα})$$

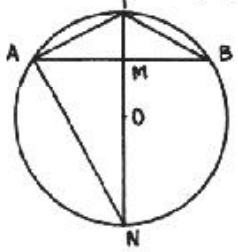
$$(1) \Longrightarrow \lambda'_\nu = \frac{R}{a_\nu}\lambda_\nu \Longrightarrow \boxed{\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

2. Ἐάν (π'_ν) τό ἐμβαδόν τοῦ περιγεγραμμένου πολυ-
γώνου εἶναι:

$$\frac{(\pi'_\nu)}{(\pi_\nu)} = \frac{R^2}{a_\nu^2} \Longrightarrow \boxed{(\pi'_\nu) = \frac{\nu R^2 \lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

6-4.3

Ἐκ τῆς πλευρᾶς λ_ν καί τῆς ἀκτῖνος R κανονικοῦ πολυγώνου νά ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά $\lambda_{2\nu}$ τοῦ εἰς τόν αὐτόν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τό ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμόν πλευ-
ρῶν.



Λύσις

Ἔστω $AB=\lambda_\nu$ καί $A\Gamma=\lambda_{2\nu}$. $\hat{\Gamma AN}$: $\Gamma A^2 = \Gamma M\cdot\Gamma N$ ἤ
$\lambda_{2\nu}^2 = \Gamma M\cdot 2R$ (1). Ἀλλά $\Gamma M = O\Gamma - OM = R - a_\nu =$
$= R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}$ (2)

$$(1),(2) \Longrightarrow \boxed{\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

Ὁ προηγούμενος τύπος ἀπεδείχθη πρῶτον ὑπό τοῦ Ἀρχιμήδους καί εἰς τό ἑξῆς θά ἀναφέρεται ὡς τύπος τοῦ Ἀρχιμήδους.

6-4.4

Τό ἀντίστροφον πρόβλημα. Νά ὑπολογισθῇ τό λ_ν συναρτήσει τῶν $\lambda_{2\nu}$, R.
Ἡ λύσις προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Ἀρχιμήδους, ἤτοι:

$$\boxed{\lambda_\nu = \frac{\lambda_{2\nu}\sqrt{4R^2-\lambda_{2\nu}^2}}{R}}$$

6-5 Ὑπολογισμός τῶν στοιχείων καί κατασκευή τῶν βασικῶν κανονικῶν πολυγώνων

6-5.1 Τετράγωνον

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι δύο κάθετοι διάμετροι τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (O,R). Ἐντεῦθεν προκύπτει ἀμέσως ἡ κατασκευή καί ὁ ὑπολογισμός τῆς πλευρᾶς.

$$\boxed{\lambda_4 = R\sqrt{2}}$$

6-5.2 Κανονικόν ἑξάγωνον

Ἔστω εἰς τόν κύκλον (O,R) ἐγγεγραμμένον τό κανονικόν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἡ κεντρική γωνία

εἶναι $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$ ἤτοι $\overset{\Delta}{AOB}$ ἰσόπλευρον. Ὅθεν ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα R, ἤτοι

$$\boxed{\lambda_6 = R}$$

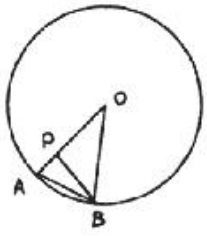
Ἐντεῦθεν προκύπτει καὶ ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ.

Ἐπίσης εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι τὸ $\overset{\Delta}{AΓE}$ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ

$$\boxed{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$$

6-5.3 Κανονικὸν δεκάγωνον

Ἔστω ὁ κύκλος (O,R) καὶ AB ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου. Ἡ κεντρικὴ γωνία $\hat{AOB}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$, ἐνῶ αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς $\overset{\Delta}{AOB}$ εἶναι 72° ἑκάστη.



Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς $\hat{OBA}$. Τὰ τρίγωνα OPB καὶ PBA εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ θὰ εἶναι $PO=PB=AB=\lambda_{10}$. Ἀκόμη $\overset{\Delta}{ABP}\sim\overset{\Delta}{AOB} \Longrightarrow OP^2=OA\cdot PA$ (1), ἤτοι τὸ P χωρίζει τὴν OA εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ ἡ κατασκευή του εἶναι γνωστὴ (ἰδὲ τεῦχος Β', γεωμετρικαὶ κατασκευαί). Ἡ σχέσις (1) γράφεται $\lambda_{10}^2=R(R-\lambda_{10})$ ἢ $\lambda_{10}^2+R\lambda_{10}-R^2=0$ καὶ συνεπῶς:

$$\boxed{\lambda_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

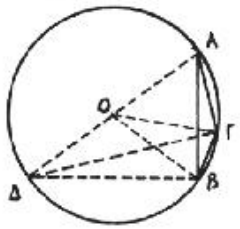
6-5.4 Κανονικὸν πεντάγωνον

Κατασκευάζεται ἐκ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἂν συνδέσωμεν τὰς κορυφὰς τῆς αὐτῆς τάξεως (ἀρτίας ἢ περιττάς). Ἡ πλευρὰ του ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς 6-4.4, εἶναι:

$$\boxed{\lambda_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

6-5.5 Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον

$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15} \Longrightarrow \frac{360^\circ}{6}-\frac{360^\circ}{10}=\frac{360^\circ}{15}$, ἤτοι ἀπὸ τὴν κεντρικὴν γωνίαν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου λαμβάνομεν τὴν κεντρικὴν γωνίαν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Ἄρα ἡ κατασκευή του θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς περιφερείας (O,R) λαμβάνομεν $AB=\lambda_6=R$ καὶ $A\Gamma=\lambda_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, θὰ εἶναι $\hat{BO\Gamma}=\frac{360^\circ}{15}$, ἤτοι $B\Gamma=\lambda_{15}$. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ λ_{15} γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῶν $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$, $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ εὑρίσκομεν: $\Gamma\Delta=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ καὶ $B\Delta=R\sqrt{3}$. Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ πτολεμαίου θὰ ἔχωμεν: $A\Delta\cdot B\Gamma+A\Gamma\cdot B\Delta=AB\cdot\Gamma\Delta \Longrightarrow$



$$\boxed{\lambda_{15}=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]}$$

6-6 Ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα

Ἂς θεωρήσωμεν τὰς κορυφὰς $A_1, A_2, \dots A_\nu$ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) καὶ ἔστω μ φυσικὸς ἀριθμὸς ὥστε $2 \leq \mu < \nu \wedge (\mu,\nu)=1$. Ἐὰν θέσωμεν $\widehat{A_1A_2} = \ell$ θὰ εἶναι $\Gamma = \nu\ell$.

Ἐκ τῆς κορυφῆς A_1 ἐκκινοῦντες συνδέομεν διὰ συνεχοῦς πολυγωνικῆς γραμμῆς τὰ ἄκρα τῶν τόξων μήκους $\mu\ell$. Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον τίθεται ἐνταῦθα εἶναι:

Πότε διὰ πρώτην φορὰν θὰ συναντήσωμεν ἐκ νέου τὴν κορυφὴν A_1;

Ἔστω ὅτι θὰ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τόξον $\mu\ell$ ρ φοράς. Ὑποθέσωμεν ὅτι τότε θὰ ἔχωμεν διατρέξει τὴν περιφέρειαν κ φοράς. Ἄρα θὰ πληροῦται ἡ ἐξίσωσις:

$$\kappa\Gamma = \rho\mu\ell \qquad (1)$$

ὁ κ δὲ νὰ λαμβάνῃ τὴν μικροτέραν δυνατὴν τιμήν.

Ἡ (1) γράφεται:

$$\kappa\nu\ell = \rho\mu\ell \implies \kappa\nu = \rho\mu \qquad (2)$$

Εἰς τὴν (2) ὁ μ εἶναι διαιρέτης τοῦ α' μέλους καὶ ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ν θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ κ. Δεδομένου ὅτι ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ κ λαμβάνομεν ὅτι $\kappa=\mu$, ὅθεν $\rho=\nu$.

Ὁρισμός

Ἡ ὑπὸ τῶν ν χορδῶν σχηματιζομένη οὕτω κλειστὴ μὴ κυρτὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ καλεῖται "κανονικὸν ἀστεροειδὲς πολύγωνον".

Ἡ πλευρά του παρίσταται διὰ τοῦ $\lambda_{\nu,\mu}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\lambda_{\nu,\mu} = \lambda_{\nu,\nu-\mu}$, ἀρκεῖ νὰ ξεκινήσωμεν πάλιν ἐκ τῆς A_1, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν διαγραφῆς. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ἀστεροειδῶν πολυγώνων μὲ ν πλευρὰς ἀρκεῖ ἐκ τῶν $\mu, \nu-\mu$ νὰ λάβωμεν τὸ μικρότερον. Δυνάμεθα ὅμως πάντοτε νὰ λάβωμεν $\mu < \nu-\mu$, ὅτε ἀρκεῖ ν' ἀναζητήσωμεν τὰ ἀστεροειδῆ πολύγωνα διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\mu < \frac{\nu}{2}$ (3).

Ἐκ τῆς ἀνισότητος (3) καὶ τῆς σχέσεως $(\mu,\nu)=1$ συμπεραίνομεν ὅτι διὰ:

$\nu = 5$ ὑπάρχει ἓν ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον μὲ πλευρὰν $\lambda_{5,2}$

$\nu = 6$ οὐδέν

$\nu = 8$ ἓν ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον: πλευρὰ $\lambda_{8,3}$

$\nu = 10$ ἓν ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον: πλευρὰ $\lambda_{10,3}$

$\nu = 15$ τρία ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα: τὰ $\lambda_{15,2}$, $\lambda_{15,4}$, $\lambda_{15,7}$

Οἱ ὑπολογισμοὶ τῶν πλευρῶν τῶν προηγουμένων ἀστεροειδῶν πολυγώνων εἶναι τὸ θέμα τῆς ἀσκήσεως 813.

6-7 Ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz[1] εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα

Θεωροῦμεν τὸ πολύγωνον $A_1A_2 \dots A_\nu$. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος $\frac{A}{M}^{(2)}$, ὅπου $A = \{A_1, A_2, \dots A_\nu\}$ καὶ $M = \{1,1,1 \dots 1\}$ εἶναι τὸ κέντρον O τοῦ πολυγώνου.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz θὰ μᾶς δώσῃ:

1. Ἐάν Μ τυχών σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (ἤ τοῦ χώρου) καί R ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου

$$\sum_{i=1}^{\nu} MA_i^2 = \nu(OM^2+R^2) \qquad (1)$$

2. Ἐάν τό Μ κεῖται ἐπί τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας

$$\sum_{i=1}^{\nu} MA_i^2 = 2\nu R^2 \qquad (2)$$

3. Διά τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1) τῆς Ἀσκ. 887 ἤ καί ἐκ τοῦ τύπου (2) ἔχομεν

$$\nu^2 R^2 = \sum_{i>j}^{1,\nu} A_i A_j^2 \qquad (3)$$

4. Ἐκ τοῦ τύπου (10) τῆς Ἀσκ. 887 καί διά τυχόν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (ἤ τοῦ χώρου) ἔχομεν

$$\sum_{i=1}^{\nu} MA_i^2 = \nu\, OM^2 + \frac{1}{\nu}\sum_{i>j}^{1,\nu} A_i A_j^2 \qquad (4)$$

6-8 Τό πρόβλημα τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς ν ἴσα μέρη

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ διά $\nu = 2^p, 3, 5$ ($p \in \Phi$) ἤ διά τό γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν ἤ καί τῶν τριῶν ἦτο γνωστόν ἀπό τήν ἀρχαιότητα. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἐν τῇ γενικότητί του ὀφείλεται εἰς τόν Gauss. Οὗτος ἀπέδειξεν ὅτι ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας ἄν ν πρῶτος εἶναι δυνατή μόνον ἄν εἶναι τῆς μορφῆς $2^{2^\mu}+1$. (1) Διά $\mu=0$ ἔχομεν $\nu=3$, $\mu=1$ $\nu=5$, $\mu=2$ $\nu=17$, $\mu=3$ $\nu=257$ $\mu=4$ $\nu=65537$.

Ἀπεδείχθη ὅτι διά $\mu=5,6,7,8,9,11,12,15,18,23,36,38,73$ ν οὐχί πρῶτος.

Ἡ ἐργασία διά τόν ἔλεγχον τῶν πρώτων ἀριθμῶν διά τάς τιμάς τοῦ μ εἶναι ἐξαιρετικά ἐπίπονος καί εἶναι πιθανόν ὅτι τά μόνα κανονικά πολύγωνα, τά ὁποῖα δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐκ τοῦ τύπου (1) εἶναι τά ἀνταποκρινόμενα εἰς τήν σειράν $\mu=0,1,2,3,4$.

Ἐάν ὁ ν εἶναι σύνθετος ἀριθμός καί ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων $\nu=\mu\rho$ (2) μέ $(\mu,\rho)=1$ εἶναι δυνατόν νά κατασκευασθῇ τό κανονικόν πολύγωνον μέ ν πλευράς ἐφ' ὅσον κατασκευάζονται τά κανονικά πολύγωνα μέ μ,ρ πλευράς. Τοῦτο δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὡς κάτωθι:

Εἶναι γνωστόν ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοί α,β ὥστε:

$$1=\mu\alpha+\rho\beta \implies \frac{1}{\nu}=\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\rho} \qquad (3)$$

Ἐάν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἐκθέσεως (3) πολ/σθοῦν ἐπί 360° προκύπτει ἡ κεντρική γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ν πλευράς.

Ἄρα λοιπόν ἡ διαίρεσις τοῦ κύκλου εἰς ν ἴσα μέρη ἐπιτυγχάνεται μόνον ὅταν ὁ ν εἶναι τῆς μορφῆς $2^\mu p_1 p_2 \dots p_\kappa$, μέ $p_\lambda = 2^{2^\lambda}+1$, $0 \le \lambda \le \kappa$.

---

(1) Ἰδέ κεφάλαιον (7)

(2) Ἰδέ κεφάλαιον (7)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Κανονικού Πολύγωνου	Συναρτήσει τοῦ R		Συναρτήσει πλευρᾶς λ		Τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει	
	πλευρά λ	ἀπόστημα α	ἀκτὶς περιχεγρ.	ἀπόστημα α	πλευρᾶς α	ἀκτίνος R
Ἰσόπλευρου τριγωνον	$R\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{\lambda_3\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\lambda_3\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}\lambda_3^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{2}$
τετράγωνον	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\lambda_4\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\lambda_4}{2}$	λ_4^2	$2R^2$
Πεντάγωνον	$\frac{1}{2}\sqrt{10-5\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}R(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{10}\lambda_5\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{10}\lambda_5\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{\lambda_5^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Ἑξάγωνον	R	$R\frac{\sqrt{3}}{2}$	λ_6	$\frac{\lambda_6}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\lambda_6^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$
Ὀκτάγωνον	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\lambda_8\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{\lambda_8}{2}(1+\sqrt{2})$	$2\lambda_8^2(1+\sqrt{2})$	$2R^2\sqrt{2}$
Δεκάγωνον	$\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\lambda_{10}(1+\sqrt{5})$	$\frac{\lambda_{10}}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5\lambda_{10}^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-5\sqrt{5}}$
Δωδεκάγωνον	$\frac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}R(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}\lambda_{12}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{\lambda_{12}}{2}(2+\sqrt{3})$	$3\lambda_{12}^2(2+\sqrt{3})$	$3R^2$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}$$

$$(\Pi_\nu) = \frac{1}{4}\nu\lambda_\nu\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}$$

$$\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

$$(\Pi'_\nu) = \frac{\nu R^2\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

$$\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

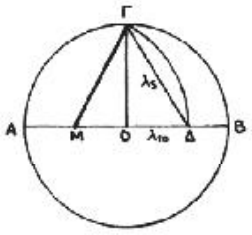
$$\alpha_{2\nu} = \sqrt{\frac{R}{2}(\alpha_\nu+R)} = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2+R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

$$(\Pi_{2\nu}) = \frac{\nu}{R}R\lambda_\nu$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

795. Δίδεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB. Έστω OΓ ἡ κάθετος ἀκτίνα ἐπὶ τὴν AB. Μὲ κέντρον τὸ μέσον M τῆς AO καὶ ἀκτίνα MΓ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα OB εἰς Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $O\Delta = \lambda_{10}$, $\Gamma\Delta = \lambda_5$.



Ἀπόδειξις:

$\overset{\triangle}{M O\Gamma} \Longrightarrow M\Gamma^2 = OM^2 + O\Gamma^2 = \frac{5}{4}R^2 \Longrightarrow M\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}R$

$O\Delta = M\Delta - OM = M\Gamma - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \lambda_{10}$.

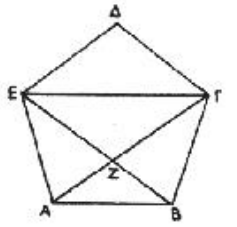
$\overset{\triangle}{\Delta O\Gamma} \Longrightarrow \Gamma\Delta^2 = O\Delta^2 + O\Gamma^2 = \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 + R^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Gamma\Delta = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \lambda_5$.

Παρατήρησις:

Ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$ προκύπτει ὅτι $\lambda_5^2 = \lambda_{10}^2 + R^2$

796. Δύο διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου τέμνονται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Ἀπόδειξις:

Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι $(2-\frac{4}{5})90^\circ$, ἤτοι 108°. Εὐκόλως εὑρίσκεται ὅτι $\hat{EAZ} = \hat{EZA} = 72^\circ \Longrightarrow AE = ZE$.

$\overset{\triangle}{AZB} \sim \overset{\triangle}{EZ\Gamma} \Longrightarrow \frac{AZ}{EZ} = \frac{AB}{E\Gamma}$, ἀλλὰ $E\Gamma = EB$, $AB = EZ$, $AZ = BZ$ καὶ συνεπῶς $\frac{BZ}{EZ} = \frac{EZ}{EB} \Longrightarrow EZ^2 = BZ \cdot EB$.

797. Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια διατρώθη διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων, ἀριθμοῦ πλευρῶν ἀντιστοίχως κ, λ, μ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις:

Ἡ γωνία τοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος κ πλευράς, ἔστω Π_κ, εἶναι $2-\frac{4}{\kappa}$ ὀρθαί. Ὑποτίθεται ὅτι τὰ $\Pi_\kappa, \Pi_\lambda, \Pi_\mu$ ἔχουν κοινὴν κορυφήν. Συνεπῶς $(2-\frac{4}{\kappa})+(2-\frac{4}{\lambda})+$ $+(2-\frac{4}{\mu}) = 4 \Longrightarrow \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$.

798. Ἐὰν λ, λ' αἱ πλευραὶ καὶ α, α' τὰ ἀποστήματα δύο κανονικῶν πολυγώνων Π καὶ Π' ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον (O,R) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\lambda'^2 - \lambda^2 = 4(\alpha^2 - \alpha'^2)$.

Ἀπόδειξις:

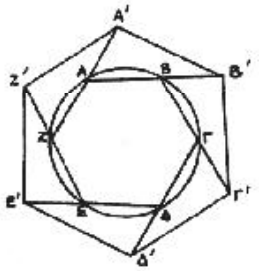
Εἶναι $\alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4} = R^2$ καὶ $\alpha'^2 + \frac{\lambda'^2}{4} = R^2$ ἤτοι $\alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4} = \alpha'^2 + \frac{\lambda'^2}{4}$ ἢ $\lambda'^2 - \lambda^2 = 4(\alpha^2 - \alpha'^2)$.

799. Δίδεται κανονικὸν ἑξάγωνον ABΓΔEZ. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ κατὰ τμήματα $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta' = EE' = ZZ' = x$ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.

Νά εὑρεθῆ ὁ x ὥστε τό ἐξάγωνον $A'B'\Gamma'\Delta'E'Z'$ νά εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $AB\Gamma\Delta EZ$.

Λύσις:

$$\left.\begin{array}{l} AA' = BB' \\ AB' = B\Gamma' \\ \hat{A'AB'} = \hat{B'B\Gamma'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{A'AB'} = \overset{\triangle}{B'B\Gamma'} \Longrightarrow A'B' = B'\Gamma'.$$



Ἤτοι τό $A'B'\Gamma'\Delta'E'Z'$ ἔχει πλευράς ἴσας.

$$\hat{AB\Gamma} = \hat{BB'\Gamma'} + \hat{B\Gamma'B'} = \hat{BB'\Gamma'} + \hat{AB'A'} = \hat{A'B'\Gamma'}.$$

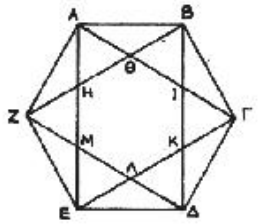
Ἄρα τό $A'B'\Gamma'\Delta'E'Z'$ εἶναι καί ἰσογώνιον, κατά συνέπειαν κανονικόν ἑξάγωνον.

Δύο κανονικά πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν εἶναι ὡς γνωστόν ὅμοια μεταξύ των, ἄρα $\frac{(A'B'\Gamma'\Delta'E'Z')}{(AB\Gamma\Delta EZ)} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = 4 \Longrightarrow A'B' = 2AB$.

Τό θεώρημα ἐξείας γωνίας εἰς τό τρίγωνον $A'AB'$ θά μᾶς δώσῃ $A'B'^2 = AA'^2 + AB'^2 - AA' \cdot AB'$ (1). Ἐάν θέσωμεν $AB = a$ καί $AA' = BB' = x$ ἡ (1) γίνεται $4a^2 = x^2 + (a+x)^2 - x(a+x) \Longrightarrow x^2 + ax - 3a^2 = 0$ καί ἀπό τήν ἐξίσωσιν αὐτήν εὑρίσκεται ὁ x.

800. Φέρομεν τάς διαγωνίους $A\Gamma, \Gamma E, EA, B\Delta, \Delta Z$ καί ZB τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ τομαί των εἶναι κορυφαί κανονικοῦ ἑξαγώνου καί νά εὑρεθῆ ἡ πλευρά καί τό ἐμβαδόν αὐτοῦ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ δοθέντος ἑξαγώνου.

Λύσις:



Τό τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές μέ παρά τήν βάσιν γωνίας ἴσας πρός 30°. Ἄρα $\hat{BA\Gamma} = 30°$. Ὁμοίως $\hat{AB'Z} = 30°$. Ἄρα τό $\overset{\triangle}{A\Theta B}$ εἶναι ἰσοσκελές μέ παρά τήν βάσιν γωνίας ἴσας πρός 30°. Ὁμοίως καί τό $\overset{\triangle}{AHZ}$. Τό $\overset{\triangle}{A\Theta H}$ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα $H\Theta = \frac{BZ}{3}$ καί $\hat{H\Theta I} = 120°$. Ἤτοι τό $H\Theta IK\Lambda M$ εἶναι ἰσόπλευρον καί ἰσογώνιον, δηλαδή κανονικόν ἑξάγωνον. Ὡς γνωστόν $BZ = a\sqrt{3}$ καί κατά συνέπειαν $H\Theta = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ἐπειδή τό ἐμβαδόν κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς λ εἶναι $\frac{3\lambda^2\sqrt{3}}{2}$ θά ἔχωμεν καί $(H\Theta IK\Lambda M) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

801. Κανονικά κυρτά πολύγωνα πλευρᾶς λ_x καλύπτουν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Νά εὑρεθῆ ὁ x.

Λύσις:

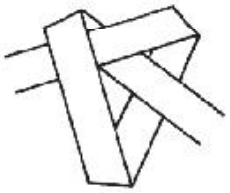
Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς λ_x εἶναι ἴση πρός $\frac{2x-4}{x} \cdot 90°$. Ὑποθέσωμεν ὅτι κ πολύγωνα ἔχουν κοινήν κορυφήν. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν των εἰς τήν κορυφήν αὐτήν θά εἶναι 360°. Ἤτοι $\kappa \cdot \frac{2x-4}{x} \cdot 90° = 360° \Longrightarrow \kappa = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$. Ἀλλά ὁ κ εἶναι ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 2, συνεπῶς ὁ $\frac{4}{x-2}$ θά πρέπῃ νά εἶναι ἀκέραιος θετικός. Ἄρα ὁ παρονομαστής θά εἶναι θετικός διαιρέτης τοῦ ἀριθμητοῦ. Ἤτοι $x-2 = 1 \Longrightarrow x = 3$ ἤ $x-2 = 2 \Longrightarrow x = 4$ ἤ τέλος $x-2 = 4 \Longrightarrow x = 6$. Ἄρα τά μόνα κανονικά κυρτά πολύγωνα μέ τά ὁποῖα δύναται νά καλύπτεται μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι τό ἰσόπλευρον τρίγωνον, τό τετράγωνον, καί τό κανονικόν ἑξάγωνον.

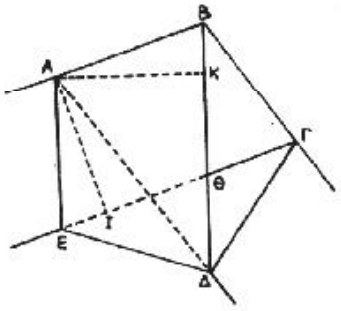
802. Ἀπό μίαν ζώνην χάρτου (περατουμένην ἐπί δύο παραλλήλων) ἐκτμα-

τίξομεν κόμβον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σκῆμα. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ λαμβανόμενον πολύγωνον εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον.

Ἀπόδειξις:

Αἱ ἀποστάσεις τοῦ Α ἀπὸ τὰς ΕΓ καὶ ΒΔ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ εὖρος τῆς ζώνης. Τὸ ΑΒΘΕ εἶναι προφανῶς παραλληλόγραμμον, ἄρα $A\hat{B}\Theta = A\hat{E}\Theta$. Τὰ τρίγωνα ΑΙΕ καὶ ΑΚΒ εἶναι ἴσα καὶ κατὰ συνέπειαν ΑΒ = ΑΕ. Ἐπίσης ΑΒ = ΒΓ, ἤτοι τὸ ΕΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Ὁμοίως καὶ τὰ ΑΒΓΔ, ΒΓΔΕ κ.τ.λ.





803. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἰς κύκλον (Ο,R) πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν.

Λύσις:

Ἔχομεν $\frac{(\Pi_\nu)}{(\Pi'_\nu)} = \frac{a_\nu^2}{R^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a_\nu = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, δηλαδὴ τὸ a_ν εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα $\nu = 6$.

804. Κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ἀκτῖνα R καὶ ἀπόστημα α. Ἄλλο κανονικὸν πολύγωνον τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ καὶ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν ἔχει ἀκτῖνα R′ καὶ ἀπόστημα α′. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) $R'^2 = Ra$ β) $2a'^2 = a(R+a)$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Π_ν τὸ πρῶτον πολύγωνον καὶ $\Pi'_{2\nu}$ τὸ δεύτερον. Θεωροῦμεν τὸ πολύγωνον $\Pi_{2\nu}$ μὲ ἀκτῖνα R καὶ θέτομεν a_1 τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $a_1^2 = \frac{R^2+Ra}{2}$ (1).

Δίδεται ὅτι $(\Pi_\nu) = (\Pi'_{2\nu})$ ἤτοι $\nu a\sqrt{R^2-a^2} = 2\nu a'\sqrt{R'^2-a'^2} \Rightarrow a^2(R^2-a^2) = 4a'^2 \cdot (R'^2-a'^2)$ (2).

Εἶναι προφανὲς ὅτι $\frac{a_1}{a'} = \frac{R}{R'}$ (3).

(1), (3) $\Rightarrow a'^2 = R'^2\frac{R+a}{2R}$ (4).

(2), (4) $\Rightarrow R'^2 = aR$ (5)

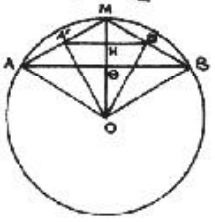
(4), (5) $\Rightarrow 2a'^2 = a(R+a)$.

805. Ἔστωσαν R_ν, a_ν ἀντιστοίχως ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς καὶ $R_{2\nu}, a_{2\nu}$ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευράς. Νὰ δειχθῇ α) $a_{2\nu} = \frac{R_\nu + a_\nu}{2}$ β) $R_{2\nu}^2 = R_\nu \cdot a_{2\nu}$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ν πλευράς.

Ἐὰν Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ Α′, Β′ τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΜΑ, ΜΒ, πλευρὰ τοῦ ἰσοπεριμέτρου κανονικοῦ πο-



λυγώνου με 2ν πλευρὰς εἶναι ἡ $A'B'$. Διότι $2\nu \cdot A'B' = \nu AB$ καὶ $\hat{AOB'} = \frac{\hat{AOB}}{2}$.

Τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΜΘ (ἰδέ σχῆμα) καὶ κατὰ συνέπειαν $OH = \frac{OM+OB}{2} \Longrightarrow a_{2\nu} = \frac{R_\nu + a_\nu}{2}$.

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $OA'M$ εἶναι $OA'^2 = OM \cdot OH$ ἢ $R_{2\nu}^2 = R_\nu \cdot a_\nu$.

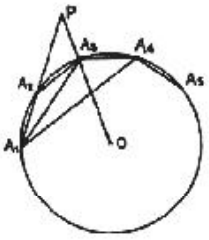
Παρατηρήσεις:

Μία ἄλλη σχέσις συνδέουσα τὰ $R_\nu, a_\nu, R_{2\nu}, a_{2\nu}$ εἶναι ἡ $R_{2\nu} - a_{2\nu} < \frac{R_\nu - a_\nu}{2}$. Διατί;

806. Θεωροῦμεν κανονικὸν δεκάγωνον $A_1A_2 \cdots A_{10}$ καὶ ἔστω $P = A_1A_2 \cap OA_3$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $A_1P = A_1A_4$.

Ἀπόδειξις:

Τὰ τρίγωνα A_1A_3P, $A_1A_3A_4$ εἶναι ἴσα διότι $\hat{A_1A_3A_4} = 126°$, $\hat{A_1A_3P} = 180° - \hat{A_1A_3O} = 180° - 54° = 126°$, A_1A_3 κοινὴ καὶ $\hat{A_2A_1A_3} = \hat{A_3A_1A_4} = 18°$.



807. Ἔστω Π_ν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον εἰς κύκλον (O,R) μὲ ν πλευράς, $\Pi_{2\nu}$ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον μὲ 2ν πλευράς καὶ Π'_ν τὸ περιγεγραμμένο περὶ τὸν (O,R) κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\Pi_{2\nu})^2 = (\Pi_\nu)(\Pi'_\nu)$.

Ἀπόδειξις:

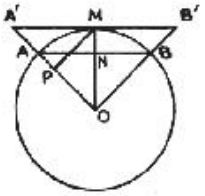
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\Pi_{2\nu}$ εἶναι $(\Pi_{2\nu}) = 2\nu \cdot \frac{1}{2} a_{2\nu} \lambda_{2\nu}$. Ὡς γνωστὸν $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$ καὶ $a_{2\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$. Ἄρα $(\Pi_{2\nu}) = \frac{\nu}{2} R\lambda_\nu$. Ἀκόμη $(\Pi_{2\nu})^2 = \left(\frac{1}{2}\nu R\lambda_\nu\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\nu\lambda_\nu\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\right)\left(\frac{\nu R^2 \lambda_\nu}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}\right) = (\Pi_\nu)(\Pi'_\nu)$.

808. Ἔστω Π_ν καὶ Π'_ν τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον εἰς τὸν (O,R) μὲ ν πλευράς. Ὀνομάζομεν Γ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (O), L τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ Π_ν καὶ L' τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ Π'_ν. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma^2 = L \cdot L'$.

Ἀπόδειξις:

Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $OM^2 = ON \cdot OA'$.

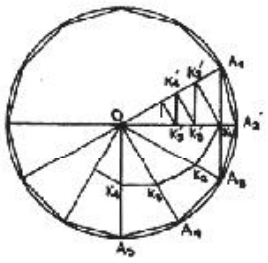
Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OMA', ἔχομεν $OM^2 = OP \cdot OA'$ $(MP \perp OA)$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου MOA εἶναι $OP = ON$, ἄρα $OM^2 = ON \cdot OA'$.



809. Κανονικὸν δωδεκάγωνον $A_1A_2 \cdots A_{12}$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Θέτομεν K_1 τὴν προβολὴν τοῦ A_1 ἐπὶ τὴν OA_2, K_2 τὴν προβολὴν τοῦ K_1 ἐπὶ τὴν OA_3, K_3 τὴν προβολὴν τοῦ K_2 ἐπὶ τὴν OA_4, κ.ο.κ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $A_1K_1 + K_1K_2 + \cdots + K_{\nu-1}K_\nu$ ὅταν $\nu \longrightarrow \infty$.

Λύσις:

Φέρομεν τὴν $K_1K_2' \perp OA_1$, $K_2'K_3' \perp OA_2$, $K_3'K_4' \perp OA_1$, $K_4'K_5' \perp OA_2$ κ.ο.κ.



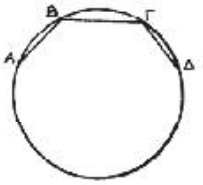
Εἶναι προφανῶς $K_1K_2' = K_1K_2$, $K_2'K_3' = K_2K_3$, $K_3'K_4' = K_3K_4$, $K_4'K_5' = K_4K_5$ κ.τ.λ. Ἄρα $S = A_1K_1 + K_1K_2 + K_2K_3 + \cdots = A_1K_1 + K_1K_2' + K_2'K_3' + \cdots$

Τὸ $\overset{\triangle}{A_1OA_2}$ ἰσοπλευρον. $A_1OK_1 \sim K_2'K_1A_1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow A_1K_1 = 2A_1K_2'$. Ὁμοίως $K_2'K_3' = 2K_2'K_4'$, $K_4'K_5' = 2K_4'K_6$ κ.τ.λ. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον $K_1K_2' = 2K_1K_3'$, $K_3'K_4' = 2K_3'K_5'$ κ.τ.λ.

Ἄρα $S = 2(A_1K_2' + K_2'K_4' + K_4'K_6' + \cdots) + 2(K_1K_3' + K_3'K_5' + K_5'K_7' + \cdots) = 2R + 2\frac{R\sqrt{3}}{2} = R(2+\sqrt{3})$.

810. Ἂν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ 2ν πλευρὰς ἔχει ἴσας τὰς γωνίας του, τότε αἱ πλευραὶ του εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι.

Ἀπόδειξις:



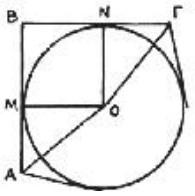
Ἔστω A, B, Γ, Δ τέσσερες διαδοχικαὶ κορυφαί. Εἶναι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$. Ἄρα καὶ $\overset{\frown}{AB\Gamma} = \overset{\frown}{B\Gamma\Delta} \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Longrightarrow AB = \Gamma\Delta$.

Παρατήρησις:

Ἂν τὸ πολύγωνον εἶχεν περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν θὰ ἦτο κανονικόν. Διατί;

811. Ἂν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον μὲ 2ν πλευρὰς ἔχῃ τὰς πλευρὰς του ἴσας, τότε αἱ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι.

Ἀπόδειξις:



$AB = B\Gamma$ Λ $BM = BN \Longrightarrow AM = \Gamma N$.

$\overset{\triangle}{AMO} = \overset{\triangle}{\Gamma NO} \Longrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Longrightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Παρατήρησις:

Ἐὰν τὸ πολύγωνον εἶχεν περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν θὰ ἦτο κανονικόν. Διατί;

812. Ἐὰν T_ν εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἀκτῖνος R καὶ T'_ν τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον (O,R) καὶ $T_{2\nu}, T'_{2\nu}$ αἱ περίμετροι ἀντιστοίχως τῶν αὐτῶν πολυγώνων ἀλλὰ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν νὰ δειχθῇ α) $\frac{2}{T'_{2\nu}} = \frac{1}{T_\nu} + \frac{1}{T'_\nu}$ β) $T_{2\nu} = \sqrt{T_\nu \cdot T'_{2\nu}}$.

Ἀπόδειξις:

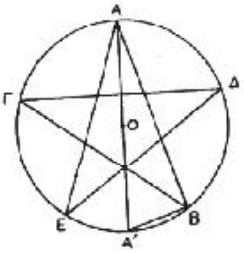
Εἶναι ὡς γνωστὸν $\lambda'_{2\nu} = \frac{2R\lambda_{2\nu}}{\sqrt{4R^2 - \lambda_{2\nu}^2}}$. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Ἀρχιμήδους ἔχομεν $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$, ὁπότε $\lambda'_{2\nu} = \frac{2R\sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}}{\sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}}$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν $\lambda'_{2\nu} = \frac{2R\lambda_\nu}{2R + \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$ (1). Τὸ αὐτὸ μὲ τὸν ἀριθμητὴν ὁπότε $\lambda'_{2\nu} = \frac{2R}{\lambda_\nu}(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2})$ (2).

(1) $\Longrightarrow T'_{2\nu} = 2\nu\lambda'_{2\nu} = \frac{4\nu R\lambda_\nu}{2R + \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}} \Longrightarrow \frac{1}{T'_{2\nu}} = \frac{1}{\nu\lambda_\nu} + \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2R\nu\lambda_\nu} = \frac{1}{T_\nu} + \frac{1}{T'_\nu}$.

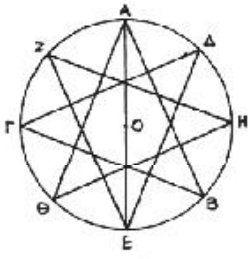
(2) $\Longrightarrow T_\nu T'_{2\nu} = \nu\lambda_\nu \frac{4R\nu}{\lambda_\nu}(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}) = 4\nu^2(2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}) = T_{2\nu}^2$.

813. Συναρτήσει τοῦ R νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\lambda_{5,2}, \lambda_{8,3}, \lambda_{10,3}$ τὰ ἀντίστοιχα ἀποστήματα καὶ τὰ $\lambda_{15,2}, \lambda_{15,4}, \lambda_{15,7}$.

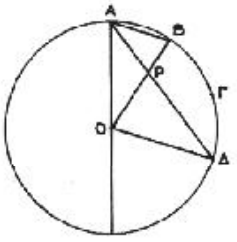
Λύσις:



(1)



(2)



(3)

$\lambda_{5,2}$: Σχῆμα (1). $A'B = \lambda_{10} \Longrightarrow \lambda_{5,2}^2 = 4R^2 - \lambda_{10}^2 \Longrightarrow \boxed{\lambda_{5,2} = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ $\boxed{a_{5,2} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)}$.

$\lambda_{8,3}$: Σχῆμα (2). $AB^2 = \lambda_{8,3}^2 = 4R^2 - \lambda_8^2 \Longrightarrow \boxed{\lambda_{8,3} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\boxed{a_{8,3} = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

$\lambda_{10,3}$: Σχῆμα (3). $\overset{\triangle}{AO\Delta} \sim \overset{\triangle}{APO} \Longrightarrow \frac{A\Delta}{OA} = \frac{OA}{AP} \Longrightarrow \lambda_{10,3} = \frac{R^2}{\lambda_{10}}$. Ἀκόμη $a_{10,3} = \frac{\lambda_5}{2}$.

$$\boxed{\lambda_{10,3} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)}, \quad \boxed{a_{10,3} = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Διὰ τὰ $\lambda_{15,2}$, $\lambda_{15,4}$, $\lambda_{15,7}$. Θέτομεν A_{ik} τὴν κεντρικὴν γωνίαν των. Ἔχομεν:

$\lambda_{15,2}$: $\frac{2}{15} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} \Longrightarrow A_{15,2} = A_{10,3} - A_6$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἐκφοράν αὐτὴν διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου εὑρίσκομεν

$$\boxed{\lambda_{15,2} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}.$$

$\lambda_{15,4}$: $\frac{4}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \Longrightarrow A_{15,4} = A_{10} + A_6$. Εὑρίσκομεν

$$\boxed{\lambda_{15,4} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}.$$

$\lambda_{15,7}$: $\frac{7}{15} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \Longrightarrow A_{15,7} = A_{10,3} + A_6$. Εὑρίσκομεν

$$\boxed{\lambda_{15,7} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}.$$

814. Κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ Ν τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΓΜ καὶ τῆς περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ANB) = \frac{1}{42}(AB\Gamma\Delta EZ)$.

Ἀπόδειξις:

Ὑπολογίζομεν τὴν διάμεσον ΓΜ τοῦ $\overset{\triangle}{A\Gamma B}$. Εἶναι ὡς γνωστὸν $\Gamma M^2 = \frac{2(B\Gamma^2+A\Gamma^2)-AB^2}{4}$

$\Longrightarrow \Gamma M^2 = \frac{2(R^2+3R^2)-R^2}{4} \Longrightarrow \Gamma M = \frac{R\sqrt{7}}{2}$.

$\overset{\triangle}{NMB} \sim \overset{\triangle}{AM\Gamma} \Longrightarrow \frac{BN}{R\sqrt{3}} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{7}}{2}} \Longrightarrow BN = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{\Gamma MB} \Longrightarrow \frac{AN}{R} = \frac{R/2}{R\sqrt{3}/2} \Longrightarrow AN = \frac{R}{\sqrt{7}}$.

Ἀλλὰ $A\hat{N}B + B\hat{\Gamma}A = 2^L \Longrightarrow \frac{AN \cdot BN}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{(ANB)}{(AB\Gamma)} \Longrightarrow \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{7}}{R^2\sqrt{3}} = \frac{(ANB)}{\frac{(AB\Gamma\Delta EZ)}{6}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (ANB) = \frac{1}{42}(AB\Gamma\Delta EZ)$.

815. Θεωροῦμεν κανονικὸν ἑνδεκάγωνον $A_1A_2\cdots A_{11}$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἔστω $\overset{\frown}{MA_1A_{11}}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i\in\{1,3,5,7,9,11\}} MA_i = \sum_{j\in\{2,4,6,8,10\}} MA_j$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $A_iA_j = d_{|i-j|}$. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι $d_k = d_{11-k}$ (1). Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὰ τετράπλευρα

$$\begin{aligned}
MA_1A_2A_{11}: &\quad d_9\cdot MA_1 + d_1\cdot MA_{11} = d_{10}\cdot MA_2\\
MA_1A_4A_{11}: &\quad d_7\cdot MA_1 + d_3\cdot MA_{11} = d_{10}\cdot MA_4\\
MA_1A_6A_{11}: &\quad d_5\cdot MA_1 + d_5\cdot MA_{11} = d_{10}\cdot MA_6 \qquad (2)\\
MA_1A_8A_{11}: &\quad d_3\cdot MA_1 + d_7\cdot MA_{11} = d_{10}\, MA_8\\
MA_1A_{10}A_{11}: &\quad d_1\cdot MA_1 + d_9\cdot MA_{11} = d_{10}\cdot MA_{10}
\end{aligned}$$

$MA_1A_3A_{11}$: $d_{10}\cdot MA_3 = d_8\cdot MA_1 + d_2 MA_{11}$

$MA_1A_5A_{11}$: $d_{10}\cdot MA_5 = d_6\cdot MA_1 + d_4 MA_{11}$

$MA_1A_7A_{11}$: $d_{10}\cdot MA_7 = d_4\cdot MA_1 + d_6 MA_{11}$ (3).

$MA_1A_9A_{11}$: $d_{10}\cdot MA_9 = d_2\cdot MA_1 + d_8 MA_{11}$

Τάς (2),(3) προσθέτομεν κατά μέλη. Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (1) ἔχομεν $d_1\cdot(MA_1+MA_3+MA_5+MA_7+MA_9+MA_{11}) = d_1\cdot(MA_2+MA_4+MA_6+MA_8+MA_{10})$.

816. Ἔστω Π_ν καὶ Π'_ν τὸ ἐγγεγραμμένο καὶ περιγεγραμμένο κανονικὸ πολύγωνον εἰς κύκλον (O,R). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ $(\Pi'_\nu)-(\Pi_\nu)$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένο κανονικὸν πολύγωνον εἰς κύκλον διαμέτρου λ'_ν.

Ἀπόδειξις:

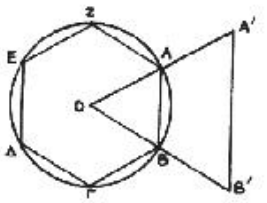
Εἶναι $(\Pi'_\nu)-(\Pi_\nu) = \frac{\nu R^2\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}} - \frac{1}{4}\nu\lambda_\nu\sqrt{4\lambda^2-\lambda_\nu^2} = \frac{\nu\lambda_\nu^3}{4\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$ (1). Ὡς γνωστὸν $\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$. Ἐὰν P τὸ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον διαμέτρου $2\rho = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$, θὰ εἶναι $\Pi \sim P$ ἤτοι $\frac{(P)}{(\Pi)} = \frac{\rho^2}{R^2} \Longrightarrow (P) = \frac{\nu\lambda_\nu^3}{4\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow (P) = (\Pi'_\nu)-(\Pi_\nu)$.

817. Κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσοπερίμετρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των.

Λύσις:

Ἡ λύσις φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.



818. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν AB τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον (O,R) κατὰ τμῆμα $B\Gamma = AB$. Ἐὰν Δ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς περιφερείας μετὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $O\Gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\Gamma\Delta = 2\lambda_{10}$.

Ἀπόδειξις:

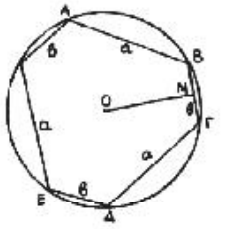
Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ $\overset{\Delta}{AO\Gamma}$ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων διὰ $\nu=4$, $O\Gamma^2 = 2AB^2 + 2OB^2 \Longrightarrow O\Gamma^2 = 5R^2$. $\Gamma\Delta = O\Gamma - R = R(\sqrt{5}-1)$.

819. Κυρτοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευρὰς ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ περιττῆς τάξεως ἴσαι πρὸς α, αἱ δὲ πλευραὶ ἀρτίας τάξεως ἴσαι πρὸς β. Νὰ δειχθῇ α) ὅτι τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (O,R) καὶ β) ἂν $\nu=3 \Longrightarrow R^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}{3}$.

Ἀπόδειξις:

α) Θεωροῦμεν τὸν κύκλον περὶ τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς AB πρὸς τὴν μεσοκάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ταυτίζεται πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Ἤτοι $AB\Gamma\Delta$ ἐγγράψιμον (ἰσοσκελὲς τραπέζιον).

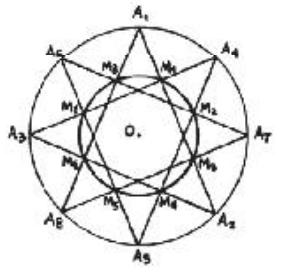
Ὁμοίως εἰς τὸν κύκλον περὶ τὸ $\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$ κεῖται τὸ E κ.τ.λ.



β) Ἡ $A\Gamma$ θὰ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου, διότι $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma E} = \overset{\frown}{EA}$. Ἄρα ἐκ τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, ἀπὸ τὸ θεώρημα ἀμβλείας $A\Gamma^2 = \alpha^2+\theta^2+\alpha\theta$ ἢ $(R\sqrt{3})^2 = \alpha^2+\theta^2+\alpha\theta \Longrightarrow R^2 = \frac{\alpha^2+\theta^2+\alpha\theta}{3}$.

820. Δίδεται ἀστεροειδὲς κανονικὸν ὀκτάγωνον $A_1A_2\cdots A_8$. Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, \ldots, M_8$ (ἰδὲ σχῆμα). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου.

Λύσις:



Εἶναι $OM_1 \parallel A_1A_8$ καὶ $OM_1 \perp M_8$ ρόμβος. μέτρον $A_1\hat{M}_1A_4$ = μέτρον $\frac{\overset{\frown}{A_1A_4}+\overset{\frown}{A_2A_3}}{2} \Longrightarrow A_1\hat{M}_1A_4 = 1^L$.

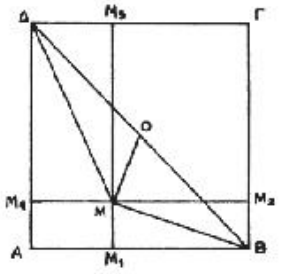
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $A_1M_1A_4$ θὰ ἔχωμεν $A_1M_1 = \lambda_8\frac{\sqrt{2}}{2} =$ $= R\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow OM_1 = R\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου εἶναι $\pi R^2 - \pi R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi R^2\sqrt{2}}{2}$.

ΟΜΑΣ Β'.

821. Ἐντὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α δίδεται σημεῖον Μ. Θέτομεν M_1, M_2, M_3, M_4 τὰς προβολὰς τοῦ Μ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $MM_1^3 + MM_2^3 + MM_3^3 + MM_4^3 = \frac{1}{2}\alpha^3 + 3\alpha\cdot OM^2$, ὅπου Ο τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου.

Ἀπόδειξις:



Εἶναι $MM_1 + MM_3 = \alpha$ (1).

(1) $\Longrightarrow MM_1^3 + MM_3^3 + 3MM_1\cdot MM_3\cdot\alpha = \alpha^3$ (2).

(1) $\Longrightarrow MM_1^2 + MM_3^2 + 2MM_1\cdot MM_3 = \alpha^2$ (3).

Ὁμοίως $MM_2^2 + MM_4^2 + 2MM_2\cdot MM_4 = \alpha^2$ (4).

(3),(4) $\Longrightarrow MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 + 2(MM_1\cdot MM_3 +$ $+ MM_2\cdot MM_4) = 2\alpha^2$. Ἀλλὰ $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 =$ $= MB^2 + M\Delta^2 = 2OM^2 + 2\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2OM^2 + \alpha^2$. Ἄρα καὶ $MM_1\cdot MM_3 + MM_2\cdot MM_4 = \frac{\alpha^2}{2} - OM^2$ (5).

Παρομοίαν σχέσιν τῆς (2) ἔχομεν μὲ τὰ MM_2, MM_4, δηλαδὴ $MM_2^3 + MM_4^3 +$ $+3MM_2\cdot MM_4\cdot\alpha = \alpha^3$ (6).

(2),(6),(5) $\Longrightarrow MM_1^3 + MM_2^3 + MM_3^3 + MM_4^3 = \frac{1}{2}\alpha^3 + 3\alpha\cdot OM^2$.

822. Κανονικὸν πολύγωνον $\Pi_{2\nu+1} = A_1A_2\cdots A_{2\nu+1}$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἔστω Με $\overset{\frown}{A_1A_{2\nu+1}}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{\kappa=0}^{\nu} MA_{2\kappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} MA_{2\lambda}$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $A_iA_j = d_{|i-j|}$. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι $d_\rho = d_{2\nu+1-\rho}$ (1). Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὰ τετράπλευρα

$MA_1A_2A_{2\nu+1}$: $\quad d_{2\nu-1}\cdot MA_1 + d_1\cdot MA_{2\nu+1} = d_{2\nu}\cdot MA_2$

$MA_1A_4A_{2\nu+1}$: $\quad d_{2\nu-3}\cdot MA_1 + d_3\cdot MA_{2\nu+1} = d_{2\nu}\cdot MA_4$

$MA_1A_6A_{2\nu+1}$: $\quad d_{2\nu-5}\cdot MA_1 + d_5\cdot MA_{2\nu+1} = d_{2\nu}\cdot MA_6$ (2)

. . . . . .

$MA_1A_{2\nu}A_{2\nu+1}$: $\quad d_1\cdot MA_1 + d_{2\nu-1}\cdot MA_{2\nu+1} = d_{2\nu}\cdot MA_{2\nu}$

$MA_1A_3A_{2\nu+1}$: $d_{2\nu}\cdot MA_3 = d_{2\nu-2}\cdot MA_1 + d_2\cdot MA_{2\nu+1}$

$MA_1A_5A_{2\nu+1}$: $d_{2\nu}\cdot MA_5 = d_{2\nu-4}\cdot MA_1 + d_4\cdot MA_{2\nu+1}$

$MA_1A_7A_{2\nu+1}$: $d_{2\nu}\cdot MA_7 = d_{2\nu-6}\cdot MA_1 + d_6\cdot MA_{2\nu+1}$ (3).

. . . . . .

$MA_1A_{2\nu-1}A_{2\nu+1}$: $d_{2\nu}\cdot MA_{2\nu-1} = d_2\cdot MA_1 + d_{2\nu-2}\cdot MA_{2\nu+1}$

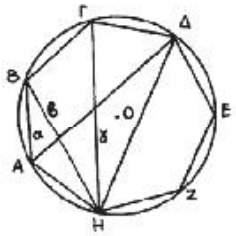
Προσθέτομεν τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη. Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (1) ἔχομεν $d_{2\nu}\cdot(MA_1+MA_3+\cdots+MA_{2\nu+1}) = d_{2\nu}\cdot(MA_2+MA_4+\cdots+MA_{2\nu}) \Longrightarrow \sum_{\kappa=0}^{\nu} MA_{2\kappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} MA_{2\lambda}$.

Παρατηρήσεις:

Ὁ μαθητὴς δύναται νὰ συμβουλευθῇ τὸ πρόβλημα 815.

823. Δίδεται κανονικὸν ἑπτάγωνον πλευρᾶς a, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἐὰν β,γ τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ $(\gamma>\beta)$ νὰ δειχθῇ ὅτι $a=\frac{(\beta+\gamma)^2-2\gamma^2}{2\gamma+\beta}$.

Ἀπόδειξις:



Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὰ τετράπλευρα :

$AB\Gamma\Delta \Longrightarrow \beta^2 = a\gamma + a^2 = a(\gamma+a)$ (1)

$HB\Gamma\Delta \Longrightarrow \beta\gamma = a\gamma + a\beta = a(\beta+\gamma)$ (2).

$(1),(2) \Longrightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma+a}{\beta+\gamma} \Longrightarrow a = \frac{\beta^2+\beta\gamma-\gamma^2}{\gamma}$ (3).

$(2) \Longrightarrow a = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ (4).

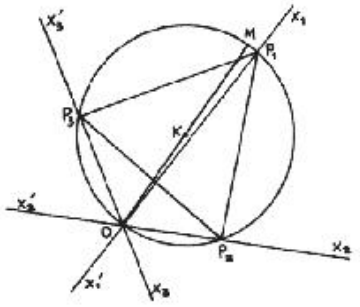
$(3),(4) \Longrightarrow a = \frac{\beta^2+\beta\gamma-\gamma^2}{\gamma} = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}{2\gamma+\beta} = \frac{(\beta+\gamma)^2-2\gamma^2}{2\gamma+\beta}$.

Παρατήρησις:

Ἀπὸ τὴν (2) διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ $a\beta\gamma$ εὑρίσκομεν τὴν γνωστὴν διὰ τὸ ἑπτάγωνον σχέσιν $\frac{1}{a} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

824. Τρεῖς εὐθεῖαι $x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3'$ διέρχονται διὰ σημείου O καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μεταξύ των. Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα p προβάλλεται κατὰ p_1,p_2,p_3 ἐπὶ τῶν $x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3'$ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = \frac{3}{2}p^2$. Γενίκευσις.

Ἀπόδειξις:



Λαμβάνομεν $OM \equiv p$. Ἔστω P_1,P_2,P_3 αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τῶν $x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3'$. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $OP_1^2+OP_2^2+OP_3^2 = \frac{3}{2}OM^2$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα P_1,P_2,P_3,O,M εἶναι ὁμοκυκλικὰ καὶ τὸ $P_1P_2P_3$ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐφαρμόζομεν διὰ τὰ P_1,P_2,P_3 τὸ θεώρημα τοῦ Leibnitz διὰ τὸ O. $OP_1^2+OP_2^2+OP_3^2 = 3KO^2+P_1P_2^2$ ἢ $OP_1^2+OP_2^2+OP_3^2 = 3\left(\frac{OM}{2}\right)^2+\left(\frac{OM}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{2}OM^2$.

Γενίκευσις:

Αἱ εὐθεῖαι $x_1x_1', x_2x_2', \ldots, x_nx_n'$ διέρχονται διὰ σημείου O καὶ σχηματίζουν ἴσας διαδοχικὰς γωνίας. Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα p προβάλλεται κατὰ $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ ἐπὶ τῶν $x_1x_1', x_2x_2', \ldots, x_nx_n'$ ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{n}{2}p^2$.

Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν $OM \equiv p$ καὶ ἔστω P_i ἡ προβολὴ τοῦ M ἐπὶ τὴν x_ix_i'. Ἀρκεῖ νὰ

δείξωμεν ὅτι $\sum_{i=1}^{n} OP_i^2 = \frac{n}{2} OM^2$.

Τὰ σημεῖα $P_1, P_2, \ldots, P_n, O, M$ εἶναι ὁμοκυκλικὰ καὶ τὸ $P_1P_2 \cdots P_n$ κανονικὸν πολύγωνον. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ Leibnitz καὶ θὰ ἔχωμεν $\sum_{i=1}^{n} OP_i^2 = n K O^2 + \sum_{i=1}^{n} K P_i^2$ (Κ τὸ μέσον τοῦ ΟΜ) ἢ $\sum_{i=1}^{n} OP_i^2 = n\left(\frac{OM}{2}\right)^2 + n\left(\frac{OM}{2}\right)^2 = \frac{n}{2} OM^2$.

Σημειώσεις:

α) Τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν αἱ εὐθεῖαι δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Αἱ γωνίαι ὅμως νὰ σχηματίζωνται μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἴσαι.

β) Τὸ θεώρημα μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ ἀκόμη ὡς ἑξῆς:

Κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2 \ldots A_n$ πλευρᾶς α προβάλλεται ἐπὶ εὐθείας xx'. Ἐὰν p_i ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς A_iA_{i+1} ἐπὶ τῆς xx' νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{n}{2} a^2$.

Διότι ἂν ἀπὸ τυχόν σημεῖον Ο' τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου φέρωμεν τὰς $x_1x_1', x_2x_2', \ldots, x_nx_n'$ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2 \cdots A_n$ καὶ τὴν $\eta \| xx'$, λάβωμεν δὲ ἐπὶ τῆς η τμῆμα $O'M = a$, αἱ προβολαὶ τοῦ O'M ἐπὶ τὰς x_ix_i' εἶναι τὰ p_i.

γ) Ἐπίσης διατυποῦται ὡς κάτωθι: Δίδεται κανονικὸν πολύγωνον $A_1A_2 \cdots A_n$ κέντρου Ο. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τῶν ἀκτίνων OA_i ἐπὶ τυχούσαν εὐθείαν τοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται πρὸς $\frac{nR^2}{2}$.

825. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Θέτομεν $MA_i = d_i$. Ἂν α ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + a^4 = a^2(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + d_1^2d_2^2 + d_2^2d_3^2 + d_3^2d_1^2$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν p_i τὴν προβολὴν τοῦ $OM = \rho$ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ἔναντι τῆς κορυφῆς A_i. Ἐφαρμόζομεν τὸ 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων εἰς τὸ τρίγωνον MA_1A_2. Θὰ ἔχωμεν $d_1^2 - d_2^2 = 2ap_3$ ἢ $d_1^4 + d_2^4 - 2d_1^2d_2^2 = 4a^2p_3^2$ (1). Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν δεικτῶν λαμβάνομεν ἀκόμη δύο σχέσεις τῆς μορφῆς τῆς (1) καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη: $d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - d_1^2d_2^2 - d_2^2d_3^2 - d_3^2d_1^2 = 2a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ (2).

Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{3}{2}\rho^2$ (3).

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Leibnitz $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 3\rho^2 + a^2$ (4).

Τέλος, ἐκ τῶν (2), (3), (4) ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Γενίκευσις:

Ἐὰν $A_1A_2 \cdots A_\nu$ κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς α καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του, θέσωμεν δὲ $A_iM = d_i$ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$a^4 + \sum_{i=1}^{\nu} d_i^4 = a^2 \sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 + d_1^2d_2^2 + d_2^2d_3^2 + d_3^2d_4^2 + \cdots + d_\nu^2d_1^2.$$

Ἡ ἀπόδειξις ὅπως προηγουμένως.

826. Κανονικὸν πολύγωνον $A_1A_2 \cdots A_n$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δυνάμεων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ πρὸς τυχοῦσαν σφαῖραν (K,r) τοῦ χώρου εἶναι σταθερὸν ὅταν τὸ πολύγωνον στρέφεται περὶ τὸ κέντρον του.

Ἀπόδειξις:

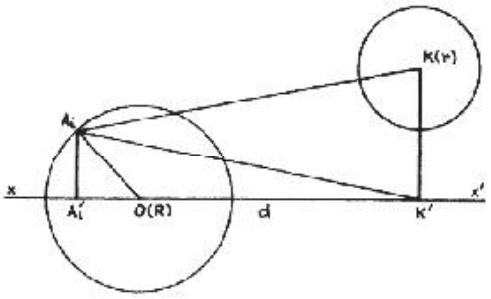
Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ Κ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου εἰς Κ'. Θέτομεν $OK' = d$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A_iK'K$ ἔχομεν $KA_i^2 = KK'^2 + K'A_i^2$ (1).

Ἐκ τοῦ $\overset{\Delta}{OA_iK'}$ (θεώρημα ὀξείας ἢ ἀμβλείας) $\overline{K'A_i}^2 = \overline{OK'}^2 + \overline{OA_i}^2 - 2\overline{OK'}\cdot\overline{OA_i'}$ (2).

$\mathcal{D}_K(A_i) = \overline{KA_i}^2 - r^2$ (3).

(1),(2),(3) $\Longrightarrow \mathcal{D}_K(A_i) = \mathcal{D}_K(O) + R^2 - 2d\cdot\overline{OA_i'} \Longrightarrow [\mathcal{D}_K(A_i)]^2 = [\mathcal{D}_K(O)+R^2]^2 + 4d^2\cdot\overline{OA_i'}^2 - 4d[\mathcal{D}_K(O)+R^2]\cdot\overline{OA_i'}$ (4).



Ἐὰν ἀθροίσωμεν τὴν ἐκάστην (4) πρὸς i ἀπὸ 1 ἕως n, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i'} = 0$ ($\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i} = 0 \Longrightarrow \Longrightarrow (\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i})_{xx'} = \sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i'} = 0$) καὶ ὅτι $\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i'}^2 = \frac{nR^2}{2}$ (ἄσκ. 824, σημείωσις γ') θὰ ἔχωμεν $\sum_{i=1}^{n}[\mathcal{D}_K(A_i)]^2 = n[\mathcal{D}_K(O)+R^2]^2 + 2nd^2R^2$ (5).

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (5) εἶναι προφανῶς σταθερὸ ὅταν τὸ πολύγωνον περιφέρεται περὶ τὸ O.

Ἐὰν ἡ σφαῖρα K ἔχῃ ἀκτῖνα μηδέν, δηλαδὴ ἂν ἀντὶ ταύτης ἔχωμεν σημεῖον K $\sum_{i=1}^{n}KA_i^4 = n[OK^4 + R^4 + 2R^2(OK^2+d^2)]$ (6).

Ἂν τὸ σημεῖον K εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου ($OK = d$) $\sum_{i=1}^{n}KA_i^4 = n(OK^4 + R^4 + 4R^2\cdot OK^2)$ (7).

Ἂν τὸ K εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας (O) $\sum_{i=1}^{n}KA_i^4 = 6nR^4$.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

827. Ὀκτὼ ἴσοι κύκλοι ἐφάπτονται διαδοχικῶς μεταξύ των καὶ δοθείσης περιφερείας ἀκτῖνος R. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς των.

828. Αἱ πλευραὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου καὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἀποτελοῦν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

829. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου γράφομεν περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ τέμνουν τὰς πλευρὰς εἰς σημεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

830. Ἐὰν P σημεῖον τοῦ μικροτέρου τόξου AB τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{PA+P\Gamma}{PB+P\Delta} = \frac{P\Delta}{P\Gamma}$.

831. Ἐὰν P σημεῖον τοῦ μικροτέρου τόξου AZ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κανονικοῦ ἑξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$ νὰ δειχθῇ ὅτι $P\Gamma + P\Delta = PA + PB + PE + PZ$.

832. Ἔστω A,B,Γ,Δ διαδοχικαὶ κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R). Ἐὰν θέσωμεν $E = AB\cap\Gamma\Delta$ νὰ δειχθῇ ὅτι $AE\Gamma O$

ἐγγράψιμον.

833. Ἔστω κ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου. Ἐὰν κ′ ὁ αὐτὸς λόγος διὰ τὰ πολύγωνα διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν νὰ δειχθῇ ὅτι $2\kappa'^2 = \kappa + 1$.

834. Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ αἱ διαδοχικαὶ κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου νὰ δειχθῇ ὅτι $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.

835. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ζ, νὰ δειχθῇ ὅτι $AE = 5 \cdot EZ$.

836. Νὰ δειχθῇ ὅτι κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς γωνίας Α,Β,Γ,Ε ἴσας εἶναι κανονικόν.

837. Ἔστω Ο τὸ κέντρον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς ἓξ σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

838. Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν τετραγώνων αἱ μὴ ἀνήκουσαι εἰς τὸ ἑξάγωνον εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἑξαγώνου.

839. Τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πενταγώνου πλαγιωμένου κατὰ τὸ τετράγωνον μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του.

840. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος χορδῆς 81° συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει.

841. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda_{9,4} = \lambda_{9,2} + \lambda_{9,1}$.

842. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἐγγεγραμμένου πρὸς τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι $\frac{3}{4}$.

843. Αἱ διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου τεμνόμεναι σχηματίζουν κανονικὸν πεντάγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πενταγώνου.

844. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ μικροτέρου τόξου ΒΓ, κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R), ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἰσοῦται πρὸς $\frac{R}{2}$.

845. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι α) $\lambda_5^2 = \lambda_6^2 + \lambda_{10}^2$ β) $a_5 = \frac{1}{2}(\lambda_6 + \lambda_{10})$ γ) $\lambda_3^3 = 3\lambda_6^3$ δ) $\lambda_{12} + 2a_{12} = \lambda_4\sqrt{3}$.

846. Θεωροῦμεν κυρτόν ν-γωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) καί περιγεγραμμένον περί κύκλον (O,R'). Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἐν λόγῳ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

847. Θεωρούμεν δύο ὁμόκεντρους κύκλους (O,R) καί (O,R') ὅπου $R>R'$. Δύο κανονικά πολύγωνα μέ τό αὐτό πλῆθος πλευρῶν $A_1A_2\cdots A_\nu$ καί $A_1'A_2'\cdots A_\nu'$ εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τούς κύκλους ἀντιστοίχως. Θέτομεν $P_i = A_iA_i' \cap A_{i+1}A_{i+1}'$ $i\in\{1,2,\dots,\nu\}$ $\wedge$ $(A_{\nu+1}=A_1 \wedge A_{\nu+1}'=A_1')$. Νά δειχθῆ ὅτι τό πολύγωνον $P_1P_2P_3\cdots P_\nu$ εἶναι κανονικόν.

848. Ἐκ τῆς κορυφῆς A_1 κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2\cdots A_\nu$ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) ἄγονται αἱ διαγώνιοι $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_{\nu-3}$. Ἐάν a ἡ πλευρά τοῦ πολυγώνου νά δειχθῆ ὅτι $\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_{\nu-3}^2 = 2(\nu R^2 - a^2)$.

849. Δίδεται κύκλος (O,R) καί δύο κάθετοι διάμετροι $A\Gamma$ καί $B\Delta$. Ἐπί τοῦ τόξου $A\Delta$ λαμβάνομεν τό σημεῖον E ὥστε $AE=R$ καί θεωροῦμεν τόν κύκλον $(E,R\sqrt{2})$, ὁ ὁποῖος τέμνει τήν $A\Gamma$ εἰς Z καί H $(Z\in O\Gamma)$. Νά δειχθῆ ὅτι α) $OZ=\lambda_{10}$ β) $OH=2a_5$ γ) $\Delta Z=\lambda_5$ δ) $\Delta H = 2\cdot a_{10}$.

850. Εἰς τυχόν σημεῖον A δοθείσης περιφερείας (O,R) φέρομεν τήν ἐφαπτομένην καί ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $AB=2R$. Ἡ διχοτόμος τῆς $A\hat{O}B$ καί ἡ διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς τέμνουν τήν ἐφαπτομένην εἰς τά σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῆ ὅτι $A\Gamma=\lambda_{10}$ καί $A\Delta=\lambda_{10,3}$.

851. Τό ἐμβαδόν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τό ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς τόν κύκλον.

852. Ἔστω M τυχόν σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2\cdots A_\nu$. Νά ἀποδειχθῆ ἡ σχέσις $\sum_{i=1}^{\nu} MA_i^2 = 2\nu R^2$ ἄνευ τῆς βοηθείας τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz.

Ὑπόδειξις: Φέρομεν εἰς τό M τήν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου καί ἔστω p_i ἡ ἀπόστασις τοῦ A_i ἀπό τήν ἐφαπτομένην. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι $MA_i^2 = 2p_i\cdot R$. Ἐκ τῆς ἀσκ. 905 εἶναι γνωστόν ὅτι $\sum_{i=1}^{\nu} p_i = \nu R$ κ.τ.λ.

853. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

α) $\lambda_{10,3} - \lambda_{10} = R$, $\quad \lambda_{10,3}\cdot\lambda_{10} = R^2$

β) $\lambda_{10,3}^2 + \lambda_{10}^2 = \lambda_3^2$, $\quad \lambda_{5,2}^2 = \lambda_6^2 + \lambda_{10}^2$, $\quad \lambda_{5,2}^2 = \lambda_{10,3}^2 + R^2$

γ) $\lambda_{5,2}^2 - \lambda_5^2 = \lambda_6\cdot\lambda_5$, $\quad \lambda_5^2 + \lambda_{5,1}^2 = (\lambda_{10}+\lambda_{10,3})^2$

δ) $\lambda_5\cdot\lambda_{5,1} = R(\lambda_{10}+\lambda_{10,1})$, $\quad \frac{1}{\lambda_5^2} + \frac{1}{\lambda_{5,2}^2} = \frac{1}{R^2}$, $\quad R\cdot\lambda_5 = \lambda_{10}\sqrt{4R^2-\lambda_{10}^2}$

ε) $(\lambda_\nu - \lambda_{3\nu})^2 + 4(a_{3\nu}-a_\nu)^2 = 4\lambda_{3\nu}^2$.

854. Ἔστω A_1 καὶ A_2 ἀντιστοίχως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν ν-γωνον Π_ν. Νὰ δειχθῇ α) $A_2 - A_1 = 4\pi\lambda_\nu^2$ β) $4\nu^2\lambda_\nu^2 A_1 = \pi(\Pi_\nu)^2$.

855. Δίδεται κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΓ λαμβάνομεν σημεῖον Ζ ὥστε $\Delta Z = A\Gamma$, ἐπὶ δὲ τῆς ἡμιευθείας ΓΔ σημεῖον Η ὥστε $\Gamma H = A\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΑΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πεντάγωνον.

856. Ἔστω $A_1A_2\cdots A_\nu$ κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R) καὶ Ρ σημεῖον τῆς περιφερείας, ἐνῷ Q τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ α) $\sum_{i=1}^{\nu} QA_i^2 = \nu(PO^2+QO^2)$ β) $\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} A_iA_j^2 = \nu^2\cdot PO^2$.

857. Αἱ χορδαὶ ΔΒΓΕ, ΖΓΑΗ, ΘΒΑΙ τεμνόμεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $AI + B\Delta + \Gamma Z = AH + B\Theta + \Gamma E$.

858. Θεωροῦμεν τὸ κανονικὸν πολύγωνον $A_1A_2\cdots A_\nu$ καὶ ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Θέτομεν M_i τὴν προβολὴν τοῦ Μ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν A_iA_{i+1}. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overline{A_1M_1} + \overline{A_2M_2} + \cdots + \overline{A_\nu M_\nu} = \overline{M_1A_2} + \overline{M_2A_3} + \cdots + \overline{M_\nu A_1}$.

ΟΜΑΣ Β'.

859. Θεωροῦμεν κανονικὸν πολύγωνον $A_1A_2\cdots A_\nu$, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἔστω (K,ρ) καὶ (K',ρ') δύο τυχοῦσαι σφαῖραι τοῦ χώρου. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{\nu}\left[\mathcal{D}_K(A_i) - \mathcal{D}_{K'}(A_i)\right]^2 = \nu\cdot\left(\left[\mathcal{D}_K(O) - \mathcal{D}_{K'}(O)\right]^2 + 2R^2\cdot K_1K_1'^2\right)$, ὅπου K_1, K_1' αἱ προβολαὶ τῶν K, K' ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου.

860. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ν-γώνου ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του, εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{3}{8}\nu a^4$, ὅπου α ἡ πλευρά του.

861. Τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν ν κορυφῶν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R), ὡς πρὸς τυχοῦσαν περιφέρειαν (O',R') τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἰσοῦται πρὸς $\nu\cdot(OO'^2 + R^2 - R'^2)$.

862. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κανονικοῦ ν-γώνου $A_1A_2\cdots A_\nu$ ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς $\nu\cdot\left(p^2 + \frac{OM^2}{2}\right)$, ὅπου ρ τὸ ἀπόστημα τοῦ ν-γώνου καὶ Ο τὸ κέντρον του.

863. Δίδεται περιφέρεια (O,R) διαμέτρου ΑΒ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ρ ὥστε $PB\cdot PA^2 = R^2\cdot OP$. Θεωροῦμεν τὴν τομὴν Δ τῶν κύκλων (O,R) καὶ (P,R). Νὰ δειχθῇ ὅτι $B\Delta = \lambda_7$.

864. Ἔστω $A_1A_2\cdots A_\nu$ κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἀπὸ τυχόν σημεῖον P φέρομεν τὰς καθέτους $PN_1, PN_2, \ldots, PN_\nu$ ἐπὶ τὰς $OA_1, OA_2, \ldots, OA_\nu$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{\nu} PN_i^2 = \sum_{i=1}^{\nu} ON_i^2$.

865. $A_1A_2\cdots A_\nu$ καὶ $B_1B_2\cdots B_\nu$ εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλους κέντρων Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} A_iB_j^2 = \nu^2\cdot(A_1\Gamma^2 + B_1\Delta^2 + \Gamma\Delta^2)$.

866. Κύκλος τέμνει τὰς πλευρὰς κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\cdots A_\nu$ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων. Θέτομεν $A_{\lambda\kappa}$ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἡμιευθείας $A_\kappa A_\lambda$ (κ,λ διαδοχικοὶ φυσικοί) μετὰ τοῦ κύκλου καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $A_{\lambda\kappa}A_\lambda = a_{\lambda\kappa}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $a_{12} + a_{23} + \cdots + a_{\nu 1} = a_{21} + a_{32} + \cdots + a_{1\nu}$.

867. Κανονικὸν πολύγωνον Π_ν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Ἐὰν M τυχόν σημεῖον κύκλου (O,ρ) νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολύγωνον μὲ κορυφὰς τὰς προβολὰς τοῦ M ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ Π_ν ἔχει σταθερὸν ἐμβαδόν.

868. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κανονικὸν πολύγωνον Π_ν περιέχεται μεταξὺ $\nu\lambda_\nu$ καὶ $(\nu+1)\lambda_\nu$.

869. Θεωροῦμεν κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ ἐμβαδὸν E. Ὑποθέτομεν ὅτι τοῦτο περιέχει ν μὴ τεμνομένους κύκλους $(O_1,\rho_1), (O_2,\rho_2), \ldots, (O_\nu,\rho_\nu)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\nu)^2 \leqslant \frac{\nu E}{\sqrt{12}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ 7

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

7-1 Προσανατολισμένη εὐθεῖα

7-1.1

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (A,B) σημείων τῆς εὐθείας ε ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς μιὰ φοράν. Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (B,A) ὁρίζει ἐπὶ τῆς ε μίαν ἄλλην φοράν διάφορον τῆς πρώτης.

Ἂν μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω φοράς ὀνομασθῇ θετικὴ ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ ἀρνητικὴ.

7-1.2 Ὁρισμοί

Μία εὐθεῖα ε ὀνομάζεται προσημασμένη ἢ προσανατολισμένη ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ ἐπ' αὐτῆς ἡ θετικὴ φορά.

Προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα. Ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας ε ὀνομάζομεν κάθε διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (A,B) αὐτῆς.

Συμβολισμός: $\overline{AB}$

Ἂν ἡ ἐν τοῦ ζεύγους (A,B) ὁριζομένης ἐπὶ εὐθείας ε φορὰ εἶναι ἡ θετική, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα (A,B) ἢ AB εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ AB εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένον.

Τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ τμήματος $\overline{AB}$ ὀνομάζεται Ἀρχικὸν σημεῖον ἢ ἀρχὴ αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον σημεῖον του, Τελικὸν σημεῖον ἢ πέρας αὐτοῦ.

Δύο τμήματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{A'B'}$ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε τὰ ὁποῖα εἶναι ἀμφότερα θετικῶς ἢ ἀμφότερα ἀρνητικῶς προσανατολισμένα θὰ ὀνομάζωνται ὁμόρροπα. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ ὀνομάζωνται ἀντίρροπα. Ἂν τὰ σημεῖα A καὶ B ταυτίζωνται τὸ εὐθ. τμῆμα AB θὰ ὀνομάζεται μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα καὶ θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον O

7-1.3

Δοθέντος ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε ἑνὸς προσανατολισμένου εὐθ. τμήματος $\overline{AB}$ καὶ ἑνὸς σημείου A' αὐτῆς, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ε σημεῖον B' καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{A'B'}$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overline{AB}$.

7-1.4 Ὁρισμοί

Τὸ τμῆμα $\overline{A'B'}$ τὸ ἴσον πρὸς $\overline{BA}$ ὀνομάζεται ἀντίθετον τοῦ $\overline{AB}$.

Συμβολισμός: $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$.

Δύο εὐθ. τμήματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε ὀνομάζονται διαδοχικά ἂν τὸ πέρας τοῦ ἑνὸς συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄλλου.



Ἔστωσαν $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ δύο εὐθ. τμήματα ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον A τῆς ε καὶ τὰ σημεῖα B καὶ Γ αὐτοῦ ὥστε $\overline{AB} = \overline{\alpha}$ καὶ $\overline{B\Gamma} = \overline{\beta}$. Τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{A\Gamma}$ ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$.

Συμβολισμός: $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

7-1.5

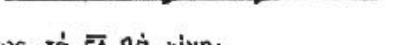
Δεχόμεθα ὅτι τὸ τμῆμα $\overline{A\Gamma}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ A ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε.

7-1.6 Σχέσις τῶν Chasles - Möbius

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας ε τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδενικὸν τμῆμα.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι τὸ B κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ Γ (ἰδὲ σχῆμα). Θὰ ἔχωμεν $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω σχέσεως τὸ $\overline{\Gamma A}$ θὰ γίνῃ:



$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma A}$$

Ἀλλὰ τὰ $\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$ εἶναι ἀντίθετα, ἄρα $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις (π.χ. τὸ Γ μεταξὺ A καὶ B, κλπ.).

7-2 Προσανατολισμένον ἐπίπεδον

Θεωροῦμεν τὰς ἡμιευθείας α, β, γ ἀρχομένας ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου O. Ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων ὁρίζονται ἓξ διατεταγμέναι τριάδες, αἱ

$$(\alpha,\beta,\gamma),\ (\beta,\gamma,\alpha),\ (\gamma,\alpha,\beta),\ (\alpha,\gamma,\beta),\ (\gamma,\beta,\alpha),\ (\beta,\alpha,\gamma)$$

7-2.1

Ἐκ τῶν ἓξ διατεταγμένων τριάδων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας α, β, γ τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν καινὸν ἀρχικὸν σημεῖον, αἱ (α,β,γ), (β,γ,α), (γ,α,β) ὁρίζουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν **φοράν** ἢ **προσανατολισμὸν** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Αἱ (α,γ,β), (γ,β,α), (β,γ,α) ὁρίζουν ἐπίσης μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν διάφορον τῆς πρώτης.

Ἂν μία ἀπὸ τὰς δύο φορὰς ὀνομασθῇ θετικὴ ἡ ἄλλη θὰ ὀνομάζεται ἀρνητική.

7-2.2 Ὁρισμοί

Τὸ ἐπίπεδον ὀνομάζεται προσημασμένον ἢ προσανατολισμένον ὅταν ἔχη ὁρισθῆ ἐπ' αὐτοῦ ἡ θετικὴ φορά.

Προσανατολισμένην γωνίαν ὀνομάζομεν κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸ σημεῖο. Τὸ ζεῦγος (ΟΑ,ΟΒ) εἶναι μία προσανατολισμένη γωνία. Ἡ ΟΑ ὀνομάζεται ἀρχικὴ πλευρά, ἐνῶ ἡ ΟΒ τελικὴ πλευρά.



7-2.3

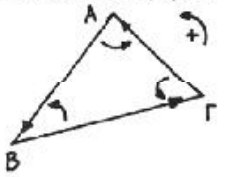
Δοθείσης ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου μιᾶς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ) καὶ μιᾶς ἡμιευθείας Ο'Α' ὑπάρχει ἐπ' αὐτοῦ ἡμιευθεῖα Ο'Β', καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (Ο'Α',Ο'Β') νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ ἡμιευθεῖα Ο'Β'' καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (Ο'Α',Ο'Β'') νὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ).

Συμβολισμός: (Ο'Α',Ο'Β') = (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (Ο'Α',Ο'Β'') = -(ΟΑ,ΟΒ).

7-3 Προσανατολισμένον τρίγωνον

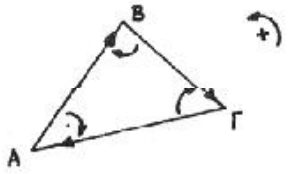
Ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, τὸ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος σημείων (Α,Β,Γ) ὁριζόμενον τρίγωνον ὀνομάζεται προσανατολισμένον τρίγωνον.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λέγεται θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένον καθ' ὅσον ἡ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (Α,Β,Γ) ὁριζομένη ἐπ' αὐτοῦ φορὰ εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητική. (Σχ.(α),(β)).



Σχ. (α)

Θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον



Σχ (β)

Ἀρνητικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον

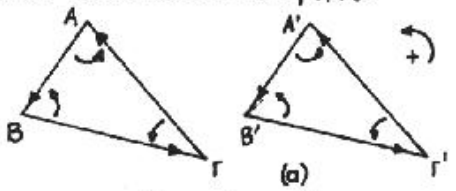
Γωνίας τοῦ προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ ὀνομάζομεν τὰς κυρτὰς γωνίας (ΑΒ,ΑΓ), (ΒΓ,ΒΑ), (ΓΑ,ΓΒ). Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον προκύπτει ἀμέσως ὅτι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι θετικῶς προσανατολισμέναι.

Ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ. Ἐστωσαν ΑΒ', ΒΓ', ΓΑ' αἱ ἀντικείμεναι εὐθεῖαι τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Αἱ γωνίαι (ΑΓ,ΑΒ'), (ΒΑ,ΒΓ'), (ΓΒ,ΓΑ') ὀνομάζονται ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

7-4 Ἰσότης τριγώνων

7-4.1 Ὁρισμός

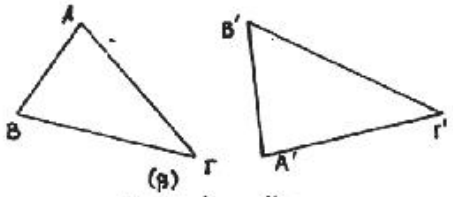
Δύο ὁμόλογα[1] τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζονται ὁ μ ο ρ ρ ό π ω ς Ἴ σ α ἢ ἁπλῶς ἴσα, ὅταν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι, ἀ ν τ ι ρ ρ ό π ω ς Ἴ σ α, ὅταν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν ἀντίθετοι. (Σχ. (α), (β)).



(α)

Ὁμορρόπως Ἴσα

$$\begin{matrix} \alpha=\alpha' \\ \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \end{matrix} \quad \Lambda \quad \begin{matrix} \hat{A}=\hat{A}' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \end{matrix} \quad (2)$$



(β)

Ἀντιρρόπως Ἴσα

$$\begin{matrix} \alpha=\alpha' \\ \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \end{matrix} \quad \Lambda \quad \begin{matrix} \hat{A}=-\hat{A}' \\ \hat{B}=-\hat{B}' \\ \hat{\Gamma}=-\hat{\Gamma}' \end{matrix} \quad (2)$$

7-4.2 Θεωρήματα

1. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι:

Ⓐ $\begin{matrix} \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \end{matrix} \Lambda\ \hat{A}=\hat{A}' \implies \overset{\Delta}{AB\Gamma},\ \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ ὁμορρόπως ἴσα.

Ⓑ $\begin{matrix} \beta=\beta' \\ \gamma=\gamma' \end{matrix} \Lambda\ \hat{A}=-\hat{A}' \implies \overset{\Delta}{AB\Gamma},\ \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ ἀντιρρόπως ἴσα.

2. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι:

Ⓐ $\alpha=\alpha' \Lambda \begin{matrix} \hat{B}=\hat{B}' \\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \end{matrix} \implies \overset{\Delta}{AB\Gamma},\ \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ ὁμορρόπως ἴσα.

Ⓑ $\alpha=\alpha' \Lambda \begin{matrix} \hat{B}=-\hat{B}' \\ \hat{\Gamma}=-\hat{\Gamma}' \end{matrix} \implies \overset{\Delta}{AB\Gamma},\ \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ ἀντιρρόπως ἴσα.

3. Ⓐ Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

Ⓑ Ἂν εἰς δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

7-5 Προσημασμένον Ἐμβαδόν

Θεωροῦμεν τὸ θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ ρ ί ζ ο μ ε ν ὡς π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν ο ν ἐ μ β α δ ό ν τὴν τιμήν:

---

[1] τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀπεικατεστάθη μία (μ.1) ἀντιστοιχία.

[2] Θέτομεν $(AB, A\Gamma) = \hat{A}$, $(A'B', A'\Gamma') = \hat{A}'$ κλπ.

$$\frac{1}{2}\, a v_a \text{ [1]}$$

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένον ὁ ρ ί ζ ο μ ε ν ὡς π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν ο ν ἐμβαδὸν αὐτοῦ τὴν τιμὴν

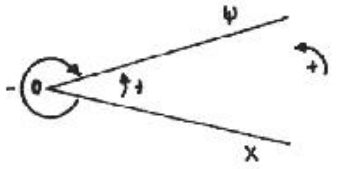
$$-\frac{1}{2}\, a v_a$$

Συμβολίζομεν τὸ προσημασμένον ἐμβαδὸν $(\overline{AB\Gamma})$ ἢ Ε. Εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ, $(\overline{AB\Gamma})+(\overline{BA\Gamma})=0$, ἀκόμη $(\overline{AB\Gamma})=(\overline{B\Gamma A})=(\overline{\Gamma AB})$ καὶ $(\overline{BA\Gamma})=(\overline{\Gamma BA})=(\overline{A\Gamma B})$.

Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι: $(\overline{AB\Gamma})=(\overline{B\Gamma A})+(\overline{\Gamma AM})+(\overline{ABM})$.

7-6 Γενικευμένη προσανατολισμένη γωνία

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς προσανατολισμένης γωνίας τὸ ζεῦγος (Ox,Oy) καθορίζει δύο γωνίας. Τὴν κυρτὴν γωνίαν (Ox,Oy) καὶ τὴν μὴ κυρτήν. Ἂν μία τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη ἡ ἄλλη θὰ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.



Ἐὰν θέσωμεν τὴν θετικὴν γωνίαν (Ox,Oy) α, τότε ἡ ἀρνητικὴ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ α·2π, ὅπου 2π ἡ πλήρης γωνία. Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι

$$\alpha\ ,\ \alpha+2\pi\ ,\ \alpha+2\cdot 2\pi\ ,\ \alpha+3\cdot 2\pi,\ \ldots\qquad \alpha+\kappa\cdot 2\pi$$

$$\alpha-2\pi,\ \alpha-2\cdot 2\pi\ ,\ \alpha-3\cdot 2\pi\ ,\ \ldots\qquad \alpha-\kappa\cdot 2\pi$$

ἔχουν ὡς πρώτην πλευρὰν τὴν Ox καὶ δευτέραν τὴν Oy, ἀνταποκρίνονται δηλαδὴ εἰς τὸ ζεῦγος (Ox,Oy). Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ὁρίσωμεν ὡς γενικευμένην γωνίαν (Ox,Oy) τὴν γωνίαν:

$$\alpha+2\kappa\pi \quad (\kappa\in Z)$$

7-6.1 Γωνία δύο ἡμιευθειῶν

Ἔστω Ax καὶ By τυχοῦσαι ἡμιευθεῖαι καὶ Ox'//Ax, Oy'//By. Ὀνομάζομεν γωνίαν τῶν Ax,By καὶ συμβολίζομεν (Ax,By) τὴν γωνίαν τὴν ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ ζεύγους (Ox',Oy'). Ἤτοι:

$$(Ax,By)=(Ox',Oy')$$

7-6.2 Σχέσις τοῦ Chasles διὰ τὰς ἡμιευθείας

Ἔστω αἱ ἡμιευθεῖαι $O_1x_1, O_2x_2, \ldots, O_\nu x_\nu$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(O_1x_1,O_2x_2)+(O_2x_2,O_3x_3)+\ldots+(O_\nu x_\nu,O_1x_1)=2\kappa\pi$$

Χρησιμοποιοῦμεν τὴν μαθηματικὴν ἐπαγωγήν. Διὰ $\nu=2,3$ ἡ σχέσις εἶναι προφανής. Ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu=\rho$, ἤτοι: $(O_1x_1,O_2x_2)+(O_2x_2,O_3x_3)+\ldots+(O_\rho x_\rho,O_1x_1)=2\kappa\pi$ (1). Θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθείαν $O_{\rho+1}x_{\rho+1}$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν τοῦ Chasles διὰ τὰς $O_\rho x_\rho$, $O_{\rho+1}x_{\rho+1}, O_1x_1$: $(O_\rho x_\rho,O_1x_1)=(O_\rho x_\rho,O_{\rho+1}x_{\rho+1})+(O_{\rho+1}x_{\rho+1},O_1x_1)-2\kappa_2\pi$ (2). Ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν $(O_\rho x_\rho,O_1x_1)$ ἐκ τῆς (2) εἰς (1) καὶ προκύπτει τὸ ζητούμενον.

---

[1] a, v_a τὰ μέτρα τῆς πλευρᾶς α καὶ τοῦ ὕψους v_a, ἀντιστοίχως.

Παρατηρήσεις.

Η σχέσις $(Ox,Oy)=(Ox,Oz)+(Oz,Oy)+2k\pi$, γράφεται συνήθως

$$(Ox,Oy)=(Ox,Oz)+(Oz,Oy) \qquad [2\pi]$$

7-7 Προσανατολισμένος κύκλος

7-7.1 Ὁρισμοί

Κάθε κύκλος (O,R) εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν προσαρτήσει μίαν φοράν, θεωρούμενος εἰς τὸ προσανατολισμένον ἐπίπεδον, ὀνομάζεται προσανατολισμένος κύκλος.

Η ἐπὶ τοῦ κύκλου φορὰ δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος σημείων.

Προσανατολισμένον τόξον, ὀνομάζομεν τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ ἓν κύκλου καὶ ἀπὸ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Συμβολισμὸς $\overset{\frown}{AB}$. τὸ σημεῖον A ὀνομάζεται ἀρχὴ τὸ B πέρας τοῦ τόξου.

7-7.2 Θεώρημα

Ἐὰν A,B καὶ M τυχόντα σημεῖα τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου (O,R), θὰ εἶναι:

$$(MA,MB)=\frac{1}{2}\,[OA,OB] \qquad [2\pi]$$

7-7.3 Θεώρημα

Η ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τέσσερα σημεῖα A,B,M,N ἐκ τῶν ὁποίων τρία οἱαδήποτε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἵνα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι:

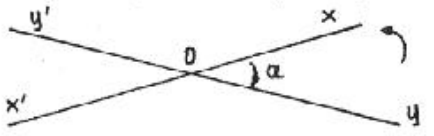
$$(MA,MB)=(NA,NB) \qquad [2\pi]$$

7-8 προσανατολισμένη γωνία δύο εὐθειῶν εἰς τὸ προσανατολισμένον ἐπίπεδον

Θεωρήσωμεν τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν (ε,η). Ἔστω αἱ εὐθεῖαι xox' καὶ ψοψ' ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ε,η.

7-8.1 Ὁρισμός

Ὁρίζομεν προσανατολισμένην γωνίαν τῶν ε,η καὶ συμβολίζομεν (ε,η) τὴν προσανατολισμένην γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν Ox,Oy ἤτοι τὴν (Ox,Oy) ἢ τὴν προσανατολισμένην γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν Ox',Oy, ἤτοι τὴν (Ox',Oy).



Ὡς γνωστὸν ἔχομεν $(Ox,Oy)=\alpha+2k\pi$ (ἰδὲ σχῆμα) καὶ $(Ox',Oy)=\pi+\alpha+2k\pi$, ὅθεν

$$(\varepsilon,\eta)=\alpha+k\pi$$

7-8.2 Σχέσεις τοῦ Chasles διὰ τὰς εὐθείας

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἂν $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ τρεῖς εὐθεῖαι ἑνὸς προσανατολισμένου

ἐπιπέδου θὰ εἶναι:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(\varepsilon_2,\varepsilon_3)+(\varepsilon_3,\varepsilon_1)=\text{κπ}\quad\text{(Σχέσις τοῦ Chasles).}$$

Γενικῶς ἀποδεικνύεται διὰ τὴν εὐθείας $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots\varepsilon_n$ διὰ τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ὅτι:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+(\varepsilon_2,\varepsilon_3)+\dots+(\varepsilon_n,\varepsilon_1)=\text{κπ}$$

7-9 Διανύσματα

7-9.1 Ὁρισμοί

Ἐφαρμοστὸν διάνυσμα. Καλοῦμεν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἓν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων (A,B).

Τὸ πρῶτον σημεῖον A θὰ ὀνομάζεται **ἀρχὴ** ἢ **ἀρχικὸν** σημεῖον τὸ δὲ σημεῖον B **πέρας** ἢ **τελικὸν** σημεῖον τοῦ διανύσματος.

Συμβολισμός. Τὸ διάνυσμα (A,B) συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\vec{AB}$ ἢ ἀνώμη μὲ ἓν μικρὸν γράμμα π.χ. $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ κλπ.

Φορεὺς τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα AB ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται.

Διεύθυνσις τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι ἡ διεύθυνσις[1] τῆς εὐθείας AB.

Φορὰ τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$, εἶναι ἡ φορὰ ἡ ὁποία καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ζεύγους (A,B) ἐπὶ τῆς εὐθείας AB.

Μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι τὸ διάνυσμα τοῦ ὁποίου τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ τελικὸν σημεῖον συμπίπτουν. Συμβολίζεται δὲ $\vec{0}$ ἢ ἁπλῶς 0. Ἤτοι $\vec{AB}=\vec{0}\Longrightarrow A\equiv B$.

Μέτρον διανύσματος. Θὰ ὀνομάζωμεν μέτρον τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ καὶ θὰ συμβολίζωμεν $|\vec{AB}|$ τὸ μέτρον τοῦ εὐθ. τμήματος AB.

Ἐὰν τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\vec{A_0B_0}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, τὸ διάνυσμα τοῦτο θὰ ὀνομάζεται **μοναδιαῖον διάνυσμα** ἐπὶ τῆς εὐθείας A_0B_0 καὶ παρίσταται συνήθως $\vec{\iota}$ ἢ $\vec{\varepsilon}_0,\vec{x}_0,\vec{\kappa}_0\dots$

Ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος (ἢ σχετικὸν μέτρον). Ὀνομάζομεν τὸ προσημασμένον μέτρον τοῦ διανύσματος, θετικῶς μὲν ἂν ἡ φορὰ τοῦ διανύσματος συμπίπτει μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται, ἀρνητικῶς δὲ ἂν εἶναι ἀντίθετος. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ συμβολίζεται συνήθως $(\overline{AB})$ ἢ ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον διὰ τὴν γραφὴν[2] $\overline{AB}$ καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι $\overline{AB}=-\overline{BA}$.

Ἐπίσης βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν, ἔχομεν $\vec{AB}=\overline{AB}\cdot\vec{A_0B_0}$. Εὐκόλως διαπιστώνομεν ἐπίσης ὅτι ἂν A,B,Γ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας, διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$ ἰσχύει τὸ θεώρημα τοῦ Chasles, ἤτοι: $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}=0$.

Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Chasles: Ἐὰν κκ' τυχόντων ἀξόνων καὶ $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{v}_i=0\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}\text{προβολὴ }\vec{v}_{i\,\kappa\kappa'}=0$.

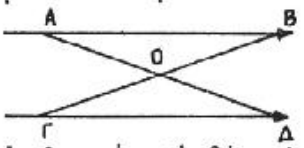
---

[1] Ἡ παραλληλία εἶναι μία σχέσις, ἡ ὁποία καθορίζει μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου. Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καλοῦνται διευθύνσεις.

[2] Δὲν δημιουργεῖται σύγχυσις μὲ τὸ προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα AB ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τῶν συμφραζομένων, ἀφ' ἑτέρου ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι συνήθως διὰ τὸ προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα γίνεται εἰδικὴ μνεία.

Ἰσοδύναμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα. (1) Ἐὰν δύο διανύσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα θὰ ὀνομάζωνται ἰσοδύναμα ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα εἶναι ἴσα.

(2) Ἐὰν τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$ ἔχουν διαφορετικοὺς φορεῖς θὰ ὀνομάζωνται ἰσοδύναμα, ἐὰν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον (ἰδὲ σχῆμα).



Συμβολισμός. $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$

Τὰ ἰσοδύναμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καλοῦνται **ἐλεύθερα διανύσματα**, ὅθεν

Ἐλεύθερον διάνυσμα καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, ἰσοδυνάμων πρὸς δοθὲν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

Ἐφ' ἑξῆς ὁπὸ τῆς λέξεως διάνυσμα θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.

Ἴσα διανύσματα. Δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ θὰ ὀνομάζωνται ἴσα ὅταν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας (ἡ τὸν αὐτὸν ἀντιπρόσωπον τὸ διάνυσμα $\vec{AB}$ π.χ.) Ἢ, ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς περισσότερον ἁπλῶς διὰ τὸν μαθητήν, ὅταν ἔχουν

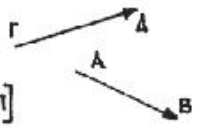
1ον τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν

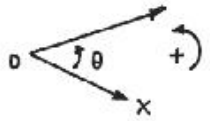
2ον τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ

3ον τὸ αὐτὸ μέτρον

Γωνία δύο διανυσμάτων. Ἔστω τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$ κείμενα ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου Π. Ὀνομάζομεν γωνίαν τῶν δύο διανυσμάτων τὴν γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

$(\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}) = \theta + 2\kappa\pi$ ἢ $(\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}) = \theta$ $[2\pi]$





Ἐὰν θέσωμεν $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ $[2\pi]$

Συγγραμμικὰ διανύσματα. Δύο διανύσματα $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$ θὰ λέγωνται συγγραμμικά, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν

$\vec{u}, \vec{v}$ ὁμόρροπα : $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ $[2\pi]$

$\vec{u}, \vec{v}$ ἀντίρροπα : $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ $[2\pi]$

Συνεπίπεδα διανύσματα. Δύο διανύσματα λέγονται συνεπίπεδα, ὅταν αἱ διευθύνσεις των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Δύο τυχόντα διανύσματα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι συγγραμμικὰ ἢ συνεπίπεδα.

7 - 9.2 Ἄλγεβρα τῶν Διανυσμάτων

Πρόσθεσις διανυσμάτων

Θεωρήσωμεν τὰ διανύσματα $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \ldots \vec{a_n}\}$ μὲ ἀντιπροσώπους ἀντιστοίχως τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\{\vec{OA_1}, \vec{A_1A_2}, \vec{A_2A_3}, \ldots \vec{A_{n-1}A_n}\}$. Καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots \vec{a_n}$ τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τοῦ ὁποίου ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OA_n}$.

Συμβολισμός. $\vec{\alpha} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_n}$ ἢ $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a_i}$

Διαφορά δύο διανυσμάτων

Διαφορά τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}$ ἀπό τό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ὀνομάζομεν τό διάνυσμα $\vec{\gamma}$ τό ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τό $\vec{\beta}$ μᾶς δίδει τό $\vec{\alpha}$.

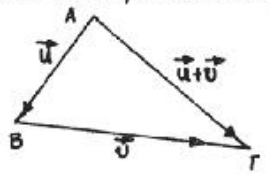
Συμβολισμός. $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Ἤτοι $\vec{\gamma}+\vec{\beta}=\vec{\alpha} \iff \vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Ἀντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν τό ἄθροισμό των εἶναι τό μηδενικόν διάνυσμα. Τό ἀντίθετον τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται $-\vec{\alpha}$.

Τριγωνομετρική ἀνισότης δύο διανυσμάτων

Ἔστω $\vec{u}=\vec{AB}$ καί $\vec{v}=\vec{B\Gamma}$. Θά εἶναι, συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν ἀθροίσματος διανυσμάτων, $\vec{A\Gamma}=\vec{u}+\vec{v}$. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ὡς γνωστόν ἡ τριγωνομετρική ἀνισότης, ἤτοι:



$$|\vec{A\Gamma}| < |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| \quad , \text{ὅθεν}$$
$$|\vec{\omega}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Ἡ ἰσότης ἐνταῦθα ἐάν $\vec{u}, \vec{v}$ εἶναι συγγραμμικά καί τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἡ τριγωνομετρική ἀνισότης δύναται εὐκόλως νά ἐπεκταθῇ διά τά $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_n}$, ἤτοι:

$$|\vec{u_1}+\vec{u_2}+\ldots+\vec{u_n}| \leq |\vec{u_1}|+|\vec{u_2}|+\ldots+|\vec{u_n}|$$

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ κάτωθι ἰδιότητες:

① $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (ἀντιμεταθετική)

② $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (προσεταιριστική)

③ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ (οὐδέτερον στοιχεῖον)

④ $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ (ἀντίθετον στοιχεῖον)

Σκαληνόν γινόμενον

Ἔστω $\kappa \in \mathbb{R}^+$ καί τυχόν διάνυσμα $\vec{u}$. Ὁρίζομεν τό διάνυσμα $\vec{v}=\kappa\vec{u}$, ὡς τό διάνυσμα τό ὁποῖον ἔχει τήν αὐτήν φοράν μέ τό $\vec{u}$ καί τοῦ ὁποίου τό μέτρον εἶναι $|\kappa|$ φοράς τό μέτρον τοῦ $\vec{u}$. Ἤτοι $\vec{v}=|\kappa|\,\vec{u}$. Ἐάν $\kappa \in \mathbb{R}^-$ τότε τό διάνυσμα $\vec{v}=\kappa\vec{u}$ ἔχει μέτρον ἴσον πρός $|\kappa|$ φοράς τό μέτρον τοῦ $\vec{u}$ καί φοράν ἀντίθετον τοῦ $\vec{u}$. Διά $\kappa=0$, $\kappa\vec{u}=\vec{0}$.

Τό διάνυσμα $\kappa\vec{u}$ καλεῖται σκαληνόν γινόμενον τοῦ $\kappa \in \mathbb{R}$ ἐπί τό διάνυσμα $\vec{u}$.

Ἰδιότητες τοῦ σκαληνοῦ γινομένου

① $\vec{u}=\vec{v} \Longrightarrow \kappa\vec{u}=\kappa\vec{v}$ καί ἄν $\kappa \neq 0$, $\kappa\vec{u}=\kappa\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$

② Ἐάν $\vec{u} \neq \vec{0}$ τότε $\kappa\vec{u}=\kappa_1\vec{u} \Longrightarrow \kappa=\kappa_1$

③ $\kappa(\kappa_1\vec{u})=\kappa_1(\kappa\vec{u})=\kappa\kappa_1\vec{u}$

④ $\kappa(\vec{u}+\vec{v})=\kappa\vec{u}+\kappa\vec{v}$

⑤ $(\kappa+\kappa_1)\vec{u}=\kappa\vec{u}+\kappa_1\vec{u}$

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω τάς ③ ④ ⑤ ἰδιότητας τοῦ σκαληνοῦ γινομένου.

Ἰδιότης ③: $\kappa(\kappa_1\vec{u})=\kappa_1(\kappa\vec{u})=\kappa\kappa_1\vec{u}$

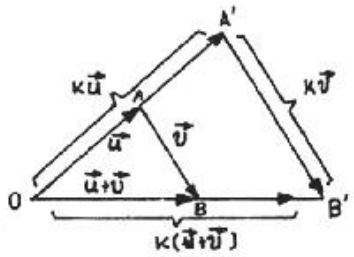
Ἀπόδειξις:

Τά διανύσματα $\kappa(\kappa_1\vec{u})$, $\kappa\kappa_1\vec{u}$ ἔχουν προφανῶς τό αὐτό μέτρον $|\kappa\kappa_1||\vec{u}|$. Θά δείξωμεν ὅτι ἔ-

χουν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐὰν $\kappa>0$ τότε τὸ $\kappa(\kappa_1\vec{u})$ ἔχει τὴν φορὰν τοῦ $\kappa_1\vec{u}$, ἤτοι τὴν φορὰν τοῦ $\vec{u}$ ἂν $\kappa_1>0$ ἀντίθετον δὲ ἂν $\kappa_1<0$. Ἐλέγχοντες τὴν φορὰν τοῦ $\kappa\kappa_1\vec{u}$ διαπιστώνομεν ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Ἐὰν $\kappa<0$, μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς βλέπομεν ὅτι τὰ $\kappa(\kappa_1\vec{u})$ καὶ $\kappa\kappa_1\vec{u}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Ἰδιότης ④ : $\kappa(\vec{u}+\vec{v})=\kappa\vec{u}+\kappa\vec{v}$



Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν $\vec{OA'}=\kappa\vec{u}=\kappa\vec{OA}$. Ἡ ἐκ τοῦ A' παράλληλος πρὸς τὴν AB (ἰδὲ σχῆμα) τέμνει τὴν OB εἰς B'.

$A\hat{O}B\sim A'\hat{O}B'$ (1) $\Longrightarrow \frac{A'B'}{AB}=\kappa$ ἢ $\vec{A'B'}=\kappa\vec{v}$.

$\vec{OB'}=\vec{OA'}+\vec{A'B'}=\kappa\vec{u}+\kappa\vec{v}$ (2)

(1) $\Longrightarrow \frac{OB'}{OB}=\kappa \Longrightarrow \vec{OB'}=\kappa(\vec{u}+\vec{v})$ (3)

(2), (3) $\Longrightarrow \kappa(\vec{u}+\vec{v})=\kappa\vec{u}+\kappa\vec{v}$

Ἰδιότης ⑤ : $(\kappa+\kappa_1)\vec{u}=\kappa\vec{u}+\kappa_1\vec{u}$

Ἀπόδειξις:

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο συγχραμμικῶν διανυσμάτων τῆς αὐτῆς φορᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των. Τὸ μέτρον δὲ τῆς διαφορᾶς δύο συγχραμμικῶν διανυσμάτων ἀντιθέτου φορᾶς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων των [1].

Θέτομεν $\vec{x}=(\kappa+\kappa_1)\vec{u}$ καὶ $\vec{y}=\kappa\vec{u}+\kappa_1\vec{u}$

Ἔστω 1) $\kappa\kappa_1>0$

α) $\kappa+\kappa_1>0$ ἤτοι $\kappa,\kappa_1>0$. Τὸ διάνυσμα $\vec{x}$ θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὸ $\vec{u}$, ὅπως καὶ τὸ $\vec{y}$ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὰ $\kappa\vec{u}$, $\kappa_1\vec{u}$, ἤτοι $\vec{x}$ καὶ $\vec{y}$ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἀκόμη $|\vec{x}|=|\kappa+\kappa_1||\vec{u}|$, $|\vec{y}|=|\kappa\vec{u}+\kappa_1\vec{u}|$ ἢ συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν $|\vec{y}|=(|\kappa|+|\kappa_1|)|\vec{u}|$. Ἀλλὰ $|\kappa+\kappa_1|=|\kappa|+|\kappa_1|$, ὅθεν $|\vec{x}|=|\vec{y}|$

β) $\kappa+\kappa_1<0$. Ὁμοίως

2) $\kappa\kappa_1<0$

α) $\kappa+\kappa_1>0$ ἤτοι, ἀπολύτως μεγαλύτερος ὁ θετικὸς καὶ ἔστω $\kappa>0$. Τὸ διάνυσμα $\vec{x}$ θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὸ $\kappa\vec{u}$, ἤτοι πρὸς τὸ $\vec{u}$. Ἀκόμη $|\vec{x}|=|\kappa+\kappa_1||\vec{u}|$, $|\vec{y}|=|\kappa\vec{u}+\kappa_1\vec{u}|$ ἢ $|\vec{y}|=(|\kappa|-|\kappa_1|)|\vec{u}|$. Ἀλλ' ὡς γνωστὸν $|\kappa+\kappa_1|=|\kappa|-|\kappa_1|$, ὅθεν $|\vec{x}|=|\vec{y}|$

7-9.3 Διανυσματικὴ βάσις μιᾶς εὐθείας

Ἔστω εὐθεῖα ε καὶ διάνυσμα $\vec{\varepsilon}=\vec{0}$, μὲ φορέα παράλληλον πρὸς τὴν ε. Κάθε ἄλλο διάνυσμα $\vec{u}$, συγχραμμικὸν πρὸς τὸ $\vec{\varepsilon}$, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\vec{u}=x\vec{\varepsilon}$. (Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $x=\frac{|\vec{u}|}{|\vec{\varepsilon}|}$ ἂν $\vec{u},\vec{\varepsilon}$ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ $x=-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{\varepsilon}|}$ ἂν $\vec{u},\vec{\varepsilon}$ ἀντιθέτου φορᾶς).

Τὸ διάνυσμα $\vec{\varepsilon}$ καλεῖται διανυσματικὴ βάσις τῆς εὐθείας ε. Ὁ ἀριθμὸς

---

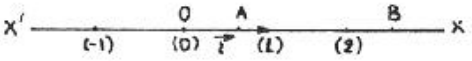
[1] Ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὁ ὁρισμὸς τοῦ μέτρου.

x καλεῖται τετμημένη τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ εἰς τὴν βάσιν $\vec{i}$.

Κ α ν ο ν ι κ ὴ β ά σ ι ς (ἢ φ υ σ ι κ ὴ). Ἡ βάσις $\vec{i}$ καλεῖται κ α ν ο ν ι κ ὴ, ὅταν τὸ διάνυσμα $\vec{i}$ ἐκλεχθῇ ὡς τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα ($|\vec{i}| = 1$). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς x συμπίπτει πρὸς τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ διανύσματος $\vec{u}$.

7-9.4 Ἄξων

Εἶναι μία εὐθεῖα xx' ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀπεκατεστάθη ἀμφιμονότιμος ἀντιστοιχία μετὰ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς κάτωθι:



Ἕν σημεῖον O ἔχει ὁρισθῇ ἵνα ἀντιστοιχῇ πρὸς τὸ μηδέν, μία φορὰ ὡς θετικὴ καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{i}$, τοῦ ὁποίου ἡ φορὰ εἶναι ἡ τοῦ ἄξονος.

Ἐὰν A,B τυχόντα σημεῖα τοῦ ἄξονος xx', θὰ εἶναι: $\vec{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$. Ἐπίσης $\vec{OA} = \overline{OA} \cdot \vec{i}$. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$ ὀνομάζεται τ ε τ μ η μ έ ν η τοῦ σημείου A.

Ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ Chasles διὰ τὰ σημεῖα O, A, B τοῦ ἄξονος xx', ἔχομεν:

$$\boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$$

7-9.5 Γραμμικὴ ἐξάρτησις

Τὰ διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$ λέγονται γ ρ α μ μ ι κ ῶ ς ἐ ξ ά ρ τ η μ έ ν α ὅταν ὑπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ Λ $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \neq 0$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0$. Ἄλλως, ὅταν δηλαδὴ κάθε σχέσις τῆς μορφῆς $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0$ συνεπάγεται τὴν $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 0$, ἤτοι τὸν μηδενισμὸν ἁπάντων τῶν λ, τὰ διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$ θὰ λέγωνται γ ρ α μ μ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ι α.

Ἀποδεικνύονται εὐκόλως τὰ κάτωθι θεωρήματα:

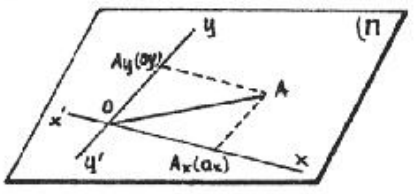
① Ἂν δύο διανύσματα εἶναι ἐξηρτημένα θὰ εἶναι συγγραμμικά. Ἀντιστρόφως.

② Ἂν τρία διανύσματα εἶναι ἐξηρτημένα θὰ εἶναι συνεπίπεδα. Ἀντιστρόφως.

③ Τέσσαρα διανύσματα εἰς τὸν χῶρον εἶναι πάντοτε ἐξηρτημένα.

7-9.6 Ἀνάλυσις διανύσματος κατὰ δύο διευθύνσεις συνεπιπέδους πρὸς τὸ διάνυσμα

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα $\vec{a}$ εἶναι παράλληλον πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ ἔστω xx', yy' δύο τεμνόμενοι κατὰ τὴν ἀρχὴν των O ἄξονες μὲ διανυσματικὰς μονάδας $\vec{x}_o$, $\vec{y}_o$ ἀντιστοίχως. Ἔστω A∈Π ὥστε $\vec{OA} = \vec{a}$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐκ τοῦ A παράλληλον πρὸς τὴν yy' καὶ A_x τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τῆς xx' θὰ εἶναι:



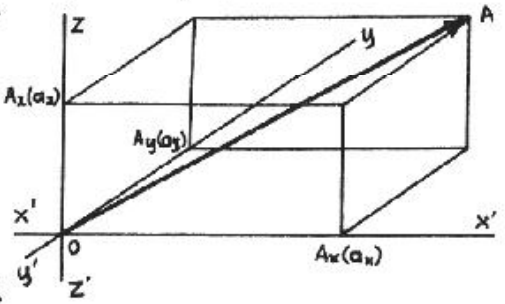
$$\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{A_xA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y$$

Θέτομεν $\vec{OA}_x = a_x \vec{x}_o$, $\vec{OA}_y = a_y \vec{y}_o$ καὶ θὰ ἔχωμεν: $\vec{a} = a_x \vec{x}_o + a_y \vec{y}_o$.

Ἤτοι τὸ διάνυσμα $\vec{a}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις xx', yy'.

7-9.7 Ἀνάλυσις διανύσματος κατὰ τρεῖς διευθύνσεις μὴ συνεπιπέδους

Ἔστω xx', yy', zz' ἓν σύστημα τριῶν ἀξόνων μὴ συνεπιπέδων μὲ ἀρχὴν κοινὴν O καὶ διανυσματικὰς μονάδας $\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o$ ἀντιστοίχως καὶ $\vec{\alpha}$ τυχὸν διάνυσμα τοῦ χώρου.



Ἂν λάβωμεν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ θεωρήσωμεν τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἀκμαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν xx', yy', zz' θὰ εἶναι (ἰδὲ σχῆμα).

$$\vec{OA} = \vec{OA_x} + \vec{OA_y} + \vec{OA_z}$$

Θέτομεν $\vec{OA_x} = a_x\vec{x}_o$, $\vec{OA_y} = a_y\vec{y}_o$, $\vec{OA_z} = a_z\vec{z}_o$

Θὰ ἔχωμεν $\vec{\alpha} = a_x\vec{x}_o + a_y\vec{y}_o + a_z\vec{z}_o$.

Ἤτοι τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ἀναλύεται εἰς τρεῖς μὴ συνεπιπέδους συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις xx', yy', zz'.

7-9.8 Καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων

Θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ μὲ διανυσματικὰς μονάδας ἀντιστοίχως $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ καὶ κοινῆς ἀρχῆς O.

Τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ἀναλυόμενον κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ἐν λόγῳ ἀξόνων γράφεται:

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

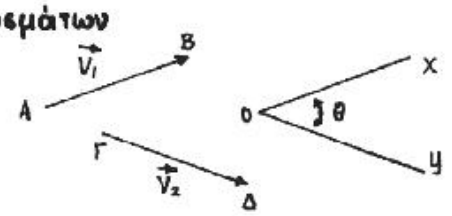
Συμβολίζεται συνήθως $\vec{\alpha}\ \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ $x_1, x_2, \ldots x_n$ ὀνομάζονται συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος κατὰ τὰς διευθύνσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Ἡ διατεταγμένη n-ὰς $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ ὁμοῦ μὲ τὴν ἀρχὴν O λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ ἓν **καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων**.

Τὸ ἐν λόγῳ σύστημα λέγεται **κανονικὸν** ἂν $|\vec{e}_i| = 1$, **ὀρθογώνιον** ἂν $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{\pi}{2}$ $(i \neq j)$ καὶ τέλος **ὀρθοκανονικὸν** ὅταν $|\vec{e}_i| = 1 \wedge (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{\pi}{2}$. Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots x_n$ **συντεταγμέναι** τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ἐν λόγῳ σύστημα. Ἐὰν $n=3$ ἡ x_1 ὀνομάζεται **τετμημένη**, ἡ x_2 **τεταγμένη** καὶ x_3 **κατηγμένη** τοῦ $\vec{\alpha}$.

7-9.9 Ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων

Θεωροῦμεν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1 = \vec{AB}$ καὶ $\vec{V}_2 = \vec{\Gamma\Delta}$.



Ἔστω θ ἡ γωνία[1] τῶν ἡμιευθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, εἶναι $0 \leq \theta \leq \pi$

Ὁρισμός.

Ὀνομάζομεν **ἐσωτερικὸν γινόμενον** τῶν $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $|\vec{V}_1||\vec{V}_2|\,\text{συν}\,\theta$.

Συμβολισμός. $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\,\text{συν}\,\theta$.

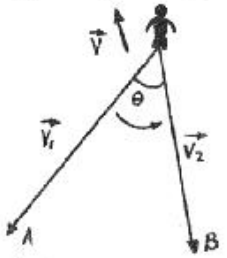
---

[1] Μὴ προσανατολισμένη.

7-9.10 Εξωτερικόν γινόμενον δύο διανυσμάτων

Ορισμός

Ονομάζομεν **εξωτερικόν** γινόμενον δύο διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ τὸ διάνυσμα $\vec{V}$ τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς $|\vec{V}_1|\cdot|\vec{V}_2|\,\eta\mu\theta$ (θ ὡς ἀρίσθη ἀνωτέρω) ἡ διεύθυνσις αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, ἡ φορὰ του δὲ τοιαύτη ὥστε ἡ διατεταγμένη τριὰς $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}$ νὰ ἀποτελῇ δεξιόστροφον σύστημα.



Λαμβάνομεν $\overrightarrow{OA}=\vec{V}_1$ καὶ $\overrightarrow{OB}=\vec{V}_2$. Παρατηρητὴς τοποθετεῖται εἰς τὸ O. Ἐὰν βλέπῃ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας θ εἰς τρόπον ὥστε νὰ πρέπῃ ἡ ἡμιευθεῖα OA στρεφομένη ἀπὸ τὴν κατεύθυνσιν τῆς δεξιᾶς του χειρὸς πρὸς τὴν ἀριστερὰν νὰ καταλαμβάνῃ τὴν θέσιν τῆς ἡμιευθείας OB, σχηματίζουσα τὴν γωνίαν θ, τότε ἡ φορὰ $\vec{V}$, πρὸς τὴν ὁποίαν ἔχει τοποθετηθῇ ὁ παρατηρητὴς (ἐκ τοῦ O πρὸς τὴν κεφαλήν του) μετὰ τῶν $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ ἀποτελοῦν δεξιόστροφον σύστημα, τὸ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}$.

7-9.11 Κέντρον βάρους συστήματος

① Θεωρήσωμεν $M=\{m_1, m_2, m_3, \dots m_n\}$ ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $m=m_1+m_2+m_3+\dots+m_n\neq 0$, $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ἓν σύνολον σημείων τοῦ χώρου, καὶ τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν καθ' ἣν $A_i \longleftrightarrow m_i$. Τὸ ἀνωτέρω σύστημα συμβολίζεται διὰ τοῦ A/M.[1]

Ορισμός

Ὁρίζομεν κέντρον βάρους τοῦ συστήματος A/M τὸ σημεῖον G τὸ ὁριζόμενον[2] ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{GA_n}=0 \qquad (1)$$

Ἐὰν O εἶναι ἡ ἀρχὴ ἑνὸς συστήματος ἀναφορᾶς καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OG}$ ($i\in\{1,2,3,\dots,n\}$) θὰ ἔχωμεν:

$$m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}-m\,\overrightarrow{OG}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}$$ ἢ

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i} \qquad (2)$$

Παρατήρησις

Ἐὰν διὰ τὸ σύστημα A/M εἶναι $m=0$, τὸ διάνυσμα $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀρχῆς O.

② Θεώρημα

Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος A/M, G' τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος A'/M' ὅπου $A'=\{A_1, A_2, \dots A_p\}$ καὶ $M'=\{m_1, m_2, \dots m_p\}$ μὲ $m'=\sum_{i=1}^{p} m_i\neq 0$ καὶ G'' τὸ κέντρον βάρους

---

[1] Ἡ φυσικὴ εἰκὼν τοῦ συστήματος A/M εἶναι: Εἰς τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \dots A_n$ ἐφαρμόζονται δυνάμεις παράλληλοι μέτρων ἀντιστοίχως $m_1, m_2, \dots m_n$.

[2] Ὡς προκύπτει ἀπὸ τὰς (2) τὸ G εἶναι μοναδικόν.

τοῦ συστήματος A''/M'' μὲ $A''=\{A_{\rho+1}, A_{\rho+2}, \dots A_n\}$, $M''=\{m_{\rho+1}, m_{\rho+2}, \dots m_n\}$ καὶ $m_n''=\sum_{i=1}^{n-\rho} m_{\rho+i} \neq 0$. Νὰ δειχθῆ ἡ σχέσις:

$$m\vec{OG} = m'\vec{OG}' + m''\vec{OG}'' \qquad (3)$$

Ἤτοι ἐὰν προστεθοῦν τὰ κέντρα βάρους δύο συστημάτων σημείων εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος ὅλων τῶν σημείων.

Ἀπόδειξις:

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν:

$$m\vec{OG} = \sum_{i=1}^{\rho} m_i \vec{OA_i} + \sum_{i=1}^{n-\rho} m_{\rho+i}\vec{OA}_{\rho+i} \qquad (4)$$

Ἀλλὰ $m'\cdot\vec{OG}' = \sum_{i=1}^{\rho} m_i\cdot\vec{OA_i}$ καὶ $m''\vec{OG}'' = \sum_{i=1}^{n-\rho} m_{\rho+i}\vec{OA}_{\rho+i}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) διαπιστώνομεν τὴν ἰσχὺν τοῦ θεωρήματος (3).

③ Θεώρημα τοῦ Leibnitz

Ἔστω τὸ σύστημα A/M καὶ P τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{PA_i}^2 = m\vec{PG}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i}^2 \quad \text{(τύπος Leibnitz)}$$

Ἀπόδειξις:

Ἔχομεν: $\vec{PA_i} = \vec{PG} + \vec{GA_i} \implies \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{PG} + \vec{GA_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{PG}^2 + \vec{GA_i}^2 + 2\vec{PG}\cdot\vec{GA_i}) = m\vec{PG}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i}^2$. Διότι $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{PG}\cdot\vec{GA_i} = \vec{PG}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i} = 0$.

④ Ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz

Ἐὰν M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου $A_1A_2A_3$ καὶ O σημεῖον ἀναφορᾶς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἀσκ. **884** ὅτι

$$\vec{OM} = \frac{\lambda_1\vec{OA_1} + \lambda_2\vec{OA_2} + \lambda_3\vec{OA_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

μὲ $\frac{\lambda_1}{E_1} = \frac{\lambda_2}{E_2} = \frac{\lambda_3}{E_3}$.

Τὸ σημεῖον M δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς κέντρον βάρους τοῦ συστήματος $A=\{A_1, A_2, A_3\}$ $\Lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Ἐὰν P τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος τοῦ Leibnitz, ἤτοι:

$$\lambda_1\vec{PA_1}^2 + \lambda_2\vec{PA_2}^2 + \lambda_3\vec{PA_3}^2 = \lambda\vec{PM}^2 + \lambda_1\vec{MA_1}^2 + \lambda_2\vec{MA_2}^2 + \lambda_3\vec{MA_3}^2 \qquad (5)$$

ὅταν $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Ἢ ἀκόμη:

$$\bar{E}_1\cdot\vec{PA_1}^2 + \bar{E}_2\cdot\vec{PA_2}^2 + \bar{E}_3\vec{PA_3}^2 = \bar{E}\vec{PM}^2 + \bar{E}_1\cdot\vec{MA_1}^2 + \bar{E}_2\cdot\vec{MA_2}^2 + \bar{E}_3\cdot\vec{MA_3} \qquad (6)$$

Ἐὰν τὸ P συμπίπτει πρὸς τὸ κέντρον τοῦ περιγ. κύκλου (O)

$$\bar{E}\cdot R^2 = \bar{E}\cdot\vec{OM}^2 + \bar{E}_1\cdot\vec{MA_1}^2 + \bar{E}_2\cdot\vec{MA_2} + \bar{E}_3\vec{MA_3}^2 \qquad \text{ἢ}$$

$$\bar{E}\cdot\mathcal{P}_O(M) + \bar{E}_1\vec{MA_1}^2 + \bar{E}_2\vec{MA_2}^2 + \bar{E}_3\cdot\vec{MA_3}^2 = 0$$

Ἐὰν $M\equiv O$, τότε

$$\vec{OM}^2 + R^2 = \frac{1}{E}\left[(\overline{A_2A_3}O)\vec{PA_1}^2 + (\overline{A_3A_1}O)\vec{PA_2}^2 + (\overline{A_1A_2}O)\vec{PA_3}^2\right]$$

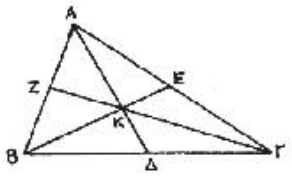
Ἐκ τοῦ τύπου (6) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλας σχέσεις ἀναλόγως τῆς τοποθετήσεως τῶν σημείων P, M.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

870. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ Κ τό κέντρον βάρους αὐτοῦ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=0$. Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις:



Ὡς γνωστόν $2\vec{K\Delta}=\vec{AK}=-\vec{KA}$ (1). Ἀλλά $\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=2\vec{K\Delta}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow \vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=0$ (3).

Ἀντιστρόφως:

Ὑποθέσωμεν ὅτι διά τό σημεῖον Κ' εἶναι $\vec{K'A}+\vec{K'B}+\vec{K'\Gamma}=0$. Θά δείξωμεν ὅτι $K\equiv K'$.

Ἐάν Ο τυχόν σημεῖον, ἔχομεν $\vec{KA}=\vec{OA}-\vec{OK}$, $\vec{KB}=\vec{OB}-\vec{OK}$, $\vec{K\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OK}$ (4).

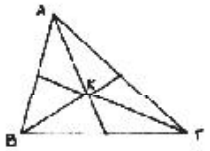
(3),(4) $\Longrightarrow 3\vec{OK}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$ (5).

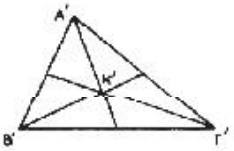
Ὁμοίως $3\vec{OK'}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$ (6).

(5),(6) $\Longrightarrow K\equiv K'$.

871. Ἐάν Κ καί Κ' τά κέντρα βάρους δύο τριγώνων ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' νά δειχθῇ ὅτι εἶναι $3\vec{KK'}=\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}$.

Ἀπόδειξις:





Διά τήν κλειστήν πολυγωνικήν γραμμήν ΑΚΚ'Α' εἶναι $\vec{KK'}=\vec{KA}+\vec{AA'}+\vec{AK'}$ (1)

Ὁμοίως ἔχομεν τάς ἐκφράσεις $\vec{KK'}=\vec{KB}+\vec{BB'}+\vec{B'K'}$ (2), $\vec{KK'}=\vec{K\Gamma}+\vec{\Gamma\Gamma'}+\vec{\Gamma'K'}$ (3).

(1),(2),(3) $\Longrightarrow 3\vec{KK'}=\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}+\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}+\vec{A'K'}+\vec{B'K'}+\vec{\Gamma'K'}$.

Ἐκ τῆς ἀσκήσεως 870 γνωρίζομεν ὅτι $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=0$ καί $\vec{A'K'}+\vec{B'K'}+\vec{\Gamma'K'}=0$. Ὅθεν $3\vec{KK'}=\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}$.

872. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Διά κάθε σημεῖον Μ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ἰσχύει ἡ ἐκφρασις $\overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{AB}=0$.

Ἀπόδειξις:

α. Εἶναι $\overline{MA}=\overline{M\Gamma}+\overline{\Gamma A}$, $\overline{MB}=\overline{M\Gamma}+\overline{\Gamma B}$. Πολλαπλασιάζομεν τάς ἐκφράσεις ἐπί $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$ ἀντιστοίχως καί προσθέτομεν κατά μέλη.

$\overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}=\overline{B\Gamma}\cdot\overline{M\Gamma}+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Gamma A}$ ἤ $\overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot(\overline{A\Gamma}+\overline{\Gamma B})=0 \Longrightarrow \overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{AB}=0$.

Παρατήρησις:

Διά προβλήματα τῆς ἰδίας μορφῆς ἐφαρμόσαμεν ἀκόμη τάς ἑξῆς μεθόδους.

β. Ἀναφέρομεν τὰ σημεῖα εἰς ἕνα σύστημα συντεταγμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας. Συνήθως τὴν ἀρχὴν Ο τοποθετοῦμεν ὥστε νὰ ταυτίζεται μὲ ἕν ἐκ τῶν σημείων τοῦ προβλήματος, δι' ἀπλουστεύσιν τῶν πράξεων. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐνταῦθα ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς ταυτίζεται πρὸς τὸ σημεῖον Μ. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Α,Β,Γ εἶναι x_A, x_B, x_Γ ἀντιστοίχως ὅτε $\overline{MA} = x_A$, $\overline{MB} = x_B$, $\overline{M\Gamma} = x_\Gamma$, $\overline{B\Gamma} = x_\Gamma - x_B$, $\overline{\Gamma A} = x_A - x_\Gamma$, $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ζητουμένης ἐκθέσεως θὰ γίνῃ $x_A(x_\Gamma - x_B) + x_B(x_A - x_\Gamma) + x_\Gamma(x_B - x_A)$. Ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων μᾶς δίδει τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

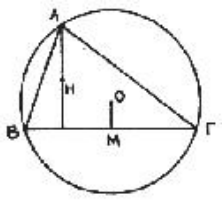
γ. Ἀναφέρομεν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Μ εἰς σύστημα συντεταγμένων ἀρχῆς Ο. Θέτομεν $f(x)$ τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης πρὸν ἀπόδειξιν ἐκθέσεως. Θὰ ἔχωμεν $f(x) = (x_A - x)(x_\Gamma - x_B) + (x_B - x)(x_A - x_\Gamma) + (x_\Gamma - x)(x_B - x_A)$.

Διαπιστώνομεν ὅμως εὐκόλως ὅτι $f(x_A) = 0$, $f(x_B) = 0$, $f(x_\Gamma) = 0$.

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ. Δεδομένου δὲ ὅτι μηδενίζεται διὰ τρεῖς τιμὰς τοῦ x, ἕπεται ὅτι εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

873. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:



Ἔχομεν γνωστὸν $\overrightarrow{AH} = 2\cdot\overrightarrow{OM}$ (1). Εἶναι ὅμως $2\cdot\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$ (3). Ἀλλὰ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$ (4).

(3),(4) $\Rightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$.

874. Ἔστω τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Μ ἐπ' εὐθείας xx'. Νὰ δειχθῇ ὅτι $f(M) = \overline{MA}^2\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{MB}^2\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{M\Gamma}^2\cdot\overline{AB} + \overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB} = 0$.

Ἀπόδειξις:

Ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῆς ἀσκήσεως 872 γ.

Ἔστω Ο ἡ ἀρχὴ ἑνὸς συστήματος συντεταγμένων ἐπὶ τῆς xx'. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $f(A) = f(B) = f(\Gamma) = 0$.

$f(A) = \overline{AB}^2\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{A\Gamma}^2\cdot\overline{AB} + \overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}\,(-\overline{AB} + \overline{A\Gamma} - \overline{B\Gamma}) = -\overline{AB}\cdot\overline{B\Gamma}\,(\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A}) = 0$.

Ὁμοίως $f(B) = f(\Gamma) = 0$.

875. Ἐπὶ ἄξονος xOx' δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Νὰ δειχθῇ α) Ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἓν μοναδικὸν σημεῖον Ι, τοιοῦτον ὥστε $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{I\Gamma}^3 = 3\,\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{I\Gamma}$ β) $\overline{IA}^3\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{IB}^3\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{I\Gamma}^3\cdot\overline{AB} = 0$ γ) Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος $\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{M\Gamma}^3 - 3\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot\overline{M\Gamma} = \frac{3}{2}\,\overline{MI}\cdot(\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma A}^2)$ δ) $\overline{MA}^3\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{MB}^3\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{M\Gamma}^3\cdot\overline{AB} + 3\,\overline{MI}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A} = 0$.

Ἀπόδειξις:

α) $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{I\Gamma}^3 = 3\cdot\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{I\Gamma} \Rightarrow (\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{I\Gamma} = 0) \vee (\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{I\Gamma})$. Ὑποτιθεμένου ὅτι $A \neq B \neq \Gamma$ ἀποκλείεται ἡ ἐκθέσις $\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{I\Gamma}$. Ἄρα ἰσχύει ἡ $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{I\Gamma} = 0$ (1).

Ἐὰν x_i παριστᾷ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου Ι θὰ ἔχωμεν: (1) $\Rightarrow x_I = \frac{x_A + x_B + x_\Gamma}{3}$.

Εἰς τὴν ἄσκησιν 870 ἀπεδείχθη ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον x_I εἶναι μοναδικόν.

β) Μεταφέρομεν τὴν ἀρχὴν εἰς Ι· ἡ (1) γίνεται $x_A + x_B + x_\Gamma = 0$ (2) καὶ

ἡ πρὸς ἀπόδειξιν σχέσις $x_A^3(x_\Gamma - x_B) + x_B^3(x_A - x_\Gamma) + x_\Gamma^3(x_B - x_A) = 0$ (3).

Ἐκ τῆς (2) δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν εὐκόλως τὴν (3) κατὰ διαφόρους τρόπους[1], ἀντικαθιστῶμεν π.χ. τὸ x_A συναρτήσει τῶν x_B, x_Γ κ.τ.λ.

γ) Ἐκ τῆς ταυτότητος τοῦ Euler, εἶναι γνωστὸν ὅτι $\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{M\Gamma}^3 - 3\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot\overline{M\Gamma} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{M\Gamma})\cdot\left[(\overline{MA} - \overline{MB})^2 + (\overline{MB} - \overline{M\Gamma})^2 + (\overline{M\Gamma} - \overline{MA})^2\right]$ (4).

Ἀλλὰ $\overline{MA} = \overline{MI} + \overline{IA}$, $\overline{MB} = \overline{MI} + \overline{IB}$, $\overline{M\Gamma} = \overline{MI} + \overline{I\Gamma}$ ἢ $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{M\Gamma} = 3\overline{MI}$ διότι $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{I\Gamma} = 0$. Ἀκόμη $\overline{MA}\cdot\overline{MB} = -\overline{AB}$, $\overline{MB}\cdot\overline{M\Gamma} = -\overline{B\Gamma}$, $\overline{M\Gamma}\cdot\overline{MA} = -\overline{\Gamma A}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (4) καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

δ) Μεταφέρομεν τὴν ἀρχὴν εἰς Μ καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν γνωστὴν ἀλγεβρικὴν ταυτότητα $\alpha^3(\beta-\gamma) + \beta^3(\gamma-\alpha) + \gamma^3(\alpha-\beta) = -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ μὲ $\alpha = x_A$, $\beta = x_B$, $\gamma = x_\Gamma$ κ.τ.λ.

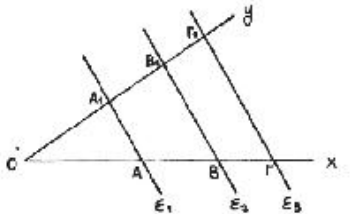
Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν λύσιν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀσκήσεως Β72 γ. ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν τὴν παράστασιν $f(M)$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $f(A) = f(B) = f(\Gamma) = 0$.

Ἀκόμη βάσει τοῦ ζητήματος β) τῆς ἰδίας ἀσκήσεως ἔχομεν $f(I) = 0$

Ἐὰν χ ἡ τετμημένη τοῦ Μ ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι τρίτου βαθμοῦ πρὸς χ. Ἀλλὰ μηδενίζεται διὰ περισσοτέρας τιμὰς τοῦ βαθμοῦ της, ἄρα εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

876. Τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ τέμνουν τὰς πλευρὰς γωνίας xOy εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\overline{AA_1}\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{BB_1}\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{\Gamma\Gamma_1}\cdot\overline{AB} = 0$.



Ἀπόδειξις:

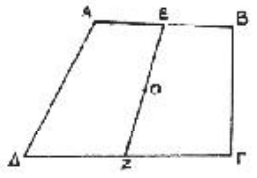
Θέτομεν Κ τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρὸς ἀπόδειξιν σχέσεως.

$A\hat{O}A_1 \sim B\hat{O}B_1 \Rightarrow \frac{\overline{BB_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{BB_1} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AA_1}$ (1).

$A\hat{O}A_1 \sim \Gamma\hat{O}\Gamma_1 \Rightarrow \frac{\overline{\Gamma\Gamma_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{O\Gamma}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{\Gamma\Gamma_1} = \frac{\overline{O\Gamma}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AA_1}$ (2).

Θέτομεν τὰς (1),(2) εἰς τὴν σχέσιν Κ. Θὰ ἔχωμεν $K = \overline{AA_1}\cdot\overline{B\Gamma} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AA_1}\cdot\overline{\Gamma A} + \frac{\overline{O\Gamma}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AA_1}\cdot\overline{AB} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}}\cdot(\overline{OA}\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{OB}\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{O\Gamma}\cdot\overline{AB})$. Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν (ἄσκ. Β72) ὅτι $\overline{OA}\cdot\overline{B\Gamma} + \overline{OB}\cdot\overline{\Gamma A} + \overline{O\Gamma}\cdot\overline{AB} = 0$.

877. Εἰς πᾶν τετράπλευρον νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Ἀπόδειξις:

Ἔστω Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΔΓ. Ἐὰν Ο τὸ μέσον τῆς ΕΖ θὰ ἔχωμεν $\overrightarrow{OZ} = -\overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = 0$.

Ἐὰν Ο' τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν δύο ἄλ-

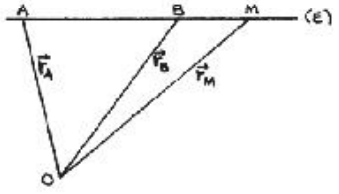
---

(1) Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\alpha^3(\beta-\gamma) + \beta^3(\gamma-\alpha) + \gamma^3(\alpha-\beta) = -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$, $\alpha,\beta,\gamma \in \Pi$.

λων πλευρῶν (ἢ τά μέσα τῶν διαγωνίων) θά εἶναι $\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'\Gamma}+\overrightarrow{O'\Delta}=0$ ἤτοι $O\equiv O'$.

878. Ἐπί εὐθείας (ε) δίδονται τά σημεῖα Α καί Β. Ἔστω Ο τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Ἐάν Μ∈(ε) καί $\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$ νά δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{OM}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{OA}+\mu\cdot\overrightarrow{OB}}{\nu+\mu}$.

Ἀπόδειξις:



α) Θέτομεν $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_A$, $\overrightarrow{OB}=\vec{r}_B$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}_M$. Τά $\vec{r}_A,\vec{r}_B,\vec{r}_M$ ὀνομάζομεν διανύσματα θέσεως τῶν Α,Β,Μ ἀντιστοίχως. Εἶναι $\vec{r}_M=\vec{r}_A+\overrightarrow{AM}$ (1). Ἀλλά $\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu}\Longrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{\mu}{\mu+\nu}\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{\mu}{\mu+\nu}\overrightarrow{AB}=\frac{\mu}{\mu+\nu}(\vec{r}_B-\vec{r}_A)$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow\vec{r}_M=\vec{r}_A+\frac{\mu}{\mu+\nu}(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\frac{\nu\cdot\vec{r}_A+\mu\cdot\vec{r}_B}{\mu+\nu}$ (3).

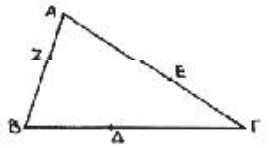
Θέτομεν $\frac{\nu}{\nu+\mu}=x$, $\frac{\mu}{\nu+\mu}=y$. Θά ἔχωμεν $\vec{r}_M=x\cdot\vec{r}_A+y\cdot\vec{r}_B$ μέ $x+y=1$ (4).

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{y}{x}=\frac{\mu}{\nu}=\frac{AM}{MB}$ (5). Ἐκ τῶν (4),(5) διαπιστώνομεν ὅτι ἀποκλείεται $x,y<0$. Ἐάν λοιπόν $\frac{y}{x}>0$, ἤτοι Μ∈ΑΒ θά εἶναι καί $x>0$, $y>0$. Καί ἀντιστρόφως. Ὅθεν ὅλα τά σημεῖα Μ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ δίδονται ἀπό τήν σχέσιν $\vec{r}_M=x\cdot\vec{r}_A+y\cdot\vec{r}_B$ μέ $(x+y=1)\wedge(x,y>0)$. Καί ἀντιστρόφως. Τά σημεῖα τῆς (ε) τά κείμενα ἐκτός τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ δίδονται ἀπό τήν σχέσιν $\vec{r}_M=x\cdot\vec{r}_A+y\cdot\vec{r}_B$, $(x+y=1)\wedge(x\cdot y<0)$.

β) Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τήν θεωρίαν περί κέντρου βάρους διά τό σύστημα $(A,B)/(\nu,\mu)$ τό πρόβλημα εἶναι προφανές. Τό κέντρον βάρους Μ τοῦ συστήματος δίδεται, ὡς γνωστόν, ἀπό τήν σχέσιν $\overrightarrow{OM}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{OA}+\mu\cdot\overrightarrow{OB}}{\nu+\mu}$ καί πληροῖ ἀκόμα τήν $\nu\cdot\overrightarrow{MA}+\mu\cdot\overrightarrow{MB}=0\Longrightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$.

879. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ ὥστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\Gamma E}{EA}=\frac{AZ}{ZB}=\frac{\mu}{\nu}$. Νά δειχθῇ α) τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουν τό αὐτό κέντρον βάρους β) δυνάμεθα μέ πλευράς ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ νά κατασκευάσωμεν τρίγωνον.

Ἀπόδειξις:



α) Ἔστω Κ τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Θά ἔχωμεν ὡς γνωστόν $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Gamma}=0$ (1).

Ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἔχομεν $\overrightarrow{K\Delta}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{KB}+\mu\cdot\overrightarrow{K\Gamma}}{\nu+\mu}$, $\overrightarrow{KE}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{K\Gamma}+\mu\cdot\overrightarrow{KA}}{\nu+\mu}$, $\overrightarrow{KZ}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{KA}+\mu\cdot\overrightarrow{KB}}{\nu+\mu}$ (2).

(1),(2) $\Longrightarrow\overrightarrow{K\Delta}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KZ}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Gamma}=0$.

β) $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{\nu+\mu}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\mu\cdot\overrightarrow{BA}}{\nu+\mu}$, $\overrightarrow{\Gamma Z}=\frac{\nu\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\mu\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{\nu+\mu}$. Διά προσθέσεως ἔχομεν $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=0$. Ἤτοι τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι παράλληλα καί ἴσα πρός τάς πλευράς ἑνός τριγώνου.

880. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ'. Ἐπί τῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' λαμβάνομεν τά σημεῖα A_1,B_1,Γ_1 ὥστε $\frac{AA_1}{A_1A'}=\frac{BB_1}{B_1B'}=\frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1\Gamma'}=\kappa$. Ἐάν G,G',$G_1$ τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ', $A_1B_1\Gamma_1$ ἀντιστοίχως νά δειχθῇ ὅτι $\frac{GG_1}{G_1G'}=\kappa$.

Ἀπόδειξις:

Ἔχομεν ὡς γνωστόν $3\cdot\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma_1}$ (1) καί $3\cdot\overrightarrow{G_1G'}=\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{B_1B'}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma'}$ (2). Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν ὑπόθεσιν ἡ (1) γίνεται $3\cdot\overrightarrow{GG_1}=\kappa(\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{B_1B'}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma'})$ (3).

(2),(3) $\Longrightarrow\frac{GG_1}{G_1G'}=\kappa$.

Γενικεύσατε διά δύο ν-γωνα.

881. Τό κέντρον βάρους κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\cdots A_\nu$ ταυτίζεται πρός τό κέντρον του Ο.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω A_i, A_{i+1} δύο διαδοχικαί κορυφαί τοῦ πολυγώνου καί OB_i ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπό τήν πλευράν A_iA_{i+1}. Εἶναι προφανῶς $\vec{OA_i}+\vec{OA_{i+1}}=2\cdot\vec{OB_i}$ (1).

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{OA_i}=\sum_{i=1}^{\nu}\vec{OB_i}$.

Ὡς γνωστόν εἶναι $\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\vec{A_3A_4}+\cdots+\vec{A_\nu A_1}=0$ (2).

Ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας ὅτι $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_\nu A_1=\kappa\cdot R$ ($\kappa\in\Pi$) μία στροφή τοῦ πολυγώνου κατά 90° θά δώσῃ $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{OB_i}=0$, ἤτοι $\sum_{i=1}^{\nu}\vec{OA_i}=0$.

ΟΜΑΣ Β'.

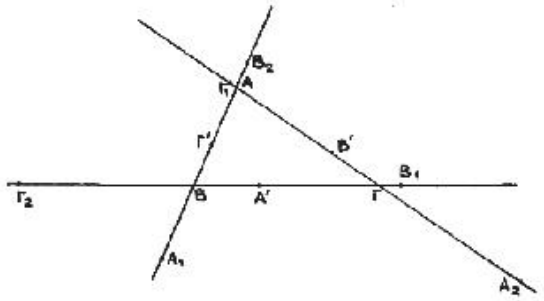
882. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἐπί τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τά σημεῖα Α', Β', Γ'. Λαμβάνομεν τά σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 καί A_2, B_2, Γ_2 ὥστε $\frac{\vec{\Gamma'A_1}}{\vec{\Gamma'A}}=\frac{\vec{B'A_2}}{\vec{B'A}}=\frac{\vec{A'B_1}}{\vec{A'B}}=\frac{\vec{\Gamma'B_2}}{\vec{\Gamma'B}}=\frac{\vec{B'\Gamma_1}}{\vec{B'\Gamma}}=\frac{\vec{A'\Gamma_2}}{\vec{A'\Gamma}}=\kappa$. Νά δειχθῇ ὅτι τά τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἔχουν τό αὐτό κέντρον βάρους.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω G_1 καί G_2 τά κέντρα βάρους τῶν $\hat{A_1B_1\Gamma_1}$ καί $\hat{A_2B_2\Gamma_2}$ ἀντιστοίχως. Ὡς γνωστόν εἶναι

$\vec{G_1A_1}+\vec{G_1B_1}+\vec{G_1\Gamma_1}=0$ (1) καί

$\vec{G_2A_2}+\vec{G_2B_2}+\vec{G_2\Gamma_2}=0$ (2).



(3).

Ἀλλά $\vec{G_1A_1}=\vec{G_1\Gamma'}+\vec{\Gamma'A_1}=\vec{G_1\Gamma'}+\kappa\cdot\vec{\Gamma'A}$

$\vec{G_1B_1}=\vec{G_1A'}+\vec{A'B_1}=\vec{G_1A'}+\kappa\cdot\vec{A'B}$

$\vec{G_1\Gamma_1}=\vec{G_1B'}+\vec{B'\Gamma_1}=\vec{G_1B'}+\kappa\cdot\vec{B'\Gamma}$

$\vec{G_2A_2}=\vec{G_2B'}+\vec{B'A_2}=\vec{G_2B'}+\kappa\cdot\vec{B'A}$

$\vec{G_2B_2}=\vec{G_2\Gamma'}+\vec{\Gamma'B_2}=\vec{G_2\Gamma'}+\kappa\cdot\vec{\Gamma'B}$

$\vec{G_2\Gamma_2}=\vec{G_2A'}+\vec{A'\Gamma_2}=\vec{G_2A'}+\kappa\cdot\vec{A'\Gamma}$

Λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν (3) αἱ (1) καί (2), γίνονται

$$\vec{G_1A'}+\vec{G_1B'}+\vec{G_1\Gamma'}+\kappa(\vec{A'B}+\vec{B'\Gamma}+\vec{\Gamma'A})=0 \quad (4)$$

$$\vec{G_2A'}+\vec{G_2B'}+\vec{G_2\Gamma'}+\kappa(\vec{A'\Gamma}+\vec{B'A}+\vec{\Gamma'B})=0 \quad (5).$$

Ἐκ τῆς $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=0 \Rightarrow \vec{A'B}+\vec{\Gamma'A}+\vec{B'\Gamma}=\vec{A'\Gamma}+\vec{B'A}+\vec{\Gamma'B}$ (6).

(4), (5), (6) $\Rightarrow \vec{G_1A'}+\vec{G_1B'}+\vec{G_1\Gamma'}=\vec{G_2A'}+\vec{G_2B'}+\vec{G_2\Gamma'} \Rightarrow G_1\equiv G_2$.

883. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν n σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ καί n-1 σημεῖα $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1A_2}}\cdot\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{A_1A_3}}\cdots\frac{\overline{A_1P_{n-1}}}{\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_2A_1}}\cdot\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{A_2A_3}}\cdots\frac{\overline{A_2P_{n-1}}}{\overline{A_2A_n}}+\cdots+\frac{\overline{A_nP_1}}{\overline{A_nA_1}}\cdot\frac{\overline{A_nP_2}}{\overline{A_nA_2}}\cdots\frac{\overline{A_nP_{n-1}}}{\overline{A_nA_{n-1}}}=1$ (1).

Ἀπόδειξις:

Ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής διά $n=2$, $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1A_2}}+\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_2A_1}}=1$.

Θά ἐφαρμόσωμεν τήν μέθοδον τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Ὑποθέτομεν τήν πρός ἀπόδειξιν ἐκείνην ἀληθῆ διά $n=\kappa-1$. Θά δείξωμεν αὐτήν διά $n=\kappa$.

Ἀληθὴς διὰ $κ-1$ σημεῖα $A_2, A_3, \dots, A_κ$ (2).

Ἀληθὴς διὰ $κ-2$ σημεῖα $P_3, P_4, \dots, P_{κ-1}$

Ἀναφέρομεν τὰ σημεῖα εἰς ἓν σύστημα συντεταγμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀρχῆς O καὶ ἔστω $\overline{OP_1}=x$, $\overline{OA_i}=a_i$. Ἡ πρὸς ἀπόδειξιν σχέσις γίνεται

$$\frac{(x-a_2)\overline{A_1P_2}\cdot\overline{A_1P_3}\cdots\overline{A_1P_{κ-1}}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_κ}}+\frac{(x-a_3)\overline{A_2P_3}\cdots\overline{A_2P_{κ-1}}}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_κ}}+\dots+\frac{(x-a_κ)\overline{A_κP_2}\cdots\overline{A_κP_{κ-1}}}{\overline{A_κA_1}\cdot\overline{A_κA_2}\cdots\overline{A_κA_{κ-1}}}=1 \quad (3).$$

Ἡ (3) εἶναι πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ πρὸς x. Διὰ $x=a_1, a_2, \dots, a_κ$ ἰσχύει διότι λαμβάνομεν τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἐπαγωγῆς (ἂν θέσωμεν ὅπου $x=a_1$ τὸ πρῶτον κλάσμα μηδενίζεται, τὰ ὑπόλοιπα μὲ μίαν ἁπλοποίησιν εἰς ἕκαστον λαμβάνουν τὴν μορφὴν τῆς παραστάσεως διὰ τὰ σημεῖα (2)). Ἡ σχέσις (3) εἶναι συνεπῶς ταυτότης καὶ τὸ πρόβλημα ἀπεδείχθη.

Παρατηρήσεις:

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ $\overline{A_1P_{n-1}}$. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\overline{A_1P_1}\cdot\overline{A_1P_2}\cdots\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P_1}\cdot\overline{A_2P_2}\cdots\overline{A_2P_{n-2}}}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_n}}+\dots+\frac{\overline{A_nP_1}\cdot\overline{A_nP_2}\cdots\overline{A_nP_{n-2}}}{\overline{A_nA_1}\cdot\overline{A_nA_2}\cdots\overline{A_nA_{n-1}}}=\frac{1}{\overline{A_1P_{n-1}}}.$$

Ἔστω τώρα $P_{n-1}\longrightarrow\infty$. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\overline{A_1P_1}\cdot\overline{A_1P_2}\cdots\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P_1}\cdot\overline{A_2P_2}\cdots\overline{A_2P_{n-2}}}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_n}}+\dots+\frac{\overline{A_nP_1}\cdot\overline{A_nP_2}\cdots\overline{A_nP_{n-2}}}{\overline{A_nA_1}\cdot\overline{A_nA_2}\cdots\overline{A_nA_{n-1}}}=0 \quad (4).$$

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκεται

$$\frac{\overline{A_1P_1}\cdot\overline{A_1P_2}\cdots\overline{A_1P_μ}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P_1}\cdot\overline{A_2P_2}\cdots\overline{A_2P_μ}}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_n}}+\dots+\frac{\overline{A_nP_1}\cdot\overline{A_nP_2}\cdots\overline{A_nP_μ}}{\overline{A_nA_1}\cdot\overline{A_nA_2}\cdots\overline{A_nA_{n-1}}}=0 \quad (5)$$

διὰ $μ<n-2$

Συνοψίζομεν.

Ἡ παράστασις

$$K=\frac{\overline{A_1P_1}\cdot\overline{A_1P_2}\cdots\overline{A_1P_ν}}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P_1}\cdot\overline{A_2P_2}\cdots\overline{A_2P_ν}}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_n}}+\dots+\frac{\overline{A_nP_1}\cdot\overline{A_nP_2}\cdots\overline{A_nP_ν}}{\overline{A_nA_1}\cdot\overline{A_nA_2}\cdots\overline{A_nA_{n-1}}} \quad (6)$$

εἶναι μονὰς διὰ $ν=n-1$, μηδὲν διὰ $ν<n-1$.

Θέτομεν $P_1=P_2=\dots=P_ν=P$ ὅτε

$$K=\frac{\overline{A_1P}^ν}{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdots\overline{A_1A_n}}+\frac{\overline{A_2P}^ν}{\overline{A_2A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_2A_n}}+\dots+\frac{\overline{A_nP}^ν}{\overline{A_nA_1}\cdot\overline{A_nA_2}\cdots\overline{A_nA_{n-1}}} \quad (7)$$

Τὸ αὐτό, $K=1$ ἢ 0 καθόσον $ν=n-1$ ἢ $ν<n-1$.

Ἐκ τῶν σχέσεων (6), (7) ὁδηγούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς ἀλγεβρικὰς ταυτότητας.

Ἔστω a_i ἡ τετμημένη τοῦ A_i καὶ x_i ἡ τετμημένη τοῦ P_i. Ἐκ τῆς (6) ἔχομεν

$$K=\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_1)\cdots(x_ν-a_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)}+\frac{(x_1-a_2)(x_2-a_2)\cdots(x_ν-a_2)}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)}+\dots+\frac{(x_1-a_n)(x_2-a_n)\cdots(x_ν-a_n)}{(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)}$$

ἢ διὰ $x_1=x_2=\dots=x_ν=x$

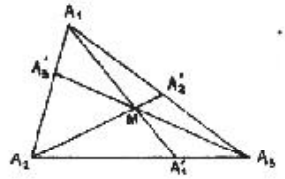
$$K=\frac{(x-a_1)^ν}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)}+\frac{(x-a_2)^ν}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)}+\dots+\frac{(x-a_n)^ν}{(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)}$$

μὲ $K=1$ ἢ 0 διὰ $ν=n-1$ καὶ $ν<n-1$ ἀντιστοίχως.

884. Ἔστω τρίγωνον $A_1A_2A_3$. Ἐὰν O ἡ ἀρχὴ ἑνὸς συστήματος ἀναφορᾶς καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι $\overrightarrow{OM}=\frac{λ_1\overrightarrow{OA_1}+λ_2\overrightarrow{OA_2}+λ_3\overrightarrow{OA_3}}{λ_1+λ_2+λ_3}$ ὅπου $\frac{λ_1}{E_1}=\frac{λ_2}{E_2}=\frac{λ_3}{E_3}$. E_1, E_2, E_3 τὰ προσανατολισμένα ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων A_2A_3M, A_3A_1M, A_1A_2M.

Ἀπόδειξις:

α) Θέτομεν $\frac{\overline{A_2A_3'}}{\overline{A_3'A_2}}=\frac{μ_2}{μ_3}$ καὶ $\frac{\overline{A_1M}}{\overline{MA_3'}}=\frac{μ'}{ν}$ (1).



Ἐκ τῆς ἀσκ. 878 ἔχομεν $\overrightarrow{OA_3'}=\frac{μ_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+μ_3\cdot\overrightarrow{OA_3}}{μ_2+μ_3}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{μ'\cdot\overrightarrow{OA_3'}+ν_1\overrightarrow{OA_1}}{μ'+ν_1}$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων $\overrightarrow{OM}=\frac{μ'\cdot\frac{μ_2\overrightarrow{OA_2}+μ_3\overrightarrow{OA_3}}{μ_2+μ_3}+ν_1\cdot\overrightarrow{OA_1}}{μ'+ν_1}\Longrightarrow\overrightarrow{OM}=$

$=\frac{ν_1(μ_2+μ_3)\overrightarrow{OA_1}+μ'μ_2\overrightarrow{OA_2}+μ'μ_3\cdot\overrightarrow{OA_3}}{(μ'+ν_1)(μ_2+μ_3)}$ (2).

Θέτομεν $ν_1(μ_2+μ_3)=λ_1$, $μ'μ_2=λ_2$, $μ'μ_3=λ_3$ (3)

Ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰς σχέσεις (3) θὰ ἔχωμεν $ν_1(μ_2+μ_3)+μ'μ_2+μ'μ_3=(μ'+ν_1)(μ_2+μ_3)=$

$=λ_1+λ_2+λ_3$. Ἄρα ὁ τύπος (2) γίνεται $\overrightarrow{OM}=\frac{λ_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+λ_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+λ_3\cdot\overrightarrow{OA_3}}{λ_1+λ_2+λ_3}$ (4).

Ἐκ τῆς ἀσκ. 600 εἶναι γνωστόν ὅτι $\frac{\mu_3}{\mu_2}=\frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2}$ καί $\frac{\nu_1}{\mu'}=\frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}_1}$. Ἐκ τῶν ἐκφέρων (3) εὑρίσκομεν $\frac{\mu_3}{\mu_2}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$, $\frac{\nu_1}{\mu'}=\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}$ ὁπότε $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}=\frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2}$ ∧ $\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1}=\frac{\bar{E}_2+\bar{E}_3}{\bar{E}_1}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\bar{E}_1}=\frac{\lambda_2}{\bar{E}_2}=\frac{\lambda_3}{\bar{E}_3}$.

Ὁ τύπος (4) παρατηροῦμεν ὅτι δύναται νά γραφῇ $\bar{E}\cdot\overrightarrow{OM}=\bar{E}_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+\bar{E}_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+\bar{E}_3\cdot\overrightarrow{OA_3}$ (5). Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν δέ τήν ἄσκ. 600 ἔχομεν καί τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

$$\frac{\overrightarrow{A_2A_1}}{\overrightarrow{A_1A_3}}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\ \frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\ \frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_2A_3}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\qquad(6).$$
$$\frac{\overrightarrow{A_1M}}{\overrightarrow{MA_1'}}=\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1},\ \frac{\overrightarrow{A_2M}}{\overrightarrow{MA_2'}}=\frac{\lambda_3+\lambda_1}{\lambda_2},\ \frac{\overrightarrow{A_3M}}{\overrightarrow{MA_3'}}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3}$$

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $\hat{A_1A_2A_3}$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν $\overrightarrow{OM}=q_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+q_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+q_3\cdot\overrightarrow{OA_3}$ μέ $q_1+q_2+q_3=1$.

Τά σημεῖα δέ M τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ τριγώνου τίθενται ὑπό τήν μορφήν $\overrightarrow{OM}=q_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+q_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+q_3\cdot\overrightarrow{OA_3}$ μέ $q_1+q_2+q_3=1$ καί $q_1,q_2,q_3>0$.

β) Δυνάμεθα εἰς τήν ἀπόδειξιν νά φθάσωμεν συντόμως ἄν χρησιμοποιήσωμεν τήν ἐκτικήν θεωρίαν περί τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τό σύστημα A/Λ ὅπου $A=\{A_1,A_2,A_3\}$ καί $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ μέ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq 0$. Ἐάν M τό κέντρον βάρους θά εἶναι, ὡς γνωστόν, διά τό τυχόν σημεῖον O $\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{OA_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$.

Ἡ τελευταία ἐκφέρα γράφεται ἀκόμη $\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda_1\cdot\overrightarrow{OA_1}}{\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_3)}+\frac{(\lambda_2+\lambda_3)\left(\frac{\lambda_2\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\overrightarrow{OA_3}}{\lambda_2+\lambda_3}\right)}{\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_3)}$, ὅθεν $\overrightarrow{OA_1'}=\frac{\lambda_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{OA_3}}{\lambda_2+\lambda_3}$ (τ).

Ἐκ τῆς (τ) $\Rightarrow\frac{\overrightarrow{A_2A_1'}}{\overrightarrow{A_1A_3}}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$, κ.τ.λ.

885. Νά λυθῇ ἡ ἄσκησις 625 τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (5) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Λύσις:

Θεωροῦμεν τήν ἀρχήν τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς O ἐπί τῆς εὐθείας (ε). Ἐάν προβληθῇ τό τρίγωνον καί τό σημεῖον M ἐπί εὐθείαν (η) κάθετον ἐπί τήν (ε) ὁ τύπος (5) τῆς ἀσκήσεως 884 ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύῃ ἄν ἀντί τῶν $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3}$ τεθοῦν αἱ προβολαί αὐτῶν ἐπί τήν (η). Ἤτοι τά τμήματα μ,μ_1,μ_2,μ_3.

886. Ἔστω $A_1A_2A_3A_4$ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον εἰς κύκλον (O,R) καί P τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Νά δειχθῇ ὅτι $\overline{PA_1}^2\cdot(A_2A_3A_4)+\overline{PA_3}^2\cdot(A_4A_1A_2)=\overline{PA_2}^2\cdot(A_3A_4A_1)+\overline{PA_4}^2\cdot(A_1A_2A_3)$

Ἀπόδειξις:

Εἰς τόν τύπον (6), τῆς 7.9.11, θέτομεν $M=A_4$. Θά γίνῃ $\overrightarrow{A_4A_1}^2\cdot(\overrightarrow{A_2A_3A_4})+\overrightarrow{A_4A_2}^2\cdot(\overrightarrow{A_3A_1A_4})+\overrightarrow{A_4A_3}^2\cdot(\overrightarrow{A_1A_2A_4})=(A_1A_2A_3)\cdot\overrightarrow{PA_4}^2+\overrightarrow{PA_1}^2\cdot(\overrightarrow{A_2A_3A_4})+\overrightarrow{PA_2}^2(\overrightarrow{A_3A_1A_4})+\overrightarrow{PA_3}^2\cdot(\overrightarrow{A_1A_2A_4})$ (1)

Τό πρῶτον μέλος τῆς ἐκφέρας (1) εἶναι μηδέν, διότι ἄν θέσωμεν εἰς τήν (1) $P=O$ τό δεύτερον μέλος γίνεται $R^2\left[(\overrightarrow{A_1A_2A_3})+(\overrightarrow{A_2A_3A_4})+(\overrightarrow{A_3A_1A_4})+(\overrightarrow{A_1A_2A_4})\right]=0$.

Ἄρα διά τυχόν σημεῖον P ἔχομεν $\overrightarrow{PA_1}^2\cdot(A_2A_3A_4)+\overrightarrow{PA_3}^2\cdot(A_4A_1A_2)=\overrightarrow{PA_2}^2(A_3A_4A_1)+\overrightarrow{PA_4}^2(A_1A_2A_3)$.

887. Διά τό σύστημα A/M νά δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{GA_i}^2=\frac{1}{m}\sum_{i>j}^{1,n}m_im_ja_{ij}^2$ (1) ὅπου $a_{ij}=a_{ji}=A_iA_j=A_jA_i$.

Ἀπόδειξις:

Χρησιμοποιοῦμεν τήν μαθηματικήν ἐπαγωγήν.

Διά $n=2$. Έχομεν $m_1\vec{GA}_1 + m_2\vec{GA}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\vec{GA}_1}{\vec{A_2G}} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{\vec{GA}_1}{\vec{A_2A_1}} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow \frac{\vec{GA}_1^2}{a_{12}^2} = \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \Rightarrow m_1\vec{GA}_1^2 = \frac{m_1m_2^2a_{12}^2}{(m_1+m_2)^2}$ (2).

Όμοίως $m_2\vec{GA}_2 = \frac{m_2m_1^2a_{12}^2}{(m_1+m_2)^2}$ (3).

(2), (3) $\Rightarrow m_1\vec{GA}_1^2 + m_2\vec{GA}_2^2 = \frac{m_1m_2a_{12}^2}{m_1+m_2}$ (4).

Ήτοι διά $n=2$ ὁ τύπος (4) ἰσχύει.

Ὑποθέτωμεν ὅτι οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ $n=\kappa$.

Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους τῶν σημείων $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_\kappa(m_\kappa)$ καὶ G' τὸ κέντρον βάρους τῶν σημείων $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_\kappa(m_\kappa), A_{\kappa+1}(m_{\kappa+1})$.

Διά τὰ δύο σημεῖα $G(m=m_1+m_2+\cdots+m_\kappa)$ καὶ $A_{\kappa+1}(m_{\kappa+1})$ ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὴν (4), $m\vec{GG'}^2 + m_{\kappa+1}\vec{GA}_{\kappa+1}^2 = \frac{mm_{\kappa+1}\vec{GA}_{\kappa+1}^2}{m+m_{\kappa+1}}$ (5).

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἐπαγωγῆς καὶ θέσει τοῦ τύπου τοῦ Leibnitz ἔχομεν $\sum_{i=1}^{\kappa} m_i\vec{PA}_i^2 = m\vec{PG}^2 + \frac{1}{m}\sum_{i<j}^{\kappa} m_im_ja_{ij}^2$ (6).

Θέτομεν $P=G'$ εἰς τὴν (6) καὶ ἔχομεν $\sum_{i=1}^{\kappa} m_i\vec{G'A}_i^2 = m\vec{G'G}^2 + \frac{1}{m}\sum_{i<j}^{\kappa} m_im_ja_{ij}^2$ (7).

Προσθέτομεν τὰς σχέσεις (5) καὶ (7)

$$\sum_{i=1}^{\kappa+1} m_i\vec{GA}_i^2 = \frac{mm_{\kappa+1}\vec{GA}_{\kappa+1}^2}{m+m_{\kappa+1}} + \frac{1}{m}\sum_{i<j}^{\kappa} m_im_ja_{ij}^2 \quad (8).$$

Θέτομεν εἰς τὴν (6) $P=A_{\kappa+1}$. Λύνομεν τὴν προκύπτουσαν σχέσιν πρὸς $\vec{GA}_{\kappa+1}^2$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (8). Μετὰ τὰς ἀπλοποιήσεις ἔχομεν $\sum_{i=1}^{\kappa+1} m_i\vec{G'A}_i^2 = \frac{1}{m+m_{\kappa+1}}\sum_{i<j}^{\kappa+1} m_im_ja_{ij}^2$ (9).

Παρατήρησις:

Ὁ τύπος τοῦ Leibnitz μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) γίνεται $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{PA}_i^2 = m\vec{PG}^2 + \frac{1}{m}\sum_{i<j}^{n} m_im_ja_{ij}^2$ (10). Ἐὰν τὸ σύστημα A/M κινεῖται περὶ τὸ G ὡς ἕνα στερεὸν σύστημα βλέπομεν ὅτι $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{PA}_i^2$ σταθερὸν διὰ κάθε P σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς δι' ἕνα κανονικὸν πολύγωνον;

Ἐφαρμογή:

Εἰς ἓν τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καὶ διὰ τὸ σημεῖον M ἀπὸ τὴν σχέσιν $\vec{OM} = \frac{\lambda_1\vec{OA}_1 + \lambda_2\vec{OA}_2 + \lambda_3\vec{OA}_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ θὰ ἔχωμεν $\lambda_1\vec{PA}_1^2 + \lambda_2\vec{PA}_2^2 + \lambda_3\vec{PA}_3^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{PM}^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2a_3^2 + \lambda_2\lambda_3a_1^2 + \lambda_3\lambda_1a_2^2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ ἢ ἀκόμη (δεδομένου ὅτι $\frac{\lambda_1}{E_1} = \frac{\lambda_2}{E_2} = \frac{\lambda_3}{E_3}$) $E_1\vec{PA}_1^2 + E_2\vec{PA}_2^2 + E_3\vec{PA}_3^2 = E\vec{PM}^2 + \frac{1}{E}(E_1E_2a_3^2 + E_2E_3a_1^2 + E_3E_1a_2^2)$. Ἐὰν $P=O$ (κέντρον περιγεγραμμένου κύκλου) $E\cdot R^2 = E\cdot\vec{OM}^2 + \frac{1}{E}(E_1E_2a_3^2 + E_2E_3a_1^2 + E_3E_1a_2^2)$ ἢ $E^2\vec{D}_O(M) + E_1E_2a_3^2 + E_2E_3a_1^2 + E_3E_1a_2^2 = 0$ (11).

Ἀνάλογα μὲ τὴν τοποθέτησιν τῶν σημείων P, M ἔχομεν μίαν σειρὰν τύπων, πολλῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν συνήθων μεθόδων εἶναι δυσχερής π.χ. ὁ (11). Μερικοὶ τύποι ἐξ αὐτῶν εἶναι γνωστοί, περιεχόμενοι εἰς τὰ διάφορα βιβλία γεωμετρίας, π.χ. διὰ $M=I$ (κέντρον ἐγγεγραμμένου κύκλου) ἔχομεν $a_1\vec{PA}_1^2 + a_2\vec{PA}_2^2 + a_3\vec{PA}_3^2 = (a_1+a_2+a_3)\vec{IP}^2 + a_1a_2a_3$, P τυχὸν σημεῖον. Ἐὰν $P=O$ $R^2(a_1+a_2+a_3) = (a_1+a_2+a_3)OI^2 + a_1a_2a_3 \Rightarrow 2\tau\cdot R^2 = 2\tau\cdot OI^2 + 4ER \Rightarrow 2\tau\cdot R^2 = 2\tau\cdot OI^2 + 4\tau\rho R \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2R\rho$ ὁ τύπος Euler κ.τ.λ.

888. Ἔστω F τυχὸν πολύεδρον καὶ $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ αἱ ἕδραι αὐτοῦ. Παριστάνομεν διὰ τοῦ $\vec{F}_i$ τὸ κάθετον διάνυσμα ἐπὶ τὴν ἕδραν F_i, τὸ κατευθυνόμενον πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ πολυέδρου καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντιστοίχου ἕδρας. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_\nu = 0$.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $\vec{F}_i = |\vec{F}_i| \cdot \vec{F}_{oi}$ ὅπου $\vec{F}_{oi}$ ἡ διανυσματική μονάς κατά τήν διεύθυνσιν τήν κάθετον πρός τήν F_i κατευθυνομένη ἐκτός τοῦ πολυέδρου.

Ἔστω $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_v = \vec{a} \neq 0$ (1). Θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον Π μή κάθετον ἐπί τό $\vec{a}$. Πολλαπλασιάζομεν ἐσωτερικῶς τήν (1) ἐπί τήν διανυσματικήν μονάδα $\vec{x}_o$ τῆς καθέτου διευθύνσεως τοῦ ἐπιπέδου $|\vec{F}_1| \cdot \vec{F}_{o1} \cdot \vec{x}_o + |\vec{F}_2| \vec{F}_{o2} \vec{x}_o + \cdots + |\vec{F}_v| \cdot \vec{F}_{ov} \cdot \vec{x}_o = \vec{a} \cdot \vec{x}_o \neq 0$ (2).

Προβάλλομεν τό πολύεδρον ἐπί τό ἐπίπεδον Π καί ἔστω ὅτι ἡ ἕδρα F_i προβάλλεται κατά τό πολύγωνον F_i' ἐμβαδοῦ $\bar{F}_i'$ (προσανατολισμένον ἐμβαδόν). Εἶναι προφανές ὅτι $\bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \cdots + \bar{F}_v' = 0$ (3).

Ὡς γνωστόν ὅμως $\bar{F}_i' = |\vec{F}_i| \cdot \vec{F}_{oi} \cdot \vec{x}_o$.

Αἱ (2),(3) ὁδηγοῦν εἰς ἄτοπον, ἄρα $\vec{a} = 0$.

Παρατήρησις:

Ἐκ τῆς $\sum_{i=1}^{v} \vec{F}_i = 0 \Longrightarrow |\vec{F}_i| \leqslant \sum_{k \neq i}^{v} |\vec{F}_k|$. Ἡ ἰσότης πότε ἰσχύει;

889. Θεωρήσωμεν τό σύστημα A/M καί (O,R) τυχοῦσα περιφέρεια (ἤ σφαῖρα). Νά δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{v} m_i \mathcal{D}_o(A_i) = m\mathcal{D}_o(G) + \sum_{i=1}^{v} m_i \vec{GA}_i^2 = m\mathcal{D}_o(G) + \frac{1}{m} \sum_{i<j}^{1,m} m_i m_j a_{ij}^2$.

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OA}_i^2 = m\vec{OG}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA}_i^2 = m\vec{OG}^2 + \frac{1}{m} \sum_{i<j}^{1,m} m_i m_j a_{ij}^2$ (1).

Εἶναι προφανές ὅτι $m_1 R^2 + m_2 R^2 + \cdots + m_m R^2 = m R^2$ (2).

Ἡ ἀφαίρεσις κατά μέλη τῶν (1),(2) μᾶς δίδει τό ζητούμενον.

Ἐφαρμογή διά τό τρίγωνον $A_1A_2A_3$ καί τυχόν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου του (ἴδε καί ἄσκ. 587).

Ἐπίσης διά τετράεδρον.

Τί παρατηροῦμεν ἐάν τό σύστημα A/M περιστροφῇ ὡς στερεόν σύστημα περί τό G;

Ἐφαρμόσατε τάς παρατηρήσεις σας εἰς κανονικόν πολύγωνον.

890. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράλληλος προβολή τοῦ συστήματος A/M ἐπί εὐθείας ἢ ἐπιπέδου διατηρεῖ τό κέντρον βάρους.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω A_i' ἡ προβολή τοῦ A_i καί G' ἡ προβολή τοῦ G. Τό σύστημα A/M προβάλλεται κατά τό A'/M. Διά τό σημεῖον G ἔχομεν $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA}_i = 0$ (1). Ἀλλά ὡς γνωστόν (7.9.1) καί $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{G'A}_i' = 0$ (2). Ἤτοι G' τό κέντρον βάρους τοῦ A'/M.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

891. Ἐπί εὐθείας (ε) δίδονται τρία σημεῖα O, A, B. Ἐάν M τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB τότε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$.

892. Ἐπὶ εὐθείας (ε) δίδονται τὰ σημεῖα A,B,Γ,Δ. Ἐὰν M,N,P,Σ τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $A\Gamma, B\Delta, A\Delta, B\Gamma$ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ

α) $\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Delta}+\overline{\Gamma B}=2\overline{MN}$

β) $\overline{AB}-\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Gamma}-\overline{B\Delta}=2\overline{P\Sigma}$.

893. Ἐὰν A,B εἶναι σημεῖα τοῦ ἄξονος $x'Ox$ μὲ τετμημένας ἀντιστοίχως -2 καὶ 5 νὰ ὁρισθῇ σημεῖον M τοῦ ἄξονος, ταιαῦταν ὥστε $\overline{MA}+6\overline{MB}=\overline{AB}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

894. Ἐὰν A,B,Γ,Δ σημεῖα μιᾶς εὐθείας (ε) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma\Delta}\cdot\overline{\Delta B}-\overline{\Gamma\Delta}\cdot\overline{\Delta A}\cdot\overline{A\Gamma}+\overline{\Delta A}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{B\Delta}-\overline{AB}\cdot\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}=0$.

895. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ε). Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς A,B,Γ εἰς τὰ σημεῖα A',B',Γ' ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν (ε) καὶ τὸ κέντρον βάρους K τοῦ τριγώνου εἰς τὸ K'. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}=3\overrightarrow{KK'}$.

Ὑπόδειξις: Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον O τῆς (ε). Ὡς γνωστὸν $3\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$ (1). Θεωροῦμεν εὐθείαν (η) κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) καὶ ἐπ' αὐτὴν προβάλλομεν τὰ A,B,Γ,K. Πῶς μετατρέπεται ἡ σχέσις (1);

896. Ἔστω τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$. Ἐὰν K τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ὁποῖα ἑνώνουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ O τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι $4\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}$. Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς A,B,Γ,Δ καὶ τὸ K εἰς τὰ σημεῖα A',B',Γ',Δ',K' ἀντιστοίχως ἐπὶ τυχούσης εὐθείας (ε). Νὰ δειχθῇ ὅτι $4\overrightarrow{KK'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}+\overrightarrow{\Delta\Delta'}$.

897. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα A,B,Γ,M. Ἐὰν τεθῇ

$$F(M)=\frac{\overline{MA}^{\kappa}}{\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}}+\frac{\overline{MB}^{\kappa}}{\overline{BA}\cdot\overline{B\Gamma}}+\frac{\overline{M\Gamma}^{\kappa}}{\overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Gamma B}}\quad(\kappa\in\Phi_0)$$

νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $\kappa=[0,1]\Rightarrow F(M)=0$, ἂν $\kappa=2\Rightarrow F(M)=1$

Ἐὰν $|\overline{IA}+|\overline{IB}+|\overline{I\Gamma}=0$ καὶ $\kappa=3\Rightarrow F(I)=0$.

Ὑπόδειξις: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν ἀλγεβρικὴν ταυτότητα $\Lambda=\frac{\omega^{\kappa}}{(\alpha-\theta)(\alpha-\beta)}+\frac{\theta^{\kappa}}{(\beta-\alpha)(\theta-\beta)}+\frac{\beta^{\kappa}}{(\beta-\alpha)(\beta-\theta)}$, καθ' ἣν διὰ $\kappa=[0,1]\Rightarrow\Lambda=0$ διὰ $\kappa=2\Rightarrow\Lambda=1$ καὶ διὰ $\kappa=3\Rightarrow\Lambda=\alpha+\theta+\beta$.

898. Δίδεται ἑξάγωνον $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ἔστω M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6 τὰ μέσα τῶν διαδοχικῶν πλευρῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα $M_1M_3M_5$, $M_2M_4M_6$ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

899. Ἔστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ σημεῖα M_1,M_2,M_3 διαιροῦντα τὴν βάσιν $B\Gamma$ εἰς τέσσερα ἴσα μέρη ($BM_1=M_1M_2=M_2M_3=M_3\Gamma$). Νὰ δειχθῇ ὅτι $5\overrightarrow{AM_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}+\overrightarrow{AM_3}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

900. Ἔστωσαν A,B,Γ,Δ τέσσερα τυχόντα σημεῖα τοῦ χώρου, M,N,Θ,Z τὰ μέσα τῶν $A\Gamma, B\Delta, A\Delta, B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{MN}$ β) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}=2\overrightarrow{\Theta Z}$ γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$.

901. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τυχὸν σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ὡς γνωστὸν ὑπάρχει ἓν ἀκριβῶς σημεῖον Σ ὥστε $\overrightarrow{O\Sigma} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$. Νὰ ἀποδειχθῇ α) $\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma} = 2\overrightarrow{\Sigma O}$. β) Ἡ ΟΣ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$. γ) Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ τέμνει τὴν ΟΣ εἰς δύο τμήματα μὲ λόγον $\frac{1}{2}$.

902. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B E}+\overrightarrow{\Gamma Z} = 0$. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ σημεῖα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχωνται διὰ κοινοῦ σημείου καὶ εἶναι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B E}+\overrightarrow{\Gamma Z} = 0$, τότε Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀντιστοίχως.

903. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ ΑΒ τυχοῦσα διάμετρος αὐτοῦ. Ἐὰν Ρ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του νὰ δειχθῇ ὅτι $\mathcal{P}_O(P) = \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$.

904. Εἰς τετράπλευραν ΑΒΓΔ εἶναι Ε, Ζ, Η τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀντιστοίχως καὶ Ε′, Ζ′, Η′ τὰ μέσα τῶν ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ ἀντιστοίχως καὶ Κ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{EE'}+\overrightarrow{ZZ'}+\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{AK}$. Τὸ πρόβλημα ἰσχύει προφανῶς καὶ διὰ τετράεδρον.

905. Ὁρίζομεν ὡς κέντρον βάρους τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\cdots A_\nu$ τὸ σημεῖον G τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_\nu} = 0$. Τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται εἶναι μοναδικόν. Ἐὰν (ε) τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ A_i' ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς A_i, G′ ἡ προβολὴ τοῦ G ἐπὶ τῆς (ε) νὰ δειχθῇ ὅτι $\nu\cdot\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{A_1A_1'}+\overrightarrow{A_2A_2'}+\cdots+\overrightarrow{A_\nu A_\nu'}$.

906. Ἐὰν A_1, B_1, Γ σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ Ο, Μ τυχόντα σημεῖα τοῦ χώρου εἶναι $(\overline{B\Gamma M})\overrightarrow{OA}+(\overline{\Gamma AM})\overrightarrow{OB}+(\overline{ABM})\overrightarrow{O\Gamma} = 0$.

907. Ἐὰν Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Η, Κ, Ι, I_a τὸ ὀρθόκεντρον, κέντρον περιγεγραμμένου κύκλου, κέντρον ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου κύκλου ἀντιστοίχως τότε

α) $\overrightarrow{OH} = \frac{\varepsilon\varphi A\cdot\overrightarrow{OA}+\varepsilon\varphi B\cdot\overrightarrow{OB}+\varepsilon\varphi\Gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}$

β) $\overrightarrow{OK} = \frac{\eta\mu 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\eta\mu 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\eta\mu 2\Gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}}{\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{OI} = \frac{\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}}{\alpha+\beta+\gamma}$

δ) $\overrightarrow{OI_a} = \frac{\alpha\cdot\overrightarrow{OA}-\beta\cdot\overrightarrow{OB}-\gamma\cdot\overrightarrow{O\Gamma}}{\alpha-\beta-\gamma}$

908. Εἰς τὸν χῶρον δίδονται ἓξ σημεῖα $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Σχηματίζομεν τὰ ἓξ τρίγωνα $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_6$, $A_5A_6A_1$, $A_6A_1A_2$, μὲ κέντρα βάρους ἀντιστοίχως $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{G_1G_2}+\overrightarrow{G_4G_5} = \overrightarrow{G_2G_3}+\overrightarrow{G_5G_6} = \overrightarrow{G_3G_4}+\overrightarrow{G_6G_1} = 0$.

909. Ἔστω $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ τὰ κέντρα βάρους τῶν $\widehat{B\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Gamma\Delta A}$, $\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{AB\Gamma}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1, \Delta\Delta_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου G ὥστε $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GA_1}$.

910. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ διηρέθησαν ἀπὸ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Κ ὥστε $\frac{ΑΡ}{ΑΒ} = \frac{ΓΚ}{ΓΑ}$. Σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΡΠΓ, ΑΒΣΚ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ΡΣ καὶ ΚΠ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμεσον ἐκ τῆς κορυφῆς Α.

911. Ἔστω α,β,γ σημεῖα τῶν ἀκτίνων ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ τῆς δέσμης Ο.ΑΒΓ, τοιαῦτα ὥστε $\frac{Οα}{ΟΑ} = \frac{Οβ}{ΟΒ} = \frac{Ογ}{ΟΓ} = κ$. Θέτομεν Α',Β',Γ' εἰς τὰ μέσα τῶν ΒΓ,ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ αΑ',βΒ',γΓ' τέμνονται εἰς σημεῖον S δι-δόμενον ἀπὸ τὸν τύπον $\overrightarrow{ΟS} = \frac{κ}{1+2κ}(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ})$.

912. Ἐὰν Ρ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι $\overrightarrow{ΡΑ}+\overrightarrow{ΡΓ}+\overrightarrow{ΒΡ}+\overrightarrow{ΔΡ} = 0$.

913. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ $Ο_1$ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Euler. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}$, $\overrightarrow{Ο_1Α}+\overrightarrow{Ο_1Β}+\overrightarrow{Ο_1Γ}$ εἶναι συγγραμμικά.

914. $λ\overrightarrow{ΑΒ}+μ\cdot\overrightarrow{ΒΓ}+ν\cdot\overrightarrow{ΓΔ}+ρ\cdot\overrightarrow{ΔΑ} = 0 \Longrightarrow λν = μρ.$ (Α,Β,Γ,Δ συνεπίπεδα)

915. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ρ ἐντὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ὥστε $\overrightarrow{ΡΑ}+\overrightarrow{ΡΒ}+\overrightarrow{ΡΓ}+\overrightarrow{ΡΔ} = 0$.

916. Τρεῖς δυνάμεις Ρ,Q,R ἐπενεργοῦν κατὰ μῆκος τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ἐὰν ἡ συνισταμένη των εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ, νὰ δειχθῇ $\frac{Ρ}{ΑΒ}+\frac{Q}{ΑΓ}+\frac{R}{ΑΔ} = 0$.

917. Ἂν G τὸ κέντρον βάρους τῶν σημείων $Α_1,Α_2,\ldots,Α_ν$ καὶ Η τὸ κέντρον βάρους τῶν $Β_1,Β_2,\ldots,Β_ν$ εἶναι $\sum_{i=1}^{ν}\overrightarrow{Α_iΒ_i} = ν\cdot\overrightarrow{GH}$.

ΟΜΑΣ Β'.

918. Ἔστω $Α_1,Α_2,Α_3,Α_4$ σημεῖα τοῦ χώρου μὲ διανύσματα θέσεως ἀντιστοίχως $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{r}_4$. Ἐὰν $λ_1+λ_2+λ_3+λ_4 = 0$, $λ_1\vec{r}_1+λ_2\vec{r}_2+λ_3\vec{r}_3+λ_4\vec{r}_4 = 0$ καὶ $|λ_1|+|λ_2|+|λ_3|+|λ_4| \neq 0$ τότε τὰ σημεῖα $Α_1,Α_2,Α_3,Α_4$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ $Α_1Α_2$ τέμνει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $Α_3Α_4$ εἰς λόγον $\frac{λ_4}{λ_3}$, ἡ $Α_2Α_3$ τὸ $Α_4Α_1$ εἰς λόγον $\frac{λ_1}{λ_4}$, ἡ $Α_3Α_4$ τὸ $Α_1Α_2$ εἰς λόγον $\frac{λ_2}{λ_1}$ καὶ ἡ $Α_4Α_1$ τὸ τμῆμα $Α_2Α_3$ εἰς λόγον $\frac{λ_3}{λ_2}$.

919. Ἐὰν $Α_1,Α_2,Α_3,Α_4$ εἶναι τέσσερα σημεῖα τοῦ χώρου μὲ διανύσματα θέσεως ἀντιστοίχως $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\vec{r}_4$, τότε κάθε σημεῖον τοῦ χώρου Μ, μὲ διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\vec{r} = \frac{λ_1\vec{r}_1+λ_2\vec{r}_2+λ_3\vec{r}_3+λ_4\vec{r}_4}{λ_1+λ_2+λ_3+λ_4}$ ὅπου $\frac{λ_1}{V_1} = \frac{λ_2}{V_2} = \frac{λ_3}{V_3} = \frac{λ_4}{V_4}$ καὶ V_1,V_2,V_3,V_4 οἱ διανυσματικοὶ ὄγκοι τῶν τετραέδρων $(Α_2Α_3Α_4Μ)$, $(Α_3Α_4Α_1Μ)$, $(Α_4Α_1Α_2Μ)$, $(Α_1Α_2Α_3Μ)$ ἀντιστοίχως. Ἐὰν τεθῇ δὲ ἀκόμη $Α_1' = Α_1Μ\cap Π_{Α_2Α_3Α_4}$

ὅπου $\Pi_{A_1A_3A_4}$ τὸ ἐπίπεδον $A_2A_3A_4$, θὰ εἶναι $\frac{\lambda_2}{(A_3A_4M)} = \frac{\lambda_3}{(A_4A_2M)} = \frac{\lambda_4}{(A_2A_3M)}$.

920. Ἐπὶ ἐπιπέδου δίδονται ν σημεῖα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$. Διὰ τυχόν σημείου Β τοῦ ἐπιπέδου θεωροῦμεν τοὺς κύκλους διαμέτρου $A_1B, A_2B, \dots, A_\nu B$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πλῆθος ν^2 τῶν δυνάμεων τῶν ν σημείων A_i πρὸς τοὺς ν προηγουμένους κύκλους εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου Β.

Τὸ ἴδιο ἀκριβῶς πρόβλημα ἐὰν $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ σημεῖα τοῦ χώρου καὶ ἀντὶ διὰ κύκλους λαμβάνομεν σφαίρας.

921. Θεωροῦμεν τὸ σύστημα A/M μὲ $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$ καὶ ἔστω $m_1, m_2, \dots, m_\pi > 0$, $m_{\pi+1}, m_{\pi+2}, \dots, m_n < 0$. Παριστάνομεν διὰ τῶν G_1, G_2 τὰ κέντρα μάζης τῶν δύο συστημάτων $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_\pi(m_\pi)$ καὶ $A_{\pi+1}(m_{\pi+1}), A_{\pi+2}(m_{\pi+2}), \dots, A_n(m_n)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{PA_i}^2 = \lambda(\overline{PG_1}^2 - \overline{PG_2}^2) + \sum_{i=1}^{\pi} m_i \overline{G_1A_i}^2 + \sum_{i=\pi+1}^{n} m_i \overline{G_2A_i}^2$, ὅπου P τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου καὶ $\lambda = m_1 + m_2 + \dots + m_\pi$.

922. Διὰ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_\nu$ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) τέμνουσαν τὰς πλευρὰς $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_\nu A_1$ εἰς $A_1', A_2', \dots, A_\nu'$ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ $\frac{(\overline{A_1A_2O})}{OA_1'} + \frac{(\overline{A_2A_3O})}{OA_2'} + \dots + \frac{(\overline{A_\nu A_1O})}{OA_\nu'} = 0$.

923. Πολύγωνον $A_1A_2A_3\dots A_\nu$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O,R). Ἔστω B_i τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς A_iA_{i+1} καὶ $m_i = |\overline{A_iA_{i+1}}|$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος B/M εἶναι τὸ σημεῖον Ο.

924. Δίδεται τὸ σύστημα A/M τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου κεῖνται ἐπὶ περιφερείας. Ἐὰν P τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ θέσωμεν A_i' τὸ σημεῖον ὅπου ἡ PA_i τέμνει τὸν κύκλον νὰ δειχθῇ $\sum_{i=1}^{n} (m_i \frac{\overline{PA_i}}{\overline{PA_i'}} + m_i) = 0$.

Ἐφαρμογή: Τριγώνου $A_1A_2A_3$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν P τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του καὶ αἱ PA_1, PA_2, PA_3 τέμνουν τὸν κύκλον εἰς A_1', A_2', A_3' ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι $\vec{E}_1 \cdot \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_1'}} + \vec{E}_2 \cdot \frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_2'}} + \vec{E}_3 \cdot \frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_3'}} + \vec{E} = 0$, ὅπου $\vec{E}_1 = (\overline{A_2A_3P})$, $\vec{E}_2 = (\overline{A_3A_1P})$, $\vec{E}_3 = (\overline{A_1A_2P})$, $\vec{E} = (\overline{A_1A_2A_3})$.

925. Ἂν A, B, Γ, Δ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου διὰ τυχόντα σημεῖα Ο, Μ τοῦ χώρου θὰ εἶναι $(\overline{AB\Gamma M})\cdot\overline{O\Delta} + (\overline{B\Gamma\Delta M})\cdot\overline{OA} + (\overline{\Gamma\Delta AM})\cdot\overline{OB} + (\overline{\Delta ABM})\cdot\overline{O\Gamma} = 0$.

Ὑπόδειξις: Βασισθῆτε εἰς τὴν ἄσκησιν 919.

926. Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους τῶν $A_1, A_2, \dots, A_n$[1] καὶ H τὸ κέντρον βάρους τῶν $B_1, B_2, \dots, B_m$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{A_iB_j} = mn\,\overrightarrow{GH}$.

927. Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος $A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3)$ καὶ GT τὸ ἐφαπτομενικὸν τμῆμα πρὸς τὴν περὶ τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἐφαπτομένην. Διὰ τυχόν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου νὰ δειχθῇ ὅτι $m_1\cdot A_1M^2 + m_2\cdot A_2M^2 + m_3\cdot A_3M^2 = m(GM^2 - GT^2)$.

---

(1) Ἐφόσον δὲν γίνεται μνεία τῶν προαιρετημένων συντελεστῶν εἰς τὰ A_i ὑποτίθεται ὅτι εἶναι μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ 8

ΠΟΛΙΚΟΤΗΣ

8-1 Ἀναρμονικὸς λόγος

Ἔστω Γ σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Θέτομεν:

$$(AB\Gamma) = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} \quad \text{(ἁπλοῦς λόγος)}$$

Θεωρήσωμεν Α,Β,Γ,Δ τυχόντα σημεῖα τῆς εὐθείας (ε). Θέτομεν

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}} = \lambda$$

Ὁρισμός

τὸν λόγον λ ὀνομάζομεν ἀ ν α ρ μ ο ν ι κ ὸ ν λ ὸ γ ο ν (ἢ διπλοῦν λόγον) τῶν τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Δ[1].

8-1.1 Θεώρημα

Ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τεσσάρων σημείων μιᾶς εὐθείας εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θετικῆς φορᾶς ἐπὶ τῆς εὐθείας.

8-1.2. Θεώρημα

Ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τεσσάρων σημείων μιᾶς εὐθείας διατηρεῖται κατὰ τὴν πλαγίαν προβολὴν (ἢ ὀρθὴν προφανῶς) των, ἐπὶ τυχούσης εὐθείας.

Ἡ ἀπόδειξις προφανὴς δεδομένου ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς τὴν περιοχὴν ἰσχύος τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

8-1.3 Θεώρημα

Ὁ διπλοῦς λόγος τῶν σημείων τομῆς μιᾶς εὐθείας ε ὑπὸ τῶν ἀκτίνων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ μιᾶς δέσμης εἶναι σταθερός, ἤτοι ἀνεξάρτητος τῆς ε.

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ε_4 τέμνουσαν τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εἰς Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως.

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}} = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{A\Delta}} : \frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Delta B}} \quad (1). \quad \text{Ἀλλὰ } \overset{\Delta}{A\Gamma M} \sim \overset{\Delta}{A\Delta O} \Longrightarrow \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{A\Delta}} = \frac{\overline{\Gamma M}}{\overline{\Delta O}} \quad (2)$$

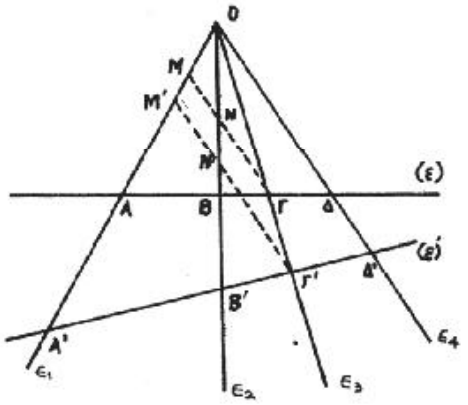
---

[1] Προφανῶς $(AB\Gamma\Delta) = (BA\Delta\Gamma) = (\Gamma\Delta AB) = (\Delta\Gamma B\Gamma)$

και $\overset{\Delta}{B\Gamma N} \sim \overset{\Delta}{B\Delta O} \Longrightarrow \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{\Gamma N}{\Delta O}$ (3)

$(1),(2),(3) \Longrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{\Gamma M}{\Gamma N}$

Ὁ λόγος οὗτος εἶναι σταθερὸς διὰ τὴν τυχοῦσαν τέμνουσαν (Διότι ἂν ε' ἦτο μία ἄλλη τέμνουσα $(A'B'\Gamma'\Delta') = \frac{\Gamma'M'}{\Gamma'N'} = \frac{\Gamma M}{\Gamma N}$)



Μίαν διαφορετικὴν ἀπόδειξιν δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἂν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ'Α' ἐφαρμόσωμεν δύο φορὰς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατεμνούσας ΟΓΓ', ΟΔΔ'

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{\Gamma'B'}{\Gamma'A'} \cdot \frac{OA'}{OA} = 1 \qquad \frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{\Delta'B'}{\Delta'A'} \cdot \frac{OA'}{OA} = 1$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη

Ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τῶν τεσσάρων σημείων τῆς τομῆς εὐθείας ε ὑπὸ τῶν ἀκτίνων δέσμης $O.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$ εἶναι σταθερὸς διὰ τὴν ἐν λόγῳ δέσμην. Ἐὰν δὲ εἶναι ἴσος πρὸς λ χράφομεν: $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4) = \lambda$ ἢ ἀκόμη $(OA, OB, O\Gamma, O\Delta) = \lambda$ ἢ ὅπερ καὶ τὸ συνηθέστερον $(O.AB\Gamma\Delta) = \lambda$

8-1.4

Ἡ ἐξίσωσις $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_x) = \lambda$, ὅπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ἀκτῖναι δέσμης $O.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, ἔχει μίαν ἀκριβῶς λύσιν.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω εὐθεῖα ε τέμνουσα τὰς ἀκτῖνας $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ τῆς δέσμης εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 ἀντιστοίχως. Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(A_1A_2A_3A_x) = \lambda$ (1) ἔχει μίαν ἀκριβῶς λύσιν πρὸς A_x[1]. Θεωροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ε_x τῆς δέσμης τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον A_x. Βάσει τοῦ θεωρήματος 8-1.5 θὰ ἔχωμεν $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_x) = \lambda$. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_y) = \lambda$, θὰ δείξωμεν ὅτι $\varepsilon_y = \varepsilon_x$. Ἡ εὐθεῖα ε τέμνει τὴν ε_y εἰς σημεῖον A_y ὥστε $(A_1A_2A_3A_y) = \lambda$ (2). Ἀλλὰ τότε (1),(2) $\Longrightarrow A_y = A_x$ καὶ $\varepsilon_y = \varepsilon_x$.

8-1.5 Πρόβλημα

Διὰ δοθέντος σημείου Α φέρομεν εὐθείαν η τέμνουσαν ἓν ζεῦγος δοθεισῶν εὐθειῶν ε, ε' κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $G = \{M / (AB\Gamma M) = \lambda\}$ $(\lambda \in R)$.

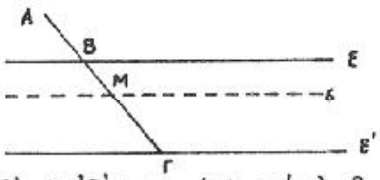
Λύσις:

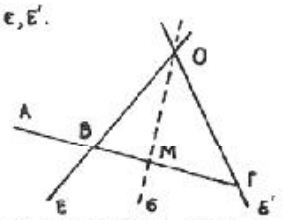
α) Ἔστω $\varepsilon // \varepsilon'$. Εὐκόλως διαπιστώνομεν, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, ὅτι ὁ

---

[1] Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ε λάβωμεν ἓν σύστημα συντεταγμένων ἡ τετμημένη τοῦ A_x ὁρίζεται ἀπὸ μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν.

τόπος G εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς ε,ε'.





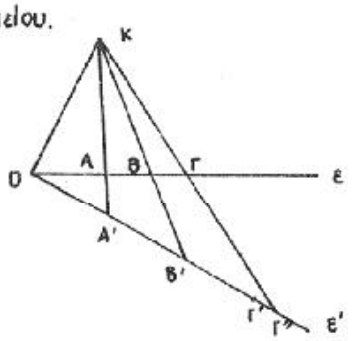
β) Ἡ ἐξίσωσις $(OA,\varepsilon,\varepsilon',\delta)=\lambda$ ἔχει μίαν ἀκριβῶς λύσιν πρὸς δ ἄρα $G=\delta$.

8 - 1.6 Θεώρημα

Ἔστω O,A,B,Γ σημεῖα εὐθείας ε καὶ O,A',B',Γ' σημεῖα εὐθείας ε'. Ἂν $(OAB\Gamma)$ $(OA'B'\Gamma')$ τότε αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω κ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν AA' καὶ BB'. Θέτομεν Γ'' τὸ σημεῖον τομῆς τῆς $\kappa\Gamma$ μετὰ τῆς ε'. Ἔχομεν ὡς γνωστὸν $(OAB\Gamma)=(OA'B'\Gamma'')$. Ἀλλὰ τότε βάσει τῆς ὑποθέσεως $(OA'B'\Gamma'')=(OA'B'\Gamma')$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\Gamma\equiv\Gamma''$



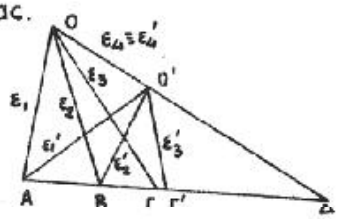
8 - 1.7 Θεώρημα

Ἐὰν δύο δέσμαι τοῦ αὐτοῦ ἀναρμονικοῦ λόγου, ἔχουν κοινὴν ἀκτῖνα, τότε αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες αὐτῶν τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν $A=\varepsilon_1\cap\varepsilon_1'$, $B=\varepsilon_2\cap\varepsilon_2'$, $\Gamma=\varepsilon_3\cap\varepsilon_3'$, $\Gamma'=AB\cap\varepsilon_3'$. Βάσει τῆς ὑποθέσεως εἶναι:

$$(AB\Gamma\Delta)=(AB\Gamma'\Delta)\Longrightarrow\Gamma\equiv\Gamma'$$



8 - 2 Ἁρμονικὸς λόγος

Ἔστω A,B,Γ,Δ σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν ὁ ἀναρμονικὸς λόγος εἶναι ἴσος πρὸς -1, τότε τὰ σημεῖα $A,B-\Gamma,\Delta$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

Διότι: $\quad (AB\Gamma\Delta)=-1\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}=-\dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}$

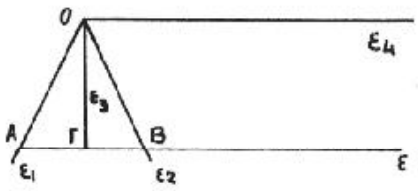
Ἐὰν δὲ ὁ ἀναρμονικὸς λόγος δέσμης τεσσάρων εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς -1, τότε ἡ δέσμη καλεῖται ἁ ρ μ ο ν ι κ ή, τὰ δὲ ζεύγη τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν καλοῦνται ὁ μ ὸ λ ο χ α.

8 - 2.1 Θεώρημα

Ἐὰν δύο ὁμόλογοι εὐθεῖαι ἁρμονικῆς δέσμης εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τότε εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου ζεύγους τῶν εὐθειῶν.

Απόδειξις:

Έστω $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_4$. Θεωρούμεν την ευθείαν ε κάθετον επί την ε_3. Είναι $(AB\Gamma\infty) = -1 \Longrightarrow \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = 1$. Ήτοι το Γ είναι μέσον του τμήματος ΑΒ, άρα διά το $\overset{\Delta}{A}O\overset{\Delta}{B}$ ή OΓ είναι ύψος και διάμεσος. Ήτοι $\overset{\Delta}{A}O\overset{\Delta}{B}$ ισοσκελές.



8-2.2

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ίνα η επί άξονος xx' κειμένη τετράς σημείων A,B,Γ, Δ είναι αρμονική, είναι η μεταξύ των τετμημένων των σχέσις:

$$2(x_A x_B + x_\Gamma x_\Delta) = (x_A + x_B)(x_\Gamma + x_\Delta) \qquad (1)$$

Απόδειξις: $\quad O \quad A(x_A) \quad \Gamma(x_\Gamma) \quad B(x_B) \quad \Delta(x_\Delta)$

Αναγκαίον. $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = -\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}} \Longrightarrow \frac{x_\Gamma - x_A}{x_B - x_\Gamma} = \frac{x_\Delta - x_A}{x_B - x_\Delta} \Longrightarrow 2(x_A x_B + x_\Gamma x_\Delta) = (x_A + x_B)(x_\Gamma + x_\Delta)$

Ικανόν. Υποθέσωμεν ότι υφίσταται η σχέσις (1) και άκόμη $(AB\Gamma\Delta') = -1$, ή εκ του αναγκαίου $2(x_A x_B + x_\Gamma x_{\Delta'}) = (x_A + x_B)(x_\Gamma + x_{\Delta'})$. Εκ της υποθέσεως και της τελευταίας σχέσεως προκύπτει ότι $x_\Delta = x_{\Delta'}$.

Εφαρμογαί

1. Έστω O το μέσον του τμήματος AB: $x_A + x_B = 0 \Longrightarrow x_A^2 = x_\Gamma x_\Delta$ ή

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta} \quad \text{(Σχέσις Newton)}$$

2. Έστω $O \equiv A$: $(1) \Longrightarrow 2x_\Gamma x_\Delta = x_B x_\Gamma + x_B x_\Delta \Longrightarrow \frac{2}{x_B} = \frac{1}{x_\Gamma} + \frac{1}{x_\Delta} \Longrightarrow$

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{A\Gamma}} + \frac{1}{\overline{A\Delta}} \quad \text{(Σχέσις Descartes)}$$

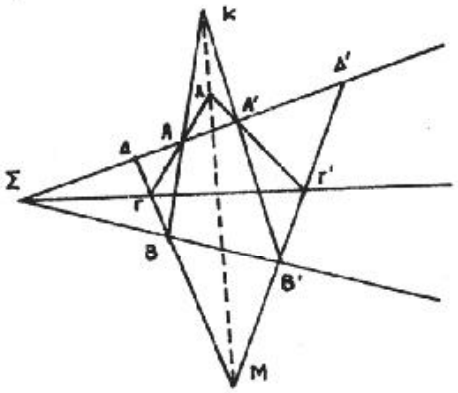
3. Εκ της σχέσεως του Descartes έχομεν.

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}}{\overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta}} \Longrightarrow \overline{AB}\,\frac{\overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta}}{2} = \overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}$$

Έστω I το μέσον του τμήματος ΓΔ. θά είναι $\frac{\overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta}}{2} = \overline{AI}$ και κατά συνέπειαν $\overline{AB}\cdot\overline{AI} = \overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}$. Ήτοι αί κύκλοι διαμέτρου ΓΔ και BI έχουν ριζικόν άξονα την κάθετον επί την AB εις A. Όμοίως προκύπτει ότι: $\overline{\Gamma\Delta}\cdot\overline{\Gamma I} = \overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Gamma B}$.

4. Ως απλή εφαρμογή του 8-1.7 αποδεικνύομεν το θεώρημα του Dejark.

Έχομεν: $(\Sigma.A\Gamma BM) = (\Sigma.A'\Gamma'B'M)$. Αί δέσμαι $(A\Delta, A\Gamma, AB, AM), (A'\Delta', A'\Gamma', A'B', A'M)$ έχουν τον αυτόν αναρμονικόν λόγον και κοινήν ακτίνα την AΔ. Άρα αί αντίστοιχοι ακτίνες τέμνονται εις τά σημεία K, Λ, M κείμενα επ' ευθείας. Ευκόλως αποδεικνύεται και το αντίστροφον (επί τη βάσει του 8-1.6).



8-3 Πολική σημείου πρός δύο εὐθείας ε,ε' τοῦ ἐπιπέδου του.

Ἔστω διά τοῦ Α τυχοῦσα εὐθεῖα η τέμνουσα εἰς Γ τήν ε καί εἰς Δ τήν ε'.

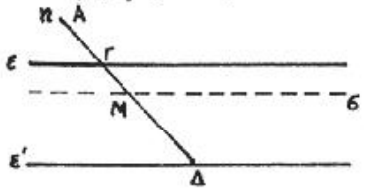
Ὁρισμός

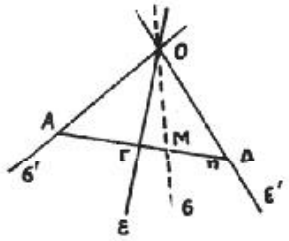
Ὀνομάζομεν πολική τοῦ Α πρός ε,ε' τό σύνολον G τῶν σημείων Μ ὥστε (ΑΜΓΔ)=-1. Ἤτοι:

$$G=\{M/(AM\Gamma\Delta)=-1\}$$

α) Ἐάν ε//ε', ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται (ἰδέ 8-1.5) ἡ πολική τοῦ Α πρός ε,ε' εἶναι εὐθεῖα ε παράλληλος πρός τάς ε,ε' τελείως ὡρισμένη.

β) Ἐάν ε,ε' τεμνόμεναι. Ἐπί τῇ βάσει τοῦ 8-1.5 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πολική τοῦ Α εἶναι εὐθεῖα ε διερχομένη διά τοῦ σημείου τομῆς τῶν ε,ε'. Θά ἔχωμεν δέ, ἄν θέσωμεν ΟΑ=ε': (ε',ε,ε,ε')=-1.

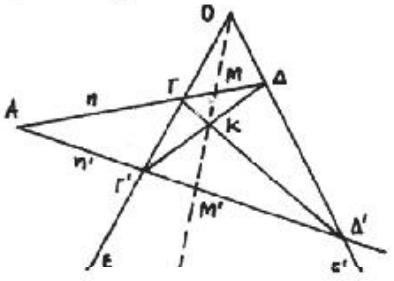




8-3.1 Θεώρημα

Ἑκάστη διαχώνιος τῆς πλήρους τετραπλεύρου τέμνεται ἁρμονικῶς ὑπό τῶν δύο ἄλλων (ἰδέ καί 11-20.6).

Θεωροῦμεν τό πλῆρες τετράπλευρον τό σχηματιζόμενον ἀπό τάς εὐθείας ε,ε', ΓΔ', Γ'Δ. Θά δείξωμεν ὅτι ἡ διαχώνιος αὐτοῦ ΓΔ τέμνεται ἁρμονικῶς ὑπό τῶν ΟΚ καί Γ'Δ'. Ἡ πολική ΜΜ' τοῦ Α πρός ε,ε' διέρχεται ὡς γνωστόν διά τοῦ Ο. Ἡ πολική ΜΜ' τοῦ Α πρός ΓΔ', Γ'Δ διέρχεται διά τοῦ Κ. Ἤτοι ἡ ΜΜ' διέρκεται διά τῶν Ο καί Κ.



8-3.2 Κατασκευή τῆς πολικῆς

Τό σχῆμα 8.3.1 δίδει καί τήν κατασκευήν τῆς πολικῆς τοῦ Α πρός ε,ε'. Διά τοῦ Α φέρομεν τάς η,η' τυχούσας τεμνούσας τάς ε,ε'. Ἡ πολική τοῦ Α εἶναι ἡ ΟΚ.

Ἐάν ε//ε' τό σημεῖον Ο γίνεται τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῶν ε,ε'. Τά προηγούμενα θεωρήματα ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν, ὅπως καί ἡ κατασκευή τῆς πολικῆς.

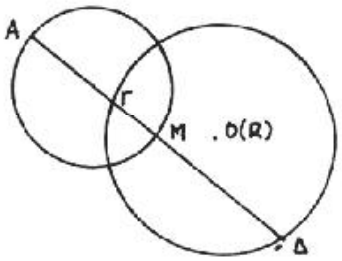
8-4 Πολική σημείου πρός κύκλον

Σημεῖα συζυγῆ πρός κύκλον.

Ὁρισμός

Λέγομεν ὅτι τά σημεῖα Α,Μ εἶναι συζυγῆ πρός κύκλον (Ο,R) ὅταν ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΜ τέμνει ὀρθογωνίως τόν (Ο,R).

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΜ τέμνη τὸν κύκλον εἰς Γ,Δ τὰ σημεῖα Α,Μ-Γ,Δ ὡς γνωστὸν (4-4.4) ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα. Ἤτοι (ΑΜΓΔ)=-1.



Παρατηρήσεις

① Ἐὰν δοθῆ σημεῖον κείμενον ἐπ' εὐθείας ε τότε, γενικῶς, ὑπάρχει ἓν ἀκριβῶς σημεῖον Μ ὥστε ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΜ νὰ τέμνη ὀρθογωνίως τὸν (O,R).

② Ἐὰν ε ἐφάπτεται τῆς (O,R) τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

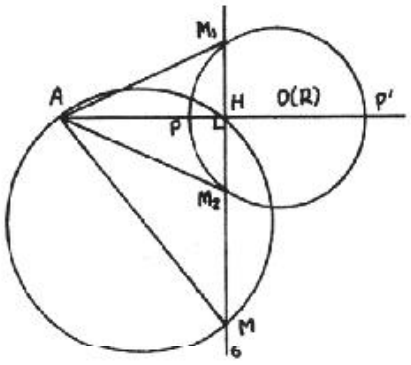
③ Ἐὰν διὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ② λάβωμεν τὸ Α ὡς σημεῖον ἐπαφῆς τότε τὸ Μ δύναται νὰ ληφθῆ ὡς τυχὸν σημεῖον τῆς ε.

8-4.1 Πρόβλημα

Δοθέντος σημείου Α καὶ περιφερείας (O,R) νὰ εὑρεθῆ τὸ σύνολον G τῶν σημείων Μ ὥστε ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΜ νὰ τέμνη ὀρθογωνίως τὴν (O,R).

Ἔστω $M \in G$. $(AMPP') = -1 \Longrightarrow OP^2 = R^2 = \overline{OH}\cdot\overline{OA}$

Ἀλλὰ $A\hat{H}M = 1$. Ἤτοι $G \subseteq \varepsilon$ (1). Ὑποθέσωμεν $M \in \varepsilon$. θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΜ τέμνη ὀρθογωνίως τὴν (O,R). Ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια διέρχεται προφανῶς ἀπὸ τὸ Η καὶ εἶναι $OP^2 = \overline{OH}\cdot\overline{OA}$ ἤτοι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΜ καὶ ἡ (O,R) τέμνεται ὀρθογωνίως. Ἄρα $\varepsilon \subseteq G$ (2).



(1), (2) $G \equiv \varepsilon$.

Προφανῶς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ Α ἀγομένων ἐφαπτομένων εἰς τὴν (O,R) κεῖνται ἐπὶ τῆς ε. Ἂν Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (O,R) τότε ε ἡ εἰς τὸ Α ἐφαπτομένη.

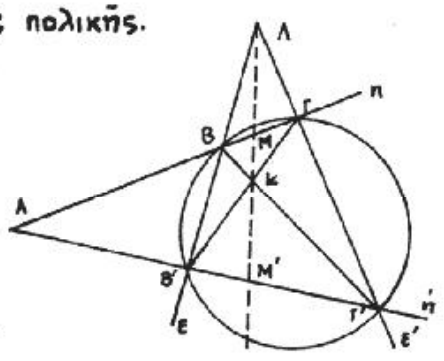
Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν πολικὴν τοῦ Α πρὸς (O,R) τὴν εὐθεῖαν ε.

8-4.2 Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς πολικῆς.

Θεωροῦμεν σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O,R). Ἡ πολικὴ τοῦ Α πρὸς (O,R) κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς:

Διὰ τοῦ Α φέρομεν δύο τυχούσας τεμνούσας η καὶ η', τοῦ (O,R) εἰς Β,Γ καὶ Β',Γ'. Ἡ πολικὴ τοῦ Α πρὸς (O,R) εἶναι ἡ εὐθεῖα κΛ.



Διότι: $(AMB\Gamma) = (AM'B'\Gamma') = -1$. Ἤτοι ἡ ε ταυ-

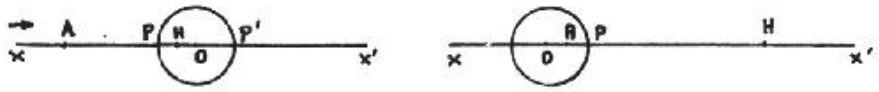
τίζεται πρὸς τὴν ΜΜ', ἥτις ὡς γνωστόν, διέρχεται διὰ τῶν κ,Λ. Ἡ πολικὴ τοῦ Λ εἶναι προφανῶς ἡ ΑΚ.

Τὰ σημεῖα κ,Λ εἶναι συζυγῆ, ὅπως καὶ τὰ σημεῖα κ,Α. Ἤτοι ἡ πολικὴ τοῦ κ πρὸς (Ο,R) θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΛ. Ἐντεῦθεν ἡ κατασκευὴ τῆς πολικῆς τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου κ.

Παρατηρήσεις

Ἡ πολικὴ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου (Ο,R) τέμνει τὸν κύκλον.

Ἡ πολικὴ ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ κύκλου (Ο,R) δὲν τέμνει τὸν κύκλον.

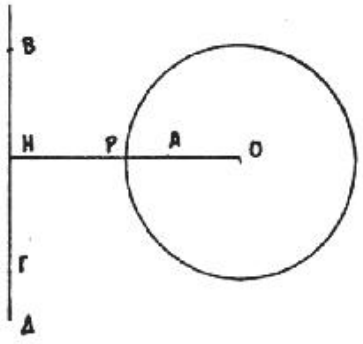


Ὅταν τὸ Α εὑρίσκεται εἰς τὸ ∞ ἐπὶ τῆς εὐθείας xox', τὸ ἴχνος τῆς πολικῆς Η ἐπὶ τῆς xox' ταυτίζεται πρὸς τὸ Ο. Ὅταν τὸ Α κινεῖται πρὸς τὸ Ρ καὶ τὸ Η κινεῖται πρὸς τὸ Ρ. Ἂν Α=Ρ⇒Η=Ρ.

8-4.3 Πόλος εὐθείας Δ πρὸς κύκλον (Ο,R)

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν κύκλον (Ο,R) καὶ εὐθεῖαν Δ. Ζητεῖται τὸ σημεῖον Α τοῦ ὁποίου πολικὴ πρὸς (Ο,R) εἶναι ἡ εὐθεῖα Δ. Τὸ σημεῖον Α κεῖται ὡς γνωστὸν ἐπὶ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν Δ. Δίδεται ἀπὸ τὴν ἐκείνην: $OP^2 = R^2 = OA \cdot OH$.

Ἐντεῦθεν εὑρίσκεται τὸ ΟΑ.



Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸν πόλον μόνον μὲ τὸν κανόνα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τυχόντα σημεῖα Β,Γ ∈ Δ καὶ ἔστω η,θ αἱ πολικαὶ αὐτῶν ὡς πρὸς Ο. Ἡ τομὴ τῶν πολικῶν τῶν Β,Γ πρὸς (Ο,R) εἶναι ὁ πόλος τῆς Δ.

8-4.4 Θεώρημα

Ἐὰν ἡ πολικὴ σημείου Α πρὸς κύκλον (Ο,R) διέρχεται διὰ σημείου Β, τότε καὶ ἡ πολικὴ τοῦ Β πρὸς τὸν (Ο,R) θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Α.

Προφανῶς, διότι τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ πρὸς (Ο,R).

8-4.5 Θεώρημα

Ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ σημεῖον Α ὁ πόλος της πρὸς κύκλον (Ο,R) κινεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Α.

Πράγματι ἐὰν Δ τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Α ὁ πόλος τῆς Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Α, συμφώνως πρὸς τὸ 8-4.4.

8-4.6 Θεώρημα

Ἐὰν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ εὐθείας Δ ἡ πολικὴ του διέρχεται διὰ τοῦ πόλου Α τῆς Δ.

Τά προηγούμενα θεωρήματα μᾶς ἐπιτρέπουν τά ἑξῆς συμπεράσματα.

① Ἐάν Α καί Β δύο τυχόντα σημεῖα καί α,β αἱ πολικαί των ἀντιστοίχως πρός κύκλον (O,R) τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ θά εἶναι ἡ πολική τοῦ σημείων τομῆς τῶν α,β.

② Ἐπί τῆς εὐθείας ΑΒ θά κεῖται ὁ πόλος κάθε εὐθείας διερχομένης διά τοῦ σημείου τομῆς τῶν α,β.

③ Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τά σημεῖα τομῆς τῆς ΑΒ καί τῆς περιφερείας διέρχονται διά τοῦ σημείου τομῆς τῶν α,β.

④ Ἐάν ε,ε' καί η,η' δύο ζεῦγη ἐφαπτομένων κύκλου (O,R), τότε, ἐάν ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ε,ε' διέρχεται διά τοῦ σημείου τομῆς τῶν η,η' καί ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν η,η' θά διέρχεται ἀπό τό σημεῖον τομῆς τῶν ε,ε'.

8-4.7 Θεώρημα

Ἐάν τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μιᾶς εὐθείας ε ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα, τότε ἡ δέσμη τῶν πολικῶν α,β,χ,δ αὐτῶν ἀντιστοίχως, πρός κύκλον (O,R), θά εἶναι ἁρμονική.

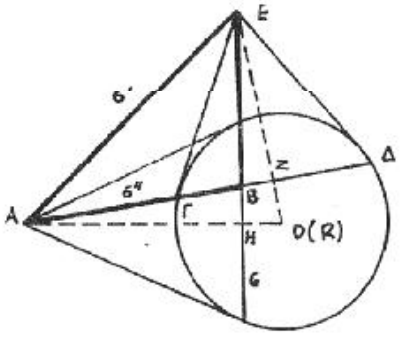
Διότι αἱ δέσμαι (OA,OB,OΓ,OΔ) καί (α,β,χ,δ) ἔχουν ἴσας γωνίας τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων.

8-4.8 Εὐθεῖαι συζυγεῖς πρός κύκλον

Δίδονται δύο σημεῖα Α,Β καί κύκλος (O,R). Ἄν ἡ πολική τοῦ Α διέρχεται διά τοῦ Β τότε καί ἡ πολική τοῦ Β θά διέρχεται διά τοῦ Α.

Ὁρισμός

Δύο εὐθεῖαι, ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων κεῖται ὁ πόλος τῆς ἑτέρας πρός κύκλον καλοῦνται **συζυγεῖς**.



Ἔστω Γ,Δ τά σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου (O,R) μετά τῆς εὐθείας ΑΒ. Εἶναι ὡς γνωστόν (ΑΒΓΔ)=-1

Ἄρα αἱ πολικαί τῶν Α,Β,Γ,Δ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε καί ἡ δέσμη (EA,EB,EΓ,EΔ) εἶναι ἁρμονική. Αἱ πολικαί τῶν σημείων Γ καί Δ εἶναι αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς Γ καί Δ. Ἄρα Ε τό σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου εἰς Γ, Δ. Παρατηροῦμεν:

① Τά ζεύγη τῶν (δ,δ'), (δ',δ''), (δ'',δ) ἀποτελοῦνται ἀπό εὐθείας συζυγεῖς.

② Διά τάς συζυγεῖς εὐθείας ἰσχύει ἡ μεταβατική ἰδιότης. Δηλαδή ἄν δ,δ' συζυγεῖς καί δ',δ'' συζυγεῖς τότε καί αἱ δ'',δ θά εἶναι εὐθεῖαι συζυγεῖς (πρός τόν αὐτόν κύκλον (O,R) πάντοτε).

8-4.9

Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΕ (Σχ. 8-4.8) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἐπί τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευ-

ραί του εἶναι ευζυγεῖς πρὸς τὸν κύκλον ἀνὰ δύο.

Ὁρισμός

Ἐάν αἱ πλευραί τριγώνου κεῖνται εἰς εὐθείας ευζυγεῖς ἀνὰ δύο ὡς πρὸς κύκλον (O,R) τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται ε υ ζ υ γ ὲ ς π ρ ὸ ς τ ὸ ν κ ύ κ λ ο ν (O,R).

Παρατηρήσεις

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ευζυγὲς πρὸς κύκλον (O,R) (Σχ. 8-4.8).

① Ἑκάστη κορυφή του εἶναι ἡ πολική τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ ἀπέναντι πλευρά.

② Δύο τυχοῦσαι κορυφαί του εἶναι σημεῖα ευζυγῆ πρὸς τὸν κύκλον.

③ Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{ABE}$ συμπίπτει πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O,R).

④ Ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ευζυγοῦς πρὸς κύκλον μία εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ αἱ ὑπόλοιπαι δύο κορυφαὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἑξῆς:

Κατ' ἀρχάς, ἀποκλείεται ἐντὸς τοῦ κύκλου νὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς κορυφαί. Διότι ἡ πολικὴ ἑνὸς ἐσωτερικοῦ σημείου θὰ ἔτεμνε τὸν κύκλον, ὅπερ ἄτοπον.

Ὁμοίως ἀποκλείομεν τὴν περίπτωσιν ἐκτὸς τοῦ κύκλου νὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς κορυφαί.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα A,B εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ τότε ἡ πολικὴ τοῦ A ὡς διερχομένη διὰ τοῦ B τέμνει τὸν κύκλον, ὅπερ πάλιν ἄτοπον.

⑤ Ἡ γωνία, τριγώνου ευζυγοῦς πρὸς κύκλον (O,R), ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἀμβλεία.

Διότι (Σχ. 8-4.8) τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{ABE}$ εἶναι τὸ σημεῖον O. Τὰ σημεῖα E,Z εἶναι ευζυγῆ ἄρα εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ O, ὡς πρὸς τὴν εὐθείαν OE. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ σημεῖα H,A ὡς πρὸς τὴν εὐθείαν OA. Ἄρα τὸ ὀρθόκεντρον O τοῦ $\hat{ABE}$ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ κατὰ συνέπειαν τοῦτο εἶναι ἀμβλυγώνιον. (Κατὰ τὴν κορυφὴν B).

Δοθέντος ἀμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΕ ὑπάρχει εἷς ἀκριβῶς κύκλος πρὸς τὸν ὁποῖον τὸ $\hat{ABE}$ εἶναι ευζυγές.

Ἐάν O τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου καὶ ΑΗ τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ΒΕ, ὁ κύκλος εἶναι (O,R), ὅπου $R^2 = \overline{OH} \cdot \overline{OA}$. Ὀνομάζεται δὲ ὁ κύκλος οὗτος π ο λ ι κ ὸ ς κ ύ κ λ ο ς τοῦ τριγώνου.

8-4.10 Ἁρμονικὸν τετράπλευρον

Ἐπὶ περιφερείας (O,R) θεωροῦμεν τὰ ζεῦγη τῶν σημείων (A,Γ), (B,Δ). Ἐάν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ εἶναι ευζυγεῖς πρὸς (O,R) τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ὀνομάζεται ἁ ρ μ ο ν ι κ ὸ ν τ ε τ ρ ά π λ ε υ ρ ο ν.

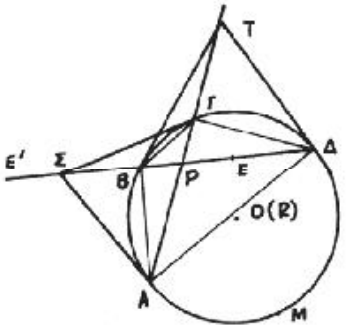
Αἱ βασικώτεραι ἰδιότητες τοῦ ἁρμονικοῦ τετραπλεύρου εἶναι αἱ κάτωθι:

① Αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου, ἤτοι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

② Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ἡ δέσμη (ΜΑ, ΜΓ, ΜΒ, ΜΔ) εἶναι ἁρμονική.

Πρὸς τούτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δέσμη (ΑΣ, ΑΡ, ΑΒ, ΑΔ) εἶναι ἁρμονική. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι τῶν

ἀντιστοίχων ἀκτίνων εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν (ΑΣ, ΑΡ, ΑΒ, ΑΔ).



③ Εἰς τὸ ἁρμονικὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$$

Ἀπόδειξις:

Ὁ κύκλος (Σ, ΣΓ) τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (Ο,R). Ἐὰν δὲ ΕΕ' διάμετρος τοῦ (Σ, ΣΤ) τὰ Ε', Ε - Β, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα καὶ ἐπειδὴ $\hat{ΕΓΕ'} = 1$ εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ αἱ ΓΕ καὶ ΓΕ' θὰ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς $\hat{ΒΓΔ}$ καὶ τῆς ἐξωτ. $\hat{ΒΓ'Δ}$. Ἄρα $\frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΒΕ}{ΕΔ}$ (1). Ὁμοίως $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΕ}{ΕΔ}$ (2). (1),(2) $\Rightarrow$ $\frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀποδειχθεῖσα σχέσις γράφεται: $ΑΒ \cdot ΓΔ = ΓΒ \cdot ΑΔ$

Ἄρα: Εἰς τὸ ἁρμονικὸν τετράπλευρον τὸ γινόμενον δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου εὑρίσκομεν ἀκόμη ὅτι:

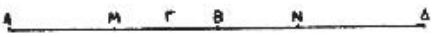
$$ΑΒ \cdot ΓΔ = ΓΒ \cdot ΑΔ = \frac{ΑΓ \cdot ΒΔ}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

928. Επί εὐθείας δίδονται τέσσερα σημεῖα A,B,Γ,Δ. Δείξατε ὅτι $(AB\Gamma\Delta)=-1 \iff \overline{MN}^2=\overline{MA}^2+\overline{N\Gamma}^2$, ὅπου M,N τά μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων AB καί $\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω ὅτι $(AB\Gamma\Delta)=-1$. Εἶναι γνωστόν ὅτι $\overline{MA}^2=\overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Delta}$ (1) (θεώρημα Newton). Ἀλλά $\overline{M\Gamma}=\overline{MN}+\overline{N\Gamma}$, $\overline{M\Delta}=\overline{MN}+\overline{N\Delta}$, $\overline{M\Delta}=\overline{MN}-\overline{N\Gamma}$ διότι $\overline{N\Delta}=-\overline{N\Gamma}$. Ἐκ τῶν ἐκέσεων αὐτῶν ἔχομεν $\overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Delta}=\overline{MN}^2-\overline{N\Gamma}^2$ (2)

$(1),(2)\Longrightarrow \overline{MN}^2=\overline{MA}^2+\overline{N\Gamma}^2$.

Ἀντιστρόφως:

Ὑποθέσωμεν ὅτι $\overline{MN}^2=\overline{MA}^2+\overline{N\Gamma}^2 \Longrightarrow \overline{MA}^2=\overline{MN}^2-\overline{N\Gamma}^2=(\overline{MN}+\overline{N\Gamma})(\overline{MN}-\overline{N\Gamma})$. Εἶναι ὅμως $\overline{MN}+\overline{N\Gamma}=M\Gamma$, $\overline{MN}-\overline{N\Gamma}=\overline{MN}+\overline{N\Delta}=\overline{M\Delta}$, ἄρα $\overline{MA}^2=\overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Delta}$, ἤτοι $(AB\Gamma\Delta)=-1$.

929. Δίδονται τά τριώνυμα $ax^2+\beta x+\gamma=0$ καί $a'x^2+\beta'x+\gamma'=0$. Ἐπί ἑνός ἄξονος λαμβάνομεν τά σημεῖα A,B μέ τετμημένας τάς ρίζας τῆς πρώτης ἐξισώσεως καί A',B' μέ τετμημένας τάς ρίζας τῆς δευτέρας ἐξισώσεως. Νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη μεταξύ τῶν συντελεστῶν ἵνα ἡ τετράς $A,B-A',B'$ εἶναι ἁρμονική.

Λύσις:

Ἔστω x_1,x_2 αἱ ρίζαι τῆς πρώτης ἐξισώσεως καί x_1',x_2' αἱ ρίζαι τῆς δευτέρας.

Εἶναι γνωστόν ὅτι $2(x_1x_2+x_1'x_2')=(x_1+x_2)(x_1'+x_2')$ (1).

Ἀλλά $x_1+x_2=-\frac{\beta}{a}$, $x_1x_2=\frac{\gamma}{a}$ (2).

$x_1'+x_2'=-\frac{\beta'}{a'}$, $x_1'x_2'=\frac{\gamma'}{a'}$

$(1),(2)\Longrightarrow 2(a\gamma'+\gamma a')=\beta\beta'$.

930. Ἐπί εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα A,B,Γ. Ἔστω A' τό συζυγές ἁρμονικόν τοῦ A πρός B,Γ. B' τό συζυγές ἁρμονικόν τοῦ B πρός A,Γ καί Γ' τό συζυγές ἁρμονικόν τοῦ Γ πρός A,B. Θά δείξωμεν ὅτι τό A εἶναι συζυγές ἁρμονικόν τοῦ A' πρός B',Γ'.

Ἀπόδειξις:

Χρησιμοποιοῦμεν τήν ἐκέσιν τοῦ Descartes.

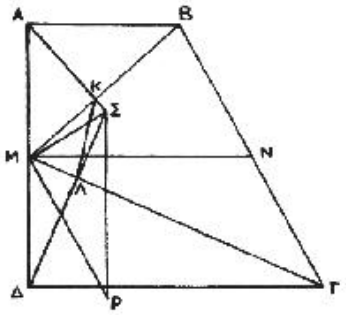
Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{2}{AB}=\frac{1}{A\Gamma}+\frac{1}{A\Gamma'}$, $\frac{2}{A\Gamma}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AB'}$, $\frac{2}{AA'}=\frac{1}{AB'}+\frac{1}{A\Gamma'}$.

Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν $\frac{2}{AA'}=\frac{1}{AB'}+\frac{1}{A\Gamma'}$. Τοῦτο εἶναι τό

ζητούμενον.

931. Ἔστω ΑΒΓΔ ὀρθογωνίου τραπέζιον ($\hat{A}=\hat{\Delta}=1^L$) καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΔ. Αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Δ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΜ, ΓΜ τέμνονται εἰς Σ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΜΣ ⊥ ΒΓ.

Ἀπόδειξις:



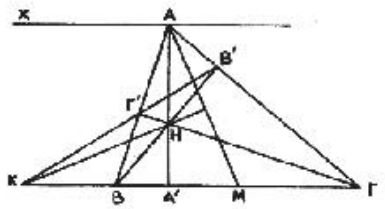
α) Φέρομεν τὴν διάμεσον ΜΝ τοῦ τραπεζίου καὶ τὰς ΜΡ, ΣΡ παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΓ, ΑΔ ἀντιστοίχως. Ἡ δέσμη (ΣΑ, ΣΔ, ΣΜ, ΣΡ) εἶναι ἁρμονική.

Ὁμοίως ἡ δέσμη (ΜΒ, ΜΓ, ΜΝ, ΜΡ) εἶναι ἁρμονική. Ἐπειδὴ δὲ τρία ζεύγη ὁμολόγων ἀκτίνων περιέχουν εὐθείας καθέτους πρὸς ἄλληλας, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ διὰ τὸ τέταρτον ζεῦγος. Ἤτοι ΣΑ ⊥ ΜΒ, ΣΔ ⊥ ΜΓ, ΣΡ ⊥ ΜΝ ⟹ ΣΜ ⊥ ΜΡ.

β) $AM^2 = M\Delta^2 = \overline{MK}\cdot\overline{MB} = \overline{M\Lambda}\cdot\overline{M\Gamma} \Longrightarrow$ ΚΒΓΛ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow M\hat{B}\Gamma = K\hat{\Lambda}M = K\hat{\Sigma}M$. Ἀλλὰ $K\hat{M}\Sigma + K\hat{\Sigma}M = 1^L$.

932. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Θέτομεν Κ = ΒΓ ∩ Β′Γ′, Η τὸ ὀρθόκεντρον καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΚΗ ⊥ ΑΜ.

Ἀπόδειξις:



α) Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ δέσμη (ΑΓ, ΑΒ, ΑΜ, Αx) εἶναι ἁρμονική. Ἡ πολική τοῦ Κ πρὸς (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἡ ΑΗ. Ἄρα (ΒΓΑ′Κ) = −1 καὶ ἡ δέσμη (ΗΒ, ΗΓ, ΗΑ′, ΗΚ) εἶναι ἁρμονική.

Αἱ προαναφερθεῖσαι δέσμαι περιέχουν τρία ζεύγη καθέτων ἀκτίνων, ἤτοι ΗΒ ⊥ ΑΓ, ΗΓ ⊥ ΑΒ, ΗΑ′ ⊥ Αx. Προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι καὶ τὸ τέταρτον ζεῦγος περιέχει εὐθείας καθέτους ΗΚ ⊥ ΑΜ.

β) Ὡς γνωστὸν ΚΑ′ · ΚΜ = ΚΓ′ · ΚΒ′ ἤτοι τὸ σημεῖον Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων ΒΓ′Β′Γ καὶ ΑΑ′Μ. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ σημεῖον Η. Ἄρα ἡ ΗΚ εἶναι κάθετος εἰς τὴν διάκεντρον ΑΜ τῶν δύο κύκλων.

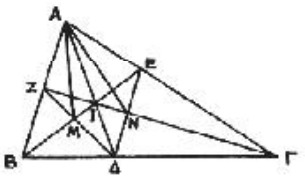
933. α) Τὸ συμμετρικὸν ἁρμονικῆς δέσμης πρὸς εὐθεῖαν εἶναι ἐπίσης ἁρμονικὴ δέσμη.

β) Ἐὰν δύο ἁρμονικαὶ δέσμαι (O.αβγδ), (O′.α′β′γ′δ′) ἔχουν ὁμολόγους εὐθείας (α, α′), (β, β′), (γ, γ′) συμμετρικὰς πρὸς εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ζεῦγος τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων (δ, δ′) περιέχει εὐθείας συμμετρικὰς ἐπίσης πρὸς (ε).

Αἱ ἀποδείξεις τῶν δύο ἀνωτέρω θεωρημάτων, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὔκολαι, ἂς γίνουν ἀπὸ τὸν μαθητήν.

934. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του. Θέτομεν $M = BE \cap \Delta Z$, $N = \Gamma Z \wedge \Delta E$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΜΑΝ.

Ἀπόδειξις:

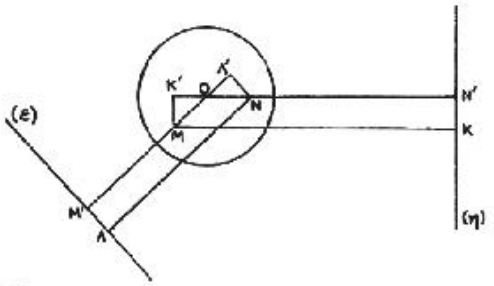


Ἡ πολικὴ τοῦ Β πρὸς (ΑΔ, ΑΓ) εἶναι ἡ ΑΝ, ἄρα ἡ δέσμη (ΑΒ, ΑΝ, ΑΔ, ΑΓ) εἶναι ἁρμονική. Ὁμοίως ἡ δέσμη (ΑΓ, ΑΜ, ΑΔ, ΑΒ). Αἱ ἀνωτέρω δέσμαι περιέχουν τρία ζεύγη ὁμολόγων ἀκτίνων συμμετρικὰς πρὸς ΑΔ: (ΑΒ, ΑΓ), (ΑΔ, ΑΔ), (ΑΓ, ΑΒ). Ἄρα λοιπὸν συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενο θεώρημα 933 θὰ εἶναι καὶ ΑΜ, ΑΝ συμμετρικαὶ πρὸς ΑΔ.

935. Θεώρημα τοῦ Salmon.

Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων δύο σημείων ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς ἑκάστου σημείου ἀπὸ τὴν πολικὴν τοῦ ἑτέρου.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω (ε) ἡ πολικὴ τοῦ Μ καὶ (η) ἡ πολικὴ τοῦ Ν.

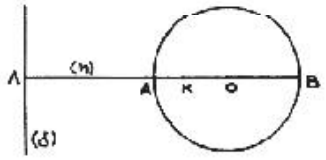
Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = \overline{ON}\cdot\overline{ON'} = R^2$, ἤ $\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON'}}$ (1).

Ἀπὸ τὸ ἐγγράψιμον ΜΚ'Λ'Ν ἔχομεν $\overline{OM}\cdot\overline{O\Lambda'} = \overline{ON}\cdot\overline{OK'} \Longrightarrow \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{O\Lambda'}}{\overline{OK'}}$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{ON'}} = \frac{\overline{O\Lambda'}}{\overline{OK'}} = \frac{\overline{OM'}+\overline{\Lambda'O}}{\overline{ON'}+\overline{K'O}} = \frac{\overline{N\Lambda}}{\overline{MK}}$.

936. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ κύκλοι πρὸς τοὺς ὁποίους δοθὲν σημεῖον Κ ἔχει πολικὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ).

Λύσις:



Τὰ κέντρα τῶν κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (η) καθέτου διὰ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν (δ).

Ἂν ΑΒ ἡ διάμετρος ἑνὸς ἐκ τῶν κύκλων εἶναι ὡς γνωστὸν Β, Α - Κ, Λ ἁρμονικὴ τετράς. Ἄρα οἱ ζητούμενοι κύκλοι ἀποτελοῦν δέσμην μὲ ὁριακὰ σημεῖα τὰ Κ, Λ (ἰδὲ 91.3).

937. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα αἱ πολικαὶ των πρὸς τρεῖς δοθέντας κύκλους νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Λύσις:

Ἔστω $M \in G$ καὶ Μ' τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν πολικῶν. Τὰ Μ, Μ' εἶναι συζυγῆ. Ἄρα ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ' τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς τρεῖς δοθέντας κύκλους. Ἄρα ἐὰν (O, R) ὁ κύκλος ποὺ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς τρεῖς δοθέντας εἶναι $G \subseteq (O, R)$ (1).

Ἀντιστρόφως:

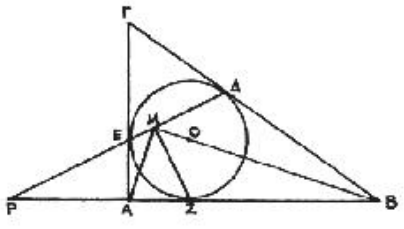
Ἔστω $N \in (O,R)$ καὶ N' τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον τοῦ N. Ἡ πολική τοῦ N ὡς πρὸς ἓν τυχόντα ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων κύκλων διέρχεται διὰ τοῦ N' διότι τὰ N, N' εἶναι ἀνάλογα. Ἄρα $N \in G \Longrightarrow (O,R) \subseteq G$ (2).

(1), (2) $\Longrightarrow$ $G = (O,R)$.

Ἤτοι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς τρεῖς δοθέντας.

938. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τῆς ὑποτεινούσης εἰς Δ καὶ τῶν καθέτων πλευρῶν $A\Gamma$ καὶ AB εἰς E καὶ Z ἀντιστοίχως. Ἔστω ZM ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔE. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\hat{AMB} = 1^L$.

Ἀπόδειξις:

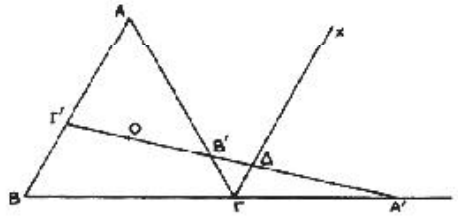


α) Ἔστω (O) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος. Ἡ πολική τοῦ Γ πρὸς (o) διέρχεται διὰ τοῦ P. Ἄρα ἡ πολική τοῦ P πρὸς (o) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Γ. Ἤτοι ἡ πολική τοῦ P πρὸς (O) εἶναι ἡ εὐθεία ΓZ. Ἡ πολική τοῦ P πρὸς τὰς εὐθείας $\Gamma A, \Gamma B$ διέρχεται διὰ τοῦ Γ καὶ τοῦ σημείου $E\Delta \cap \Gamma Z$, ἤτοι συμπίπτει πρὸς τὴν ΓZ. Ἄρα ἡ τετράς $P, Z - A, B$ εἶναι ἁρμονική. Ἐπειδὴ δὲ $PMZ = 1^L$ ἕπεται ὅτι $\hat{AMZ} = \hat{BMZ}$. Εὐκόλως ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου $EMZA$ διαπιστώνομεν ὅτι $\hat{AMZ} = \hat{AEZ} = 45°$ κ.τ.λ.

β) Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου $AEMZ$ ἔχομεν ὅτι $\hat{AMZ} = \hat{AEZ} = 45°$. Ἀλλὰ $\hat{EZA} = \hat{E\Delta Z}$ ἤτοι $\hat{E\Delta Z} = 45°$, ὅθεν $M\Delta = MZ$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\hat{M\Delta B} = \hat{MZB}$ ἤτοι $\hat{ZMB} = \hat{\Delta MB} = 45°$.

939. Διὰ τοῦ κέντρου O ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τὰς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ εἰς A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} + \frac{1}{O\Gamma'} = 0$.

Ἀπόδειξις:



Ὑποθέσωμεν ὅτι A διὰ τοῦ O εὐθεία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν AB εἰς Δ.

Εἶναι προφανῶς $O\Delta = 2O\Gamma'$. Ἀκόμη εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι τὰ σημεῖα $O, \Delta - B', A'$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα. Ἄρα κατὰ Descartes ἔχομεν $\frac{2}{O\Delta} = \frac{1}{OB'} + \frac{1}{OA'} \Longrightarrow -\frac{1}{O\Gamma'} = \frac{1}{OB'} + \frac{1}{OA'} \Longrightarrow \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} + \frac{1}{O\Gamma'} = 0$.

ΟΜΑΣ Β'.

940. Ἐπὶ εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα O, A, A_1. Ἔστω $(OAA_1A_2) = -1$, $(OA_1A_2A_3) = -1, \ldots, (OA_{n-2}A_{n-1}A_n) = -1$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(OA_{n-1}A_1P) = -1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (OAA_nP) = -1$.

Απόδειξις:

$(OA_{n-1}A_1P) = -1 \Longrightarrow \frac{2}{OA_{n-1}} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OP}$ καὶ ἔστω $(OAA_nQ) = -1 \Longrightarrow \frac{2}{OA} = \frac{1}{OA_n} + \frac{1}{OQ}$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{2}{OA_{n-1}} - \frac{1}{OA_1} = \frac{2}{OA} - \frac{1}{OA_n}$ (1).

Θέτομεν $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OA_i} = \vec{a_i}$, ὅτε ἡ (1) γίνεται $\frac{2}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a_n} \Longrightarrow \frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a}$ (2).

Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ὅτι $\frac{2}{a_{n-2}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}}$ ἢ ἀκόμη $\frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_{n-2}}$ (3).

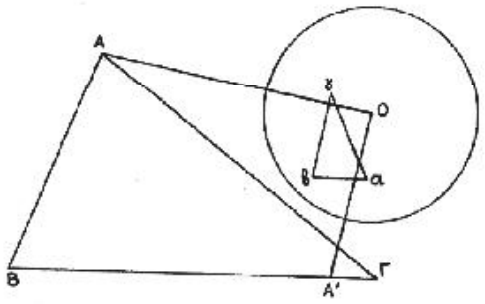
Ἡ τελευταία σχέσις (3) μᾶς δείχνει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_{n-1}}$ δὲν ἀλλάσσει ἂν ὁ n ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα. Ἤτοι θὰ εἶναι ἡ ἰδία ἂν τεθῇ $n=1$. Δηλαδὴ ἰσχύει ἡ σχέσις (2).

941. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου του. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς Ο τέμνει τὴν ΒΓ εἰς Α′. Ἀναλόγως λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Β′, Γ′. Νὰ δειχθῇ ὅτι Α′, Β′, Γ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Απόδειξις:

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (Ο) μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα R καὶ ἔστω $\overset{\Delta}{\alpha\beta\gamma}$ τὸ συζυγές τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ πρὸς (O,R). Θὰ εἶναι:

πόλος		πολική
Α		βγ
Β		γα
Γ	πρὸς (O,R)	αβ
α		ΒΓ
β		ΓΑ
γ		ΑΒ



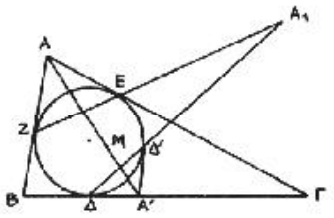
Ἄρα $\beta\gamma \perp OA \Longrightarrow \beta\gamma \parallel OA'$. Ἡ πολικὴ τοῦ Α′ διέρχεται διὰ τοῦ α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ′ ἤτοι ἐπὶ τὴν βγ. Δηλαδὴ ἡ πολικὴ τοῦ Α′ πρὸς (O,R) εἶναι τὸ ὕψος τοῦ $\hat{a\beta\gamma}$. Ἡ πολικὴ τοῦ Β′, εἶναι τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς β τοῦ $\hat{a\beta\gamma}$ καὶ τέλος ἡ πολικὴ τοῦ Γ′, εἶναι τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς γ ὕψος τοῦ $\hat{a\beta\gamma}$. Ἄρα τὰ Α′, Β′, Γ′ κεῖνται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ $\hat{a\beta\gamma}$.

942. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τὰς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ διερχομένας Cevians ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′. Ἡ πολικὴ τοῦ Α′ τέμνει τὴν ΕΖ εἰς A_1. Ἀναλόγως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα B_1, Γ_1. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Απόδειξις:

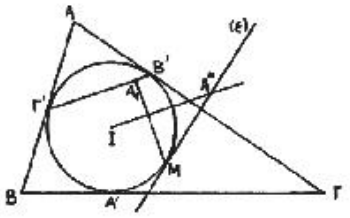
Αἱ πολικαὶ τῶν σημείων Α, Α′ διέρχονται διὰ τοῦ A_1. Ἄρα ἡ πολικὴ τοῦ A_1 εἶναι ἡ εὐθεία ΑΑ′.

Αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Μ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ πόλοι τῶν A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Μ.



943. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔστω (1) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος. Α′, Β′, Γ′ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Εἰς τυχόν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ι) φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε). Αἱ ἀχθέντες παράλληλοι ἐκ τοῦ Ι πρὸς τὰς Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ τέμνουν τὴν (ε) εἰς Α″, Β″, Γ″ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ΑΑ″, ΒΒ″, ΓΓ″ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



Ἡ πολική τοῦ Α εἶναι ὡς γνωστὸν ἡ Β′Γ′. Πολική τοῦ Α″ ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΙΑ″. Ἤτοι ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν Β′Γ′. Ἐὰν A_1 ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Β′Γ′ τὸ σημεῖον A_1 εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΑΑ″.

Ἡ προβολὴ B_1 τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Γ′Α′ εἶναι ὁ πόλος τῆς ΒΒ″ καὶ τέλος ἡ προβολὴ Γ_1 τοῦ Μ ἐπὶ τὴν Α′Β′ εἶναι ὁ πόλος τῆς ΓΓ″. Τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ὡς γνωστὸν ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Simson τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Ἄρα αἱ ΑΑ″, ΒΒ″, ΓΓ″ διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ A_1, B_1, Γ_1.

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α′.

944. $(AB\Gamma\Delta) = -1 \iff \overline{AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta} = 2\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Delta A}$.

945. $(AB\Gamma\Delta) = -1 \Longrightarrow \frac{\overline{\Gamma M}}{\overline{\Gamma\Delta}} + \frac{\overline{\Delta M}}{\overline{\Delta A}} = 2\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}$, ὅπου Μ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἰσχύει τὸ ἀντίστροφον;

946. Ἂν $(AB\Gamma\Delta) = -1$, Ο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, Ι τὸ μέσον τοῦ ΓΔ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ εἶναι $\overline{MA}\cdot\overline{MB} + \overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Delta} = 2\,\overline{MO}\cdot\overline{MI}$.
Πῶς μεταχηματίζεται ὁ τύπος ὅταν τὸ Μ συμπίπτει μὲ τὸ Α; μὲ τὸ Ο;

947. Μὲ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως δείξατε ὅτι $\overline{AB}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 = 2\,\overline{OI}^2$.

948. Ὁμοίως $\overline{IA}\cdot\overline{B\Gamma}\cdot\overline{B\Delta} + \overline{IB}\cdot\overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta} = 0$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν $\frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{B\Gamma} + \frac{1}{A\Delta} + \frac{1}{B\Delta} = 0$.

949. Τὰ σημεῖα ὅπου τυχοῦσα ἐφαπτομένη κύκλου συναντᾶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

950. Τρεῖς περιφέρειαι διέρχονται διὰ δύο σημείων. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο περιφερειῶν τέμνεται ὑπὸ τῆς τρίτης εἰς σημεῖα ἁπο-

τελοῦντα ἁρμονικὴν διαίρεσιν μὲ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

951. Δίδονται δύο γωνίες xOy, $x'O'y'$. Ὑπάρχει σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν πολικὴν πρὸς τὰς δύο γωνίας. Πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μόνον διὰ τοῦ κανόνος ταῦτα;

952. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{\frac{1}{A\Gamma} - \frac{1}{A\Delta}}{\frac{1}{AB} - \frac{1}{A\Gamma}}$.

953. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma\Delta) = \left(\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} - \dfrac{\overline{M\Gamma}}{\overline{A\Gamma}}\right) : \left(\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} - \dfrac{\overline{M\Delta}}{\overline{A\Delta}}\right)$, ὅπου M τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας AB.

954. $(AB\Gamma\Delta) = (A'B'\Gamma'\Delta') \Longrightarrow \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{A'B'}} + \dfrac{\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}}{\overline{A'\Gamma'}} + \dfrac{\overline{A\Delta}\cdot\overline{B\Gamma}}{\overline{A'\Delta'}} = 0.$

955. Ἔστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ Δ, E τυχόντα σημεῖα τῶν $A\Gamma, AB$ ἀντιστοίχως. Θέτομεν O εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $B\Delta$ καὶ ΓE καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M τῆς AO. Ἐὰν $H = M\Delta \cap \Gamma E$, $\Theta = ME \cap B\Delta$ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ $B\Gamma, H\Theta, \Delta E$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

956. Δύο κύκλοι (O) καὶ (O') τέμνονται ὀρθογωνίως. Τυχοῦσα διάμετρος AB τοῦ (O) τέμνεται ὑπὸ τοῦ (O') κατὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν M τυχὸν σημεῖον τοῦ (O) καὶ αἱ $M\Gamma, M\Delta$ τέμνουν τὸν ἴδιον κύκλον (O) εἰς E καὶ Z, δείξατε ὅτι $EZ \perp AB$.

957. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τὰς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ εἰς A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Θέτομεν α τὸ μέσον τοῦ τμήματος $B'\Gamma'$, β τὸ μέσον τοῦ $\Gamma'A'$ καὶ γ τὸ μέσον τοῦ $A'B'$ καὶ $A_1 = A\alpha \cap B\Gamma$, $B_1 = B\beta \cap \Gamma A$, $\Gamma_1 = \Gamma\gamma \cap AB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

958. Ἔστω AB διάμετρος κύκλου (O) καὶ KM κάθετος χορδή. Ἐὰν P τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O) καὶ $\Gamma = AB \cap KP$, $\Delta = AB \cap MP$ ἡ τετράς $B, A-\Gamma, \Delta$ εἶναι ἁρμονική.

959. Θεωροῦμεν τὸ πλῆρες τετράπλευρον μὲ ἀπέναντι κορυφὰς τὰ ζεύγη (A, A'), (B, B'), (Γ, Γ'). Ἐὰν P τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ θέσωμεν α, α', β, β' εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν PA, PA', PB, PB' μετὰ τῆς $\Gamma\Gamma'$ ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $\alpha A', \alpha' A, \beta B', \beta' B$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

960. Ἐπὶ περιφερείας (O) διαμέτρου AB δίδονται δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ O τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς E καὶ τὴν $B\Delta$ εἰς Z. Νὰ δειχθῇ ὅτι $E\hat{\Gamma}Z = E\hat{\Delta}Z$.

961. Ἔστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O). Ἡ ἐφαπτομένη εἰς A τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς Δ. Φέρομεν τὴν ΔO καὶ ἔστω E, Z τὰ σημεῖα τομῆς της μετὰ τῶν $AB, A\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἐὰν M καὶ N τὰ μέσα

τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ δείξατε ὅτι αἱ ΕΝ, ΖΜ, ΑΟ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

962. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τυχόν σημεῖον Α αὐτοῦ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Ρ. Διὰ τοῦ σημείου Ρ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τὸν (Ο) εἰς Β, Γ. Αἱ ἐκ τοῦ Ρ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνουν αὐτὰς εἰς Δ καὶ Ε σχηματίζουσαι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΡΕ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΔΕ ⊥ ΟΡ.

963. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Β καὶ Γ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς Δ. Ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς Α τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι ΔΕ = ΔΖ.

964. Ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Μ. Αἱ ΒΜ καὶ ΓΜ τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς Δ καὶ Ε. Δείξατε ὅτι ἡ ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Β καὶ Γ.

Διατυπώσατε καὶ ἀποδείξατε τὴν ἀντίστροφον πρότασιν.

965. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτὸ κύκλος. Θέτομεν Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἂν εἶναι Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ Κ = ΜΒ ∩ ΕΖ, Λ = ΜΓ ∩ ΕΖ δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΛ, ΓΚ, ΜΔ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

966. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ. Ἔστω Ζ = ΔΕ ∩ ΒΓ. Ἐὰν Η τὸ ὀρθόκεντρον καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ δείξατε ὅτι ΜΗ ⊥ ΑΖ.

967. Εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς Δ. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΒΔ δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΜ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Β καὶ Γ.

968. Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Α, τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, μετὰ τῆς ΒΓ, φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Δείξατε ὅτι αὗται τέμνουν τὴν ἐκ τοῦ Α διάμετρον εἰς σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς Α.

969. Ἐκ σημείου Ρ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Ο) φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΜΝ. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Μ καὶ Ν τέμνουν τὴν κάθετον εἰς Ρ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς Μ′ καὶ Ν′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι α) ΡΜ′ = ΡΝ′ καὶ β) Μ′Μ = Ν′Ν.

970. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ πρὸς τὸν κύκλον (Ο). Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου μὲ τὰ Α καὶ Β. Αἱ ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τὸν κύκλον εἰς Α′ καὶ Β′. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ′ καὶ Α′Β τέμνονται ἐπὶ

τοῦ κύκλου.

971. Ὡς γνωστόν εἶναι $(ΑΒΓΔ) = (ΓΔΑΒ) = (ΒΑΔΓ) = (ΔΓΒΑ)$. Θέτομεν $(ΑΒΓΔ) = ρ$. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(ΑΓΒΔ) = (ΔΒΓΑ) = (ΓΑΔΒ) = (ΒΔΑΓ) = 1-ρ$$
$$(ΓΑΒΔ) = (ΒΔΓΑ) = (ΑΓΔΒ) = (ΔΒΑΓ) = \frac{1}{1-ρ}$$
$$(ΒΑΓΔ) = (ΓΔΒΑ) = (ΔΓΑΒ) = (ΑΒΔΓ) = \frac{1}{ρ}$$
$$(ΒΓΑΔ) = (ΓΒΔΑ) = (ΔΑΓΒ) = (ΑΔΒΓ) = 1-\frac{1}{ρ}$$
$$(ΓΒΑΔ) = (ΒΓΔΑ) = (ΑΔΓΒ) = (ΔΑΒΓ) = \frac{1}{1-\frac{1}{ρ}}.$$

972. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἂν Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφὰς (π.χ. Α,Γ) τέμνονται ἐπὶ τῆς ΕΖ.

973. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ (Ι) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος. Αἱ κάθετοι εἰς Ι ἐπὶ τὰς ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ τέμνουν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην τοῦ (Ι) εἰς τὰ σημεῖα Μ,Ν,Ρ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι αἱ ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

974. Ἔστω Ρ ὁ πόλος τῆς χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο). Ἐὰν Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τυχοῦσα διὰ τοῦ Ρ χορδὴ τέμνει τὸν κύκλον εἰς Γ καὶ Δ, δείξατε ὅτι ἡ ΑΒ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΓΜΔ.

975. Διὰ τοῦ μέσου Μ χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) ἄγονται δύο εὐθεῖαι ΜΡ καὶ ΜΚ ὥστε ἡ ΑΒ νὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν ΡΜΚ. Ὑποτίθεται ὅτι τὰ σημεῖα Ρ καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Ρ, Κ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΒ.

976. Ἡ χορδὴ ΗΚ κύκλου (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ πόλου Τ τῆς χορδῆς ΡΣ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ χορδὴ ΡΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΚ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΣΜ διχοτομεῖ τὴν ΗΚ.

977. Ἔστω Γ τὸ μέσον χορδῆς ΑΒ καὶ ΡΚ τυχοῦσα χορδὴ διὰ τοῦ Γ. Ἐὰν Η ὁ πόλος τῆς ΑΒ δείξατε ὅτι $\hat{PHΓ} = \hat{kHΓ}$.

978. Ὑποτεθείσθω ὅτι PQ καὶ PR εἶναι δύο χορδαὶ κύκλου. Ἡ μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν PQ τέμνει τὴν PR εἰς Η. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα διὰ τοῦ Η καὶ τοῦ πόλου τῆς QR εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν PQ.

979. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Χ κύκλου τέμνει τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς Ρ. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐὰν ἡ πολικὴ τοῦ Ρ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς Σ δείξατε ὅτι ἡ ΡΧ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΜΣΧ.

980. Διὰ τοῦ μέσου Γ χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) φέρομεν τυχοῦσαν χορ-

δήν ΔΕ. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Δ καὶ Ε τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς Γ.

981. Διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον τέμνοντα τὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Κ καὶ Λ. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΚΛ αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΒΓ εἶναι συζυγεῖς πρὸς τὸν κύκλον περὶ τὸ $\hat{A}B\Gamma$.

982. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (Ι, ρ). Ἔστω Ρ τὸ διαμετρικὸν σημεῖον τοῦ Δ. Αἱ ΑΡ, ΕΡ, ΖΡ τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς Μ, Κ, Ν ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ΚΜ = ΚΝ.

983. Τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἐφάπτονται εἰς Α′, Β′, Γ′, Δ′ κύκλου (Ο). Ἐὰν $P = A'\Delta' \cap B'\Gamma'$ δείξατε ὅτι $OP \perp A\Gamma$.

ΟΜΑΣ Β′.

984. Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου δίδονται τέσσερα σημεῖα A_1, A_2, A_3, A_4 καὶ εὐθεῖα (ε). Ἡ εὐθεῖα A_iA_j τέμνει τὴν (ε) εἰς a_{ij}. Ἔστω a'_{ij} ὥστε $(a_{ij}a'_{ij}A_iA_j) = -1$. Νά δειχθῆ α) Τὰ $a'_{12}, a'_{13}, a'_{14}$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας β) Αἱ εὐθεῖαι $a'_{12}a_{34}, a'_{13}a_{24}$, $a'_{14}a'_{23}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

985. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $(A = 1^L)$ εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος (Ι), ἐφαπτόμενος τῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Μ, Ν. Δείξατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου περὶ τὸ $\hat{A}B\Gamma$ εἰς Α, ἡ ΜΝ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Ι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

986. Εἰς τὸ ἁρμονικὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ ΒΔ συμμετροδιάμεσος τῶν τριγώνων ΑΔΓ, ΑΒΓ.

987. Εἰς τὸ ἁρμονικὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔστω Ι καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Δείξατε ὅτι

α) $IA^2 = I\Gamma^2 = IB \cdot I\Delta$

β) $B\hat{I}\Delta = 2B\hat{A}\Delta$

γ) $IB + I\Delta = ZA + Z\Gamma$.

988. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου σχηματίζουν τρεῖς γωνίας. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ πολικαὶ τυχόντος σημείου Ο πρὸς τὰς ἐν λόγῳ γωνίας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

989. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Θεωροῦμεν τὰς διαγωνίους τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ. Αὗται τεμνόμεναι σχηματίζουν τρίγωνον, τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ὁποίου

εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου κύκλου.

990. Δύο πλευραὶ τριγώνου εὐθυγράμμου πρὸς ἑαυτὸ, πρὸς κύκλον (O,R), τέμνουν τὸν κύκλον εἰς τέσσερα σημεῖα καὶ σχηματίζουν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Λείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΔΓ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΑΤΟΝ 9

ΔΕΣΜΑΙ ΚΥΚΛΩΝ

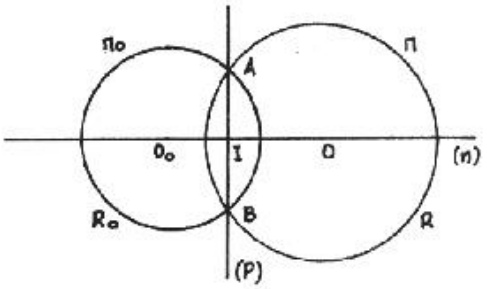
9-1

Δίδεται κύκλος π_0 καὶ εὐθεῖα (P). Τὸ σύνολον τῶν κύκλων π οἱ ὁποῖοι δέχονται ὁμοῦ μὲ τὸν π_0 τὴν εὐθεῖαν (P) ὡς ριζικὸν ἄξονα καλοῦμεν δ έ σ μ η ν. Συμβολισμός $F_\pi=(\pi_0/R)$. Ἡ εὐθεῖα (P) καλεῖται ἄξων τῆς δέσμης. Ἀναλόγως τῆς θέσεως τῆς εὐθείας (P) πρὸς τὸν κύκλον π_0 αἱ δέσμαι διακρίνονται εἰς τρία εἴδη.

9-1.1 Δέσμαι κύκλων τεμνομένων

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ (P) τέμνει τὸν κύκλον π_0 εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B. Προφανῶς κάθε περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν A καὶ B ἀνήκει εἰς τὴν δέσμην καὶ ἀντιστρόφως, (ἰδέ Σχ.).

Ἐὰν $\pi \in (\pi_0/P)$ εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ ὁ συμμετρικὸς του πρὸς (P) θὰ ἀνήκη ἐπίσης εἰς τὴν δέσμην.



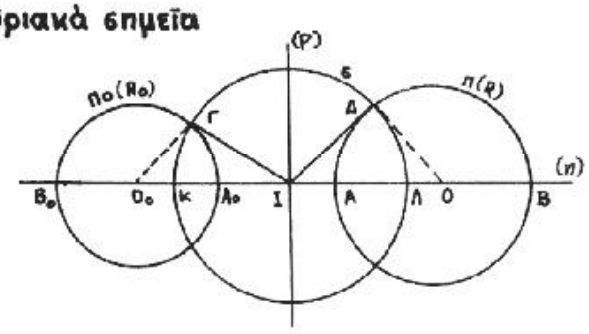
Ὁ μικρότερος κύκλος τῆς δέσμης εἶναι ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον ἴσην πρὸς AB. Ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου στὴν AB κεῖνται τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῆς δέσμης. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα (n), καὶ ὀνομάζεται εὐθεῖα τῶν κέντρων τῆς δέσμης. Τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (n) καὶ τῆς (P) ὀνομάζεται κέντρον τῆς δέσμης καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα I. Τὰ σημεῖα A καὶ B καλοῦνται **σημεῖα βάσεως**.

9-1.2 Δέσμαι κύκλων ἐφαπτομένων

Ἂν (P) ἐφάπτεται τῆς π_0 εἰς τὸ I τότε τὸ σύνολον τῶν κύκλων π τῶν ἐφαπτομένων τῆς (P) εἰς I ἀποτελεῖ τὴν δέσμην τῶν κύκλων, $F_\pi=(\pi_0/P)$.

9-1.3 Δέσμαι κύκλων μὲ ὁριακὰ σημεῖα

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (P) καὶ ὁ κύκλος π_0 δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἔστω ε τυχὼν κύκλος τῆς δέσμης (ἰδέ Σχ.). Τὸ σημεῖον I ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν $\Delta(I)=I\Gamma^2$ πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τῆς δέσμης (π_0/P), ὅπου IΓ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ἐκ τοῦ I εἰς τὸν π_0.



Μέ κέντρον Ι καὶ ἀκτῖνα ΙΓ γράφομεν περιφέρειαν ε καὶ ἔστω κ, λ τὰ σημεῖα τομῆς της μετά τῆς (π). Θά εἶναι $\mathcal{D}(I)=I\Gamma^2=I\kappa^2=I\Lambda^2=\overline{IA_0}\cdot\overline{IB_0}=\overline{IA}\cdot\overline{IB}$. Ἤτοι τὰ σημεῖα Λ,κ-$A_0$,$B_0$ καὶ κ,Λ-Α,Β ἀποτελοῦν ἁρμονικὰς τετράδας. Τὰ σημεῖα κ,λ εἶναι ὡρισμένα (διὰ τοῦ κύκλου ε) καὶ ὀνομάζονται **ρ ι ζ ι κ ά σ η μ ε ῖ α**, τῆς δέσμης $F_\pi=(\pi_0/P)$ ἢ σημεῖα τοῦ Ρ ο ν c e l e t. Παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι: $I0^2=I\Lambda^2+R^2$ (ἀπὸ τὸ $\hat{I\Delta 0}$), ἄρα δοθέντος τυχόντος R ὑπάρχουν δύο κύκλοι π(R) τῆς δέσμης συμμετρικοὶ πρὸς (ρ). Διὰ $R\to 0$ καὶ $0\to\Lambda$ καὶ οἱ συμμετρικοὶ κύκλοι τῆς δέσμης ταυτίζονται μέ τὰ σημεῖα Poncelet.

Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι δέν ὑπάρχουν δύο κύκλοι τῆς δέσμης τεμνόμενοι (Διατί;). Ἀκόμη ἐάν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου π ὁ λόγος $\frac{\kappa M}{\Lambda M}$ εἶναι σταθερὸς (δι' ὅλα τὰ Μ τοῦ κύκλου π διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, ἔστω C_π). Τοῦτο διότι τὰ σημεῖα κ,λ-Α,Β ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα καὶ $\hat{AMB}=L$. Ἄρα εἰς τὸ $\hat{\kappa M\Lambda}$ ἡ MA εἶναι διχοτόμος τῆς $\hat{\kappa M\Lambda}$ ὅθεν $\frac{\kappa M}{\Lambda M}=\frac{\kappa A}{A\Lambda}=C_\pi$. Ὁ σταθερὸς τοῦτος λόγος εἶναι χαρακτηριστικὸς δι' ἕκαστον κύκλον τῆς δέσμης καὶ ὁρίζει τοῦτον.

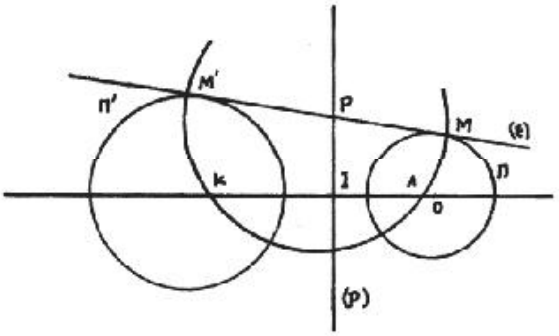
Παρατηρήσεις

Ὁ ριζικὸς ἄξων δοθέντος κύκλου χ καὶ τυχόντος κύκλου τῆς δέσμης $F_\pi=(\pi_0/P)$ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (Πάντα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὅταν λαμβάνωμεν τοὺς διαφόρους κύκλους τοῦ F_π).

Ὡς γνωστὸν οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν π,χ θά διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς (ρ) καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν π_0,χ.

9-2 Κύκλοι δέσμης ἐφαπτόμενοι δοθείσης εὐθείας

Ἔστω ἡ δέσμη $F_\pi=(\pi_0/p)$ καὶ εὐθεῖα (ε). Νά εὑρεθοῦν οἱ κύκλοι τῆς δέσμης οἱ ἐφαπτόμενοι τῆς (ε).



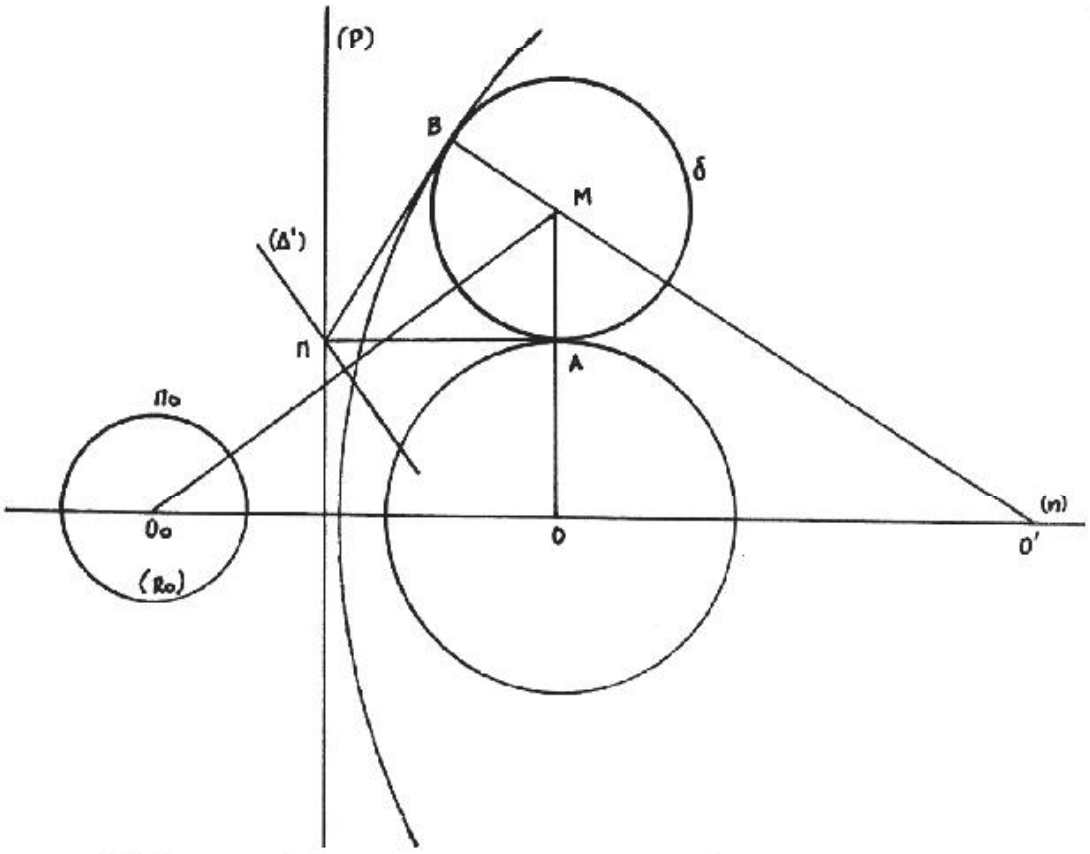
Προφανῶς τὸ $\mathcal{D}(P)$ εἶναι γνωστόν. Ἐάν δὲ π ἕνας κύκλος τῆς δέσμης ἐφαπτόμενος τῆς (ε) εἰς σημεῖον Μ θά ἔχωμεν: $\mathcal{D}(P)=PM^2$. Ἄρα ὑπάρχουν δύο σημεῖα M,M' συμμετρικὰ πρὸς ρ ὥστε $PM=PM'=\sqrt{\mathcal{D}(P)}$. κατὰ συνέπειαν ὑπάρχουν δύο κύκλοι πληροῦντες τὸ ζητούμενον. Ἡ κατασκευὴ τῶν κύκλων εἶναι εὐκολη. Εὑρίσκομεν τὰ κέντρα των ἐάν εἰς τὰ M,M' ἐπὶ τὴν ε φέρομεν τὰς καθέτους καὶ λάβωμεν τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῶν μετὰ τῆς (π).

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἐάν κ καὶ Λ τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου (P,PM) μετὰ τῆς (π) θά ἔχωμεν: $OM^2=\overline{O\Lambda}\cdot\overline{O\kappa}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ κ,Λ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς (Δ) ἕπεται ὅτι εἶναι τὰ σημεῖα Poncelet τῆς δέσμης (π_0/P). Ἐάν ε//(ρ) ὑπάρχει μόνον εἷς κύκλος τῆς δέσμης ἐφαπτόμενος τῆς (ε).

Εὐκόλως δύναται νά λυθῆ τὸ πρόβλημα ἐάν ἡ δέσμη περιέχη κύκλους τεμνομένους ἢ ἐφαπτομένους.

9-3 Κύκλοι δέσμης ἐφαπτόμενοι δοθείσης περιφερείας δ

Εἶναι γνωστόν, ἀπό τά ἀνωτέρω, ὅτι ὁ ριζικός ἄξων τῆς δ καί τυχόντος κύκλου τῆς δέ-



σμης (π_o/P) διέρχεται ἀπό σταθερόν σημεῖον τοῦτο καθορίζεται ἀπό τήν τομήν τῆς (P) καί τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (Δ') τῶν π_o, δ. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Π φέρομεν τάς ἐφαπτομένας ΠΑ, ΠΒ εἰς τόν κύκλον δ. Ἐάν εἶναι $O = (n) \cap AM$, $O' = (n) \cap BM$ οἱ κύκλοι $(O, OA), (O', O'B)$ εἶναι οἱ ζητούμενοι. Ἡ ἀπόδειξις προφανής δεδομένου ὅτι τό σημεῖον Π ἔχει δύναμιν ΠA^2 πρός τόν κύκλον π_o.

9-4 Θεώρημα

Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα οἱ κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$, τῶν ὁποίων τά κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀποτελοῦν δέσμην εἶναι:

$$\overline{O_1O_2}\, \mathcal{P}_{O_3}(M) + \overline{O_2O_3}\, \mathcal{P}_{O_1}(M) + \overline{O_3O_1}\, \mathcal{P}_{O_2}(M) = 0$$

ὅπου M τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των.

Διά τήν ἀπόδειξιν ἰδέ ἄσκ. **519 β.**

9.5 Κύκλοι τέμνοντες ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (O,R)

Ἔστω κύκλος (O,R). Ζητεῖται ἡ οἰκογένεια τῶν κύκλων (O', R'), οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως τόν (O,R). Ὡς γνωστόν θά πρέπη $\mathcal{P}_O(O') = R^2$. Ἤτοι τό σύνολον τῶν κύκλων

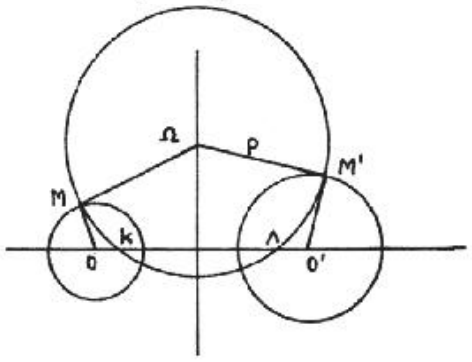
πρὸς τοὺς ὁποίους τὸ Ο ἔχει δύναμιν R^2 ταυτίζεται πρὸς τὸ σύνολον τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως τὸν (Ο,R).

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐκ τοῦ συνόλου τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως τὸν (Ο,R) ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἐκείνους τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται δι' ἑνὸς δοθέντος σημείου Α. Φέρομεν τὴν ΟΑ ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (Ο) εἰς Β,Β'. Ἐὰν Α' τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς ΟΑ μεθ' ἑνὸς ἐκ τῶν ζητουμένων κύκλων θὰ εἶναι Β,Β'- Α,Α' ἁρμονικὴ τετράς. κατὰ συνέπειαν τὸ Α' εἶναι τελείως ὡρισμένον. Ἤτοι οἱ ζητούμενοι κύκλοι ἀποτελοῦν δέσμην τοῦ 1ου εἴδους μὲ σημεῖα βάσεως τὰ Α,Α'.

9. 6 Κύκλοι ὀρθογώνιοι πρὸς δύο δοθέντας κύκλους

Ἔστω (Ο,R) καὶ (Ο',R') δοθέντες κύκλοι. Ἐὰν ὑφίσταται κύκλος (Ω,ρ) ὁ ὁποῖος τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς προηγουμένους θὰ πρέπη: $\mathcal{P}_O(\Omega) = \rho^2$ καὶ $\mathcal{P}_{O'}(\Omega) = \rho^2$. Ἄρα λοιπὸν τὸ σημεῖον Ω θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (Ο,R), (Ο',R').

Θεωροῦμεν τὴν δέσμην F τῶν (Ο,R), (Ο',R') εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις:



1η περίπτωσις. Ὅταν οἱ (Ο,R), (Ο',R') δὲν τέμνωνται. Θὰ ἔχωμεν $R^2 = \overline{OK}\cdot\overline{O\Lambda}$ Ἄρα ὁ τυχὼν κύκλος (Ω), ὁ ὁποῖος τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς (Ο), (Ο') διέρχεται ἀπὸ τὰ ὁριακὰ σημεῖα τῆς δέσμης F αὐτῶν. Ἤτοι οἱ κύκλοι τῆς ὁμοχενείας ποὺ τέμνουν ὀρθογωνίως τοὺς (Ο), (Ο') ἀποτελοῦν δέσμην Φ μὲ σημεῖα βάσεως τὰ σημεῖα Poncelet τῆς F. Αἱ δέσμαι F καὶ Φ καλοῦνται συζυγεῖς δέσμαι. Προφανῶς ἕκαστος κύκλος τοῦ Φ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους τῆς F καὶ ἀντιστρόφως.

2α περίπτωσις. Ὅταν ἡ δέσμη F ἔχη σημεῖα βάσεως τὰ Α,Β. Αὐτὰ θὰ ἀποτελοῦν τὰ σημεῖα τοῦ Poncelet τῆς δέσμης Φ, κατὰ τὴν ἀντίστροφον ἀντιστοιχίαν τῆς πρώτης περιπτώσεως.

3η περίπτωσις. Ἐὰν F περιέχει κύκλους ἐφαπτομένους τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνη καὶ διὰ τὴν δέσμην Φ. Ἡ ἐπαφὴ προφανῶς εἰς τὸ σημεῖο Ι κέντρον τῆς δέσμης F.

9-7 Κύκλος τεμνων ὀρθογωνίως τρεῖς δοθέντας κύκλους

Τὸ κέντρον του θὰ ἔχη τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς τρεῖς δοθέντας κύκλους, ἄρα θὰ ταυτίζεται πρὸς τὸ ριζικὸν κέντρον αὐτῶν. (τὸ ὁποῖον προφανῶς διὰ νὰ ὑφίσταται πρέπει τὰ κέντρα τῶν τριῶν κύκλων νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας). Ἀκτὶς τοῦ ἐν λόγω κύκλου εἶναι τὸ ἐφαπτομενικὸν τμῆμα ἐκ τοῦ ριζικοῦ κέντρου πρὸς ἕναν ἐκ τῶν κύκλων.

Θεώρημα

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τρεῖς κύκλοι τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐ-

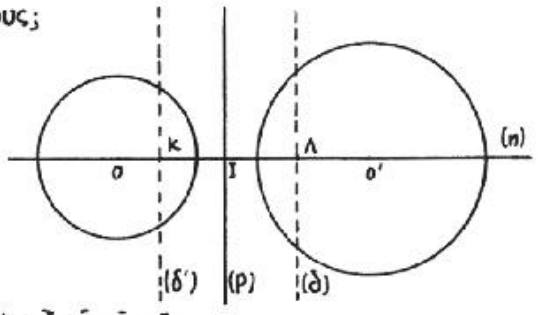
θείας, ἀποτελοῦν δέσμην εἶναι ὅπως ὑπάρχη σημεῖον ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους ἢ, ἅπερ τὸ αὐτό, νὰ ὑπάρχη κύκλος ὀρθογώνιος εἰς τοὺς ἐν λόγῳ τρεῖς κύκλους.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ.

9-8 Πολικότης εἰς τὰς δέσμας τῶν κύκλων

Πρόβλημα

Ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται ἡ δέσμη F τῶν κύκλων (O,R) καὶ (O',R'). Ὑπάρχουν σημεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν πολικὴν πρὸς τοὺς δύο κύκλους;



Ἔστω δ ἡ κοινὴ πολικὴ καὶ Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον. Θὰ εἶναι ΟΜ⊥δ, Ο'Μ⊥δ. Ἄρα δ ⊥ ΟΟ' καὶ τὸ σημεῖον Μ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΟ'. Ἐπὶ τῆς δ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ' ὅτε ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ' θὰ τέμνη ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους (O),(O'). Ἤτοι ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ' θὰ ἀνήκη εἰς τὴν δέσμην Φ τὴν συζυγῆ τῆς F.

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι:

1. Ἡ δέσμη F εἶναι τοῦ πρώτου εἴδους (οἱ κύκλοι (O),(O') τέμνονται) μὲ σημεῖα βάσεως τὰ Α,Β. Διὰ τὴν δέσμην Φ τὰ σημεῖα Α,Β εἶναι τὰ σημεῖα Poncelet. Ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει κύκλος τῆς Φ ὁ ὁποῖος νὰ ἔχη κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν μεσοκάθετον, ἐπὶ τὴν ΑΒ (μὲ τὴν ΟΟ'). Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει σημεῖον Μ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τὴν αὐτὴν πολικὴν πρὸς τοὺς κύκλους (O), (O').

2. Ἡ δέσμη περιέχει κύκλους ἐφαπτομένους. Τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι τὸ ζητούμενον.

3. Ἡ δέσμη ἔχει ὁριακὰ σημεῖα τὰ κ,Λ. Ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΜ' ἀνήκει εἰς τὴν Φ. Ἄρα διέρχεται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων κ,Λ. Τὸ σημεῖον κ καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ὁ ἐπὶ τὴν ΟΟ' εἰς Λ εἶναι, προφανῶς, συζυγῆ καὶ πρὸς τοὺς δύο κύκλους (O), (O') καὶ γενικῶς πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τῆς F.

Ἄρα ἡ πολικὴ τοῦ κ ὡς πρὸς τοὺς κύκλους τῆς F ταυτίζεται μὲ τὴν κάθετον εἰς Λ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων (n). Καὶ τ' ἀνάπαλιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ 10

ΔΙΚΤΥΑ ΚΥΚΛΩΝ

10 - 1 Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν δίκτυον κύκλων ἓν σύνολον κύκλων πρὸς τοὺς ὁποίους ἓν ἀκριβῶς σημεῖον I τοῦ ἐπιπέδου των ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν p.

Τὸ σημεῖον I καλεῖται κέντρον τοῦ δικτύου ἐνῷ ἡ δύναμις p δύναμις τοῦ δικτύου.

Συμβολισμός. Κάθε δίκτυον συμβολίζεται ἀπὸ τὸ κέντρον του καὶ ἀπὸ τὴν δύναμίν του, γράφομεν:

$$(I/p) = \{ (O,R) / \mathcal{D}_{O,R}(I) = p \}$$

Ἐὰν $p = R^2$ κάθε κύκλος τοῦ δικτύου εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον (I,R). Ἀντιστρόφως, κάθε ὀρθογώνιος κύκλος εἰς τὸν (I,R) ἀνήκει εἰς τὸ δίκτυον (I/R^2).

Ἐὰν $p = 0$, κάθε κύκλος τοῦ δικτύου θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου I.

Ἐὰν $p < 0$, οἱ κύκλοι τοῦ δικτύου δὲν εἶναι ὀρθογώνιοι ἐπὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

10-2 Θεώρημα

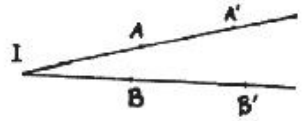
Ἀπὸ δύο σημεῖα A καὶ B τοῦ ἐπιπέδου μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ I διέρχεται ἀκριβῶς ἕνας κύκλος τοῦ δικτύου. (I/p).

Ἀπόδειξις:

Ἐὰν $p=0$, ὁ ἐν λόγῳ κύκλος εἶναι προφανῶς ὁ διερχόμενος διὰ τῶν A,B,I.

Ἐὰν $p \neq 0$, ἐπὶ τῶν εὐθειῶν IA καὶ IB λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα A' καὶ B' ὥστε:

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IB} \cdot \overline{IB} = p$$



Ἂν Γ ὀνομασθῇ ὁ κύκλος διὰ τῶν σημείων A,B,A',B' εἶναι προφανῶς $\Gamma \in (I/p)$. Ἐκ τοῦ μονοτίμου δὲ ὁρισμοῦ τῶν A',B' βλέπομεν ὅτι ὁ Γ εἶναι μοναδικός.

10 - 3 Θεώρημα

Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο τυχόντων κύκλων τοῦ δικτύου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ I.

10-4 Θεώρημα

Ὅλοι οἱ κύκλοι τῆς δέσμης, τῆς ὁριζομένης ἀπὸ δύο τυχόντας κύκλους τοῦ δικτύου, ἀνήκουν εἰς τὸ δίκτυον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω π,π' δύο τυχόντες κύκλοι τοῦ δικτύου, μέ ριζικόν ἄξονα (ρ). Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἡ εὐθεῖα (ρ) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Ι. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι $\pi_1 \in (\pi/\rho)$. Τὸ σημεῖον Ι ὡς σημεῖον τοῦ ἄξονος (ρ) ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους π καὶ π_1. Ἄρα ὁ κύκλος $\pi_1 \in (I/\rho)$.

10-5 Θεώρημα

Θεωροῦμεν τὰ δίκτυα (Ι/ρ), (Ι'/ρ') καὶ τυχὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου των. Διὰ τοῦ σημείου Α διέρχεται ἀκριβῶς εἷς κύκλος ἀνήκων εἰς ἀμφότερα τὰ δίκτυα.

Ἀπόδειξις:

Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΙΑ καὶ Ι'Α ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε: $\overline{IA}\cdot\overline{IB} = \rho$, $\overline{I'A}\cdot\overline{I'B} = \rho'$. Ὁ κύκλος διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ εἶναι κύκλος ἀμφοτέρων τῶν δικτύων καὶ εἶναι μοναδικὸς διότι τὰ Β καὶ Γ ὁρίζονται μοναδίμως.

10-6 Θεώρημα

Τὸ σύνολον τῶν κοινῶν κύκλων τῶν δικτύων (Ι/ρ), (Ι'/ρ') σχηματίζουν δέσμην.

Ἀπόδειξις

Ἂς θεωρήσωμεν ἕν κύκλον π ἀνήκοντα εἰς ἀμφότερα τὰ δίκτυα καὶ τὴν δέσμην (π/ΙΙ'). Θὰ δείξωμεν ὅτι κάθε κύκλος π' ἀνήκων εἰς ἀμφότερα τὰ δίκτυα εἶναι κύκλος τῆς δέσμης (π/ΙΙ').

Πράγματι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων π,π' συμφώνως πρὸς τὸ Θεώρημα 10-3 διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι' ἤτοι συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ΙΙ'. Εἶναι προφανὲς δὲ ὅτι κάθε κύκλος τῆς δέσμης (π/ΙΙ') ἀνήκει εἰς τὸ δίκτυον.

10-7 Θεώρημα

1. Ἐὰν Α καὶ Β τυχόντα σημεῖα τὸ σύνολον τῶν κύκλων (Ο,R) διὰ τοὺς ὁποίους:

$$\frac{\mathcal{P}_\circ(A)}{\lambda} = \frac{\mathcal{P}_\circ(B)}{\mu}$$

ὅπου $\lambda,\mu \in R$ ἀποτελοῦν δίκτυον.

2. Ἐὰν Α,Β καὶ Γ τυχόντα σημεῖα, τὸ σύνολον τῶν κύκλων (Ο,R) διὰ τοὺς ὁποίους:

$$\frac{\mathcal{P}_\circ(A)}{\lambda} = \frac{\mathcal{P}_\circ(B)}{\mu} = \frac{\mathcal{P}_\circ(\Gamma)}{\nu}$$

ὅπου $\lambda,\mu,\nu \in R$ ἀποτελοῦν δέσμην.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ **1.** μέρους ἰδὲ ἄσκησιν **526.**

Σημειώνομεν ἀκόμη ὅτι τὸ δίκτυον εἶναι τὸ **(Ι/ΙΑ·ΙΒ)** ὅπου $\frac{AI}{IB} = -\frac{\lambda}{\mu}$.

Διὰ τὸ **2.** μέρος

Ἂς ὀνομάσωμεν G τὸ δίκτυον τῶν κύκλων ποὺ ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν:

$$\frac{\mathcal{P}_\circ(A)}{\lambda} = \frac{\mathcal{P}_\circ(B)}{\mu} \qquad (1)$$

καί G' τό δίκτυον τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τήν

$$\frac{\Delta_0(A)}{\lambda} = \frac{\Delta_0(\Gamma)}{\nu} \qquad (2)$$

Τό σύνολον F τῶν κύκλων πού ἐπαληθεύουν συγχρόνως τάς σχέσεις (1) καί (2) ἀποτελεῖ συμφώνως πρός τό θεώρημα 10-6 δέσμην κύκλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

991. Δίδονται τρεῖς κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ τῆς δέσμης F. Ἐάν κύκλος (O,R) τέμνῃ αὐτούς εἰς A_1,B_1, A_2,B_2, A_3,B_3 ἀντιστοίχως, νά δειχθῇ ὅτι αἱ χορδαί A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω (P) ὁ ριζικός ἄξων τῆς δέσμης F καί $M=A_1B_1\cap(P)$. Τό σημεῖον M θά εἶναι ριζικόν κέντρον τῶν $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O,R)$. Ὁμοίως ριζικόν κέντρον τῶν $(O_1,R_1),(O_3,R_3),(O,R)$. Ἄρα διά τοῦ M διέρχεται καί ἡ εὐθεία A_3B_3.

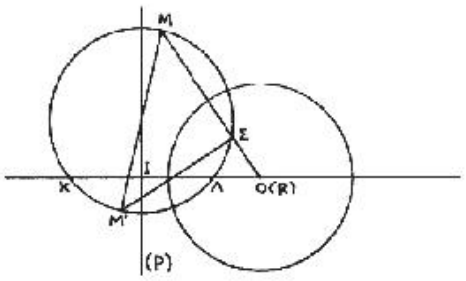
992. Ἡ κοινή ἐφαπτομένη AB δύο κύκλων τέμνει τρίτον κύκλον τῆς δέσμης αὐτῶν εἰς Γ καί Δ. Νά δειχθῇ ὅτι $(AB\Gamma\Delta)=-1$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω M τό σημεῖον τομῆς της AB μετά τοῦ ριζικοῦ ἄξονος. Εἶναι προφανῶς $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2=\overline{M\Gamma}\cdot\overline{M\Delta}$. Ἄρα κατά τό θεώρημα τοῦ Newton τά A,B-Γ,Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα.

993. Αἱ πολικαί δοθέντος σημείου M ὡς πρός τούς κύκλους δέσμης F διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου M'. Ὁ ριζικός ἄξων δέ τοῦ συστήματος διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμον τμῆμα MM'.

Ἀπόδειξις:



Θεωροῦμεν τόν κύκλον τόν διερχόμενον διά τῶν ὁριακῶν σημείων K, Λ καί τοῦ σημείου M. Τέμνει οὗτος ὀρθογωνίως ὅλους τούς κύκλους τῆς δέσμης F καί κατά συνέπειαν καί τόν τυχόντα κύκλον (O,R) τῆς F. Ἡ εὐθεία OM τέμνει τόν κύκλον KΛM εἰς Σ. Ἄρα τά M,Σ εἶναι συζυγῆ πρός (O,R). Ἡ πολική τοῦ M εἶναι κάθετος ἐπί τήν MΣ εἰς Σ. Ἄρα θά τέμνῃ τόν κύκλον KΛM εἰς τό ἀντιδιαμετρικόν σημεῖον τοῦ M. Ἤτοι ἡ πολική τοῦ M πρός ὅλους τούς κύκλους τῆς δέσμης διέρχεται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου M'. Ἐφόσον δέ ἡ MM' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου KΛM θά διχοτομῆται ὑπό τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (P) τῆς δέσμης F.

994. Ἔστω K,Λ τά ὁριακά σημεῖα δέσμης κύκλων F. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐφαπτομενικόν τμῆμα ἐκ τοῦ K πρός τυχόντα κύκλον τῆς δέσμης F δι-

χοτομεῖται ὑπό τοῦ ριζικοῦ ἄξονος της δέσμης.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω (O,R) τυχών κύκλος τῆς δέσμης καί (P) ὁ ριζικός ἄξων. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ΚΑ τοῦ κύκλου (O,R) τέμνει τόν (P) εἰς Μ. Θά εἶναι $MK^2 - MA^2$ διότι ὁ σημειακός κύκλος κ καί ὁ (O,R) ἔχουν ριζικόν ἄξονα τόν (P).

995. Ἔστω F,F′ δύο δέσμαι κύκλων. Ἐάν ἔχουν κοινόν κύκλον τότε καί αἱ συζυγεῖς αὐτῶν Φ,Φ′ θά ἔχουν ἐπίσης κοινόν κύκλον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω $(O_1,R_1), (O,R) \in F$ καί $(O_2,R_2), (O,R) \in F'$. Ὡς γνωστόν ὑπάρκει κύκλος (K,ρ) ὀρθογώνιος εἰς τούς $(O,R), (O_1,R_1), (O_2,R_2)$. Ἐφόσον δέ $F \neq F'$ ὁ (K,ρ) εἶναι μοναδικός.

Εἶναι δέ προφανές ὅτι $(K,\rho) \in \Phi \wedge (K,\rho) \in \Phi'$.

Θά ἰσχύῃ βεβαίως καί τό ἀντίστροφον. Δηλαδή ἄν Φ,Φ′ ἔχουν κοινόν κύκλον καί αἱ F,F′ θά ἔχουν ἐπίσης κοινόν κύκλον.

Συμπέρασμα:

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος πρακύπτει τό συμπέρασμα:

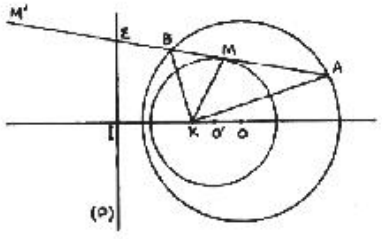
Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο δέσμαι F,F′ ἔχουν κοινόν κύκλον εἶναι ὅπως ὑφίσταται κύκλος ὀρθογώνιος εἰς τάς F,F′.

996. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τά ὕψη. Ἐάν Ρ τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου νά δειχθῇ ὅτι αἱ κύκλοι ΑΔΡ, ΒΕΡ, ΓΖΡ ἀγήκουν εἰς τήν αὐτήν δέσμην.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Η τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὡς γνωστόν εἶναι $\overline{HA}\cdot\overline{H\Delta} = \overline{HB}\cdot\overline{HE} = \overline{H\Gamma}\cdot\overline{HZ}$. Ἤτοι τό σημεῖον Η ἔχει ἴσας δυνάμεις πρός τούς τρεῖς κύκλους. Ὁμοίως τό σημεῖον Ρ ἔχει ἴσας δυνάμεις (μηδέν) πρός τούς κύκλους. Ἄρα, ἐπλέον ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἔχοντα ἴσας δυνάμεις πρός τούς τρεῖς κύκλους, αἱ ἐν λόγῳ κύκλοι ἀποτελοῦν δέσμην.

997. Ἡ χορδή ΑΒ κύκλου (O) ἐφάπτεται εἰς Μ κύκλου (Ο′). Ἐάν κ ἓν ἐκ τῶν σημείων Poncelet τῆς δέσμης τῶν (O),(Ο′) τότε ἡ κΜ διχοτομεῖ τήν γωνίαν τῶν εὐθειῶν κΑ, κΒ.



Ἀπόδειξις:

Ἡ ΑΒ τέμνει τόν ριζικόν ἄξονα ἔστω εἰς Σ. Ὡς γνωστόν ὁ κύκλος (Σ,ΣΜ) διέρχεται διά τῶν σημείων Poncelet τῆς δέσμης. Εἶναι δέ $\Sigma M^2 = \overline{\Sigma B}\cdot\overline{\Sigma A}$. Ἄρα ἄν ΣΜ = ΣΜ′ θά εἶναι καί (M′MBA) = −1. Ἐπειδή δέ $M\hat{\kappa}M' = 1^L$, ἕπεται ὅτι ἡ κΜ εἶναι διχοτόμος τῶν εὐθειῶν κΑ, κΒ.

998. Δίδονται τρεῖς κύκλοι $(O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3)$ τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καί F_3, F_1, F_2 αἱ ὁριζόμεναι ὑπ' αὐτῶν κατά ζεύγη

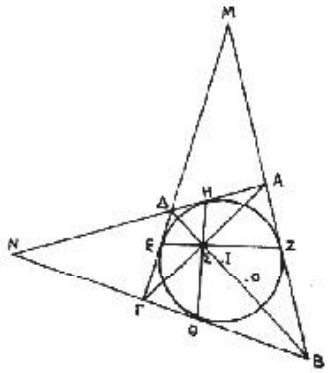
ἀντιστοίχως δέσμαι. Νά δειχθῆ ὅτι τά ὁριακά σημεῖα αὐτῶν (ἐξ) εἶναι ὁμοκυκλικά.

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν ὑπάρχει εἷς ἀκριβῶς κύκλος (O,R) ἀρεσγάμμος εἰς τούς (O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3). Ὁ κύκλος αὐτός ὡς εἶναι γνωστόν διέρχεται διά τῶν ὁριακῶν σημείων τῶν δεσμῶν F_1, F_2, F_3.

999. Ἐάν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O) καί περιγεγραμμένον περί κύκλον (I), νά δειχθῆ ὅτι τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὁριακῶν σημείων τῆς δεσμης τῶν $(O),(I)$.

Ἀπόδειξις:



α) Ἡ πολική τοῦ Σ πρός (O) εἶναι ἡ εὐθεία MN, ἄρα $O\Sigma \perp MN$. Ἡ πολική τοῦ Σ πρός (I) εἶναι ἐπίσης ἡ MN, ἄρα $\Sigma I \perp MN$. Ἤτοι Σ, I, O ἐπ' εὐθείας· ἐπειδή δέ τό Σ ἔχει τήν αὐτήν πολικήν πρός δύο κύκλους ἕπεται ὅτι εἶναι ἓν ἐκ τῶν σημείων Poncelet τῆς δέσμης αὐτῶν.

β) Θέτομεν M, N τά σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Εἶναι γνωστόν ὅτι αἱ ἐναῦσαι τά σημεῖα ἐπαφῆς ἐπί τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διά τοῦ σημείου τομῆς Σ τῶν διαγωνίων. Ἡ πολική τοῦ M ὡς πρός (I) εἶναι ἡ εὐθεία EZ. Ἡ πολική δέ τοῦ ἰδίου σημείου M πρός (O) εἶναι ἡ $N\Sigma$. Εἶναι γνωστόν ὅμως (ἄσκ. 993) ὅτι αἱ πολικαί τοῦ M ὡς πρός τούς κύκλους τῆς δέσμης τέμνονται ἐπί τοῦ κύκλου $MK\Lambda$ (ὅπου K, Λ σημεῖα τοῦ Poncelet) καί κατά τό διαμετρικόν τοῦ M. Ἐπαναλαμβάνομεν τούς ἰδίους συλλογισμούς διά τό σημεῖον N. Ἀλλά τότε οἱ κύκλοι $MK\Lambda$, $NK\Lambda$ πλήν τῶν K, Λ κοινῶν σημείων ἔχουν κοινόν σημεῖον καί τό Σ. Τοῦτο δέν δύναται νά συμβαίνῃ ἄρα τό Σ εἶναι ἓν ἐκ τῶν σημείων τοῦ Poncelet τῆς δέσμης τῶν $(I),(O)$.

1000. Δίδεται δέσμη κύκλων F. Ἐάν K ἓν ἐκ τῶν ὁριακῶν σημείων καί M σημεῖον ἑνός κύκλου (O,R) τῆς δέσμης, τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ M ἀπό K εἶναι γραμμική συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως τοῦ M ἀπό τόν ριζικόν ἄξονα.

Ἀπόδειξις:

Θεωροῦμεν τούς κύκλους (O,R) καί $(K,\kappa o)$. Ἐάν MM' ἡ ἀπόστασις τοῦ M ἀπό τόν ριζικόν ἄξονα ἔχομεν ὡς γνωστόν $\mathcal{D}_K(M) - \mathcal{D}_O(M) = 2\overline{K\Theta}\cdot\overline{M'M} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow KM^2 = 2\overline{K\Theta}\cdot\overline{M'M}$.

ΟΜΑΣ Β'.

1001. Θεωροῦμεν τούς κύκλους (O_1,R_1) καί (O_2,R_2). Νά εὑρεθῆ τό σύνολον $G = \{ M \mid \mathcal{D}_{O_1}(M) : \mathcal{D}_{O_2}(M) = \kappa \}$.

Λύσις:

Θεωρούμεν τόν κύκλον (O_3,R_3) τής δέσμης τών $(O_1),(O_2)$ άπό τήν εκέσιν $\frac{\overline{O_3O_2}}{1}=\frac{\overline{O_3O_1}}{-\kappa}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\kappa-1}$.

Ώς γνωστόν είναι $\overline{O_2O_3}\cdot\mathcal{D}_{O_1}(M)+\overline{O_3O_1}\cdot\mathcal{D}_{O_2}(M)+\overline{O_1O_2}\cdot\mathcal{D}_{O_3}(M)=0$ ή $\mathcal{D}_{O_1}(M)-\kappa\mathcal{D}_{O_2}(M)=(1-\kappa)\mathcal{D}_{O_3}(M)$ (1).

Άλλά έξ υποθέσεως είναι $\mathcal{D}_{O_1}(M)-\kappa\mathcal{D}_{O_2}(M)=0$. Ήτοι $\mathcal{D}_{O_3}(M)=0$ καί ωνε πώς $M\in(O_3,R_3)$.

Αντιστρόφως:

Θεωρούμεν τυχόν σημείον $N\in(O_3,R_3)$. Θά είναι $\mathcal{D}_{O_3}(N)=0$. Από τήν (1) διαπιστώνομεν ότι $\frac{\mathcal{D}_{O_1}(N)}{\mathcal{D}_{O_2}(N)}=\kappa$. Ήτοι $N\in G$.

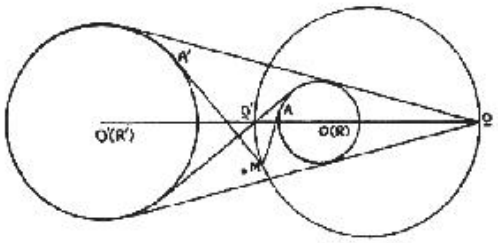
Όθεν $G=(O_3,R_3)$.

1002. Έστω Ω καί Ω′ τό έξωτερικόν καί έσωτερικόν κέντρον όμοιοθεσίας δύο κύκλων (O,R) καί (O',R').

Ορισμός: Ονομάζομεν κύκλον όμοιότητος τών $(O,R),(O',R')$ τόν κύκλον διαμέτρου ΩΩ′.

Θά δείξωμεν ότι ό κύκλος όμοιότητος τών $(O,R),(O',R')$ άνήκει είς τήν δέσμην αύτών.

Απόδειξις:

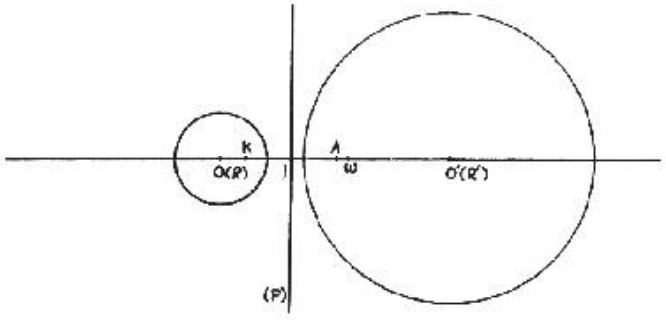


Είναι ώς γνωστόν $(O'\Omega'\Omega)=-1$. Επειδή δέ $\Omega'M\Omega=1^L$, όπου M τυχόν σημείον τού κύκλου όμοιότητος θά είναι $M\Omega'$ διχοτόμος τής $\widehat{O'MO}$. Άρα $\frac{O'M}{OM}=\frac{R'}{R}$. Φέρομεν τάς MA,MA' έφαπτομένας είς τούς κύκλους $(O),(O')$. Εύκόλως διαπιστώνομεν ότι $\overset{\triangle}{OAM}\sim\overset{\triangle}{O'A'M}\Longrightarrow\frac{AM^2}{A'M^2}=\frac{R^2}{R'^2}$ ή $\mathcal{D}_O(M):\mathcal{D}_{O'}(M)=\frac{R^2}{R'^2}$, ήτοι βάσει τής προηγουμένης άσκήσεως, τό σημείον M κείται έπί περιφερείας τής δέσμης τών $(O),(O')$.

1003. Ριζικός κύκλος δύο κύκλων $(O,R),(O',R')$.

Ορισμός: Ονομάζομεν ριζικόν κύκλον τών κύκλων $(O,R),(O',R')$ τό σύνολον $G=\{M\mid\mathcal{D}_O(M):\mathcal{D}_{O'}(M)=-1\}$.

Συμφώνως πρός τήν άσκησιν 1001 τό σύνολον G είναι κύκλος τής δέσμης τών $(O),(O')$ τού όποίου τό κέντρον ω θά δοθή άπό τήν σχέσιν $\frac{\overline{O'\omega}}{1}=\frac{\overline{\omega O}}{-1}=\frac{\overline{OO'}}{-2}$. Ήτοι ω τό μέσον τής διακέντρου OO'. Η άκτίς r_o τού έν λόγω κύκλου εύκόλως εύρίσκεται ότι ίσούται $r_o=\frac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2)-d^2}$, όπου $d=OO'$.



Ἡ ὕπαρξις τοῦ κύκλου (ω, r_0) ἐξαρτᾶται φυσικὰ ἀπὸ τὸ πρόσημον τῆς παραστάσεως $\Delta = 2(R^2+R'^2) - d^2$.

α) Ὑποθέσωμεν ὅτι $d > R+R'$. Ἕνας ἁπλὸς ὑπολογισμὸς μᾶς δίδει $OI = \frac{d^2-R'^2+R^2}{2d}$. Ἄρα $\mathcal{D}(I) = |K^2| = |\Lambda^2| = \left(\frac{d^2-R'^2+R^2}{2d}\right)^2 - R^2 = \frac{d^4+R'^4+R^4-2(d^2R'^2+d^2R^2+R^2R'^2)}{4d^2} = \frac{d^4+(R'^2-R^2)^2-2d^2(R^2+R'^2)}{4d^2}$.

Ἂν $\Delta \geqslant 0 \Longrightarrow 2(R^2+R'^2) \geqslant d^2$, ἄρα $|\Lambda^2| \leqslant \frac{d^4+(R'^2-R^2)^2-d^4}{4d^2} = \left(\frac{R'^2-R^2}{2d}\right)^2 \Longrightarrow |\Lambda| \leqslant \frac{|R'^2-R^2|}{2d} = |\omega|$.

Ἤτοι διὰ νὰ ὑφίσταται ὁ κύκλος (ω, r_0) πρέπει τὸ μέσον ω τῆς διακέντρου OO' νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τμήματος $K\Lambda$.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

β) Ἂν $d = R+R'$. Ἔχομεν $\Delta = (R+R')^2 + (R-R')^2 - d^2$ ἢ $\Delta = (R-R')^2$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑφίσταται ὁ (ω, r_0) καὶ εἶναι $r_0 = \frac{|R-R'|}{2}$.

γ) Ἂν $|R-R'| < d < R+R'$. Εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι $\Delta > 0$.

δ) Ἂν $|R-R'| = d$. Πάλιν $\Delta > 0$ καὶ $r_0 = \frac{R+R'}{2}$.

ε) Ἂν $|R-R'| > d$. Θὰ εἶναι, ὡς εὐκόλως εὑρίσκομεν $\Delta > 0$.

1004. Κύκλοι ἀντιομοιότητος.

Ὁρισμός: Ὀνομάζομεν οὕτω τοὺς δύο κύκλους μὲ κέντρα O καὶ O' τοὺς ἀνήκοντας εἰς τὴν δέσμην τῶν $(O,R), (O',R')$.

Ἐὰν οἱ κύκλοι (O,R) καὶ (O',R') τέμνωνται ὑφίστανται καὶ οἱ δύο κύκλοι ἀντιομοιότητος. Ἂν δὲν τέμνωνται τότε ἓν ἐκ τῶν O, O' εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ἀριακῶν σημείων τῆς δέσμης τῶν $(O,R), (O',R')$ καὶ τότε ὁ ἀντίστοιχος κύκλος ἀντιομοιότητος δὲν ὑφίσταται (εἶναι φανταστικός).

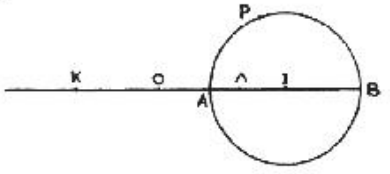
Ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα:

Οἱ κύκλοι ἀντιομοιότητος τέμνονται ὀρθογωνίως.

Διότι, οἱ δύο κύκλοι ἀντιομοιότητος καὶ ὁ κύκλος ὁμοιότητος ἀποτελοῦν δέσμην. Ἄρα ὁ κύκλος ὁμοιότητος διέρχεται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν κύκλων ἀντιομοιότητος, ἔστω A, B. Ὅθεν ἡ γωνία OAO' εἶναι ὀρθή.

1005. Δίδεται ἡ ἁρμονικὴ τετρὰς $K, \Lambda - A, B$ μὲ λόγον $\frac{\overline{KA}}{A\Lambda} = \mu \neq 1$. Ἐὰν I τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\overline{IK}}{I\Lambda} = \mu^2$.

Ἀπόδειξις:



Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν O τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $K\Lambda$, θὰ ἰσχύῃ $O\Lambda^2 = OK^2 = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$ (Σχέσις τοῦ Newton).

Ἄρα οἱ σημειακοὶ κύκλοι K, Λ καὶ ὁ κύκλος (I) διαμέτρου AB ἀποτελοῦν δέσμην. Ἐὰν $P \in (I)$ θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς 9.4 $\overline{\Lambda I}\cdot\mathcal{D}_K(P) + \overline{IK}\cdot\mathcal{D}_\Lambda(P) + \overline{K\Lambda}\cdot\mathcal{D}_I(P) = 0$ ἢ $\frac{\overline{IK}}{I\Lambda} = \frac{\mathcal{D}_K(P)}{\mathcal{D}_\Lambda(P)} = \frac{KP^2}{\Lambda P^2} = \mu^2$.

1006. Διὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Ὑποθέτομεν M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\mathcal{D}_I(M) = \frac{KM^2-\mu^2\Lambda M^2}{1-\mu^2}$. β) Ὁ κύκλος (I) χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο περιοχὰς ὥστε νὰ ἰσχύουν εἰς αὐτὰς ἀντιστοίχως αἱ σχέσεις $\frac{KM}{\Lambda M} > \mu$, $\frac{KM}{\Lambda M} < \mu$.

Ἀπόδειξις:

α) Εἰς τὸ σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

$\overline{\Lambda\Gamma}\cdot\mathcal{D}_K(M)+\overline{\Gamma K}\cdot\mathcal{D}_\Lambda(M)+\overline{K\Lambda}\cdot\mathcal{D}_\Gamma(M)=0$ ἢ $-\overline{\Gamma\Lambda}\cdot KM^2+\overline{\Gamma K}\cdot\Lambda M^2+(\overline{\Gamma\Lambda}-\overline{\Gamma K})\,\mathcal{D}_\Gamma(M)=0$. Διαιροῦμεν διὰ τοῦ $\overline{\Gamma\Lambda}$. Θὰ ἔχωμεν $-KM^2+\mu^2\cdot\Lambda M^2+(1-\kappa^2)\,\mathcal{D}_\Gamma(M)=0\Longrightarrow\mathcal{D}_\Gamma(M)=\frac{KM^2-\mu^2\cdot\Lambda M^2}{1-\mu^2}$.

β) Ὑποθέσωμεν ὅτι $1-\mu^2>0$.

1. Ἔστω Μ ἐκτὸς τοῦ κύκλου Γ. Θὰ εἶναι $\mathcal{D}_\Gamma(M)>0$. Ἄρα $KM^2-\mu^2\cdot\Lambda M^2>0$ ὁπότε $\frac{KM}{\Lambda M}>\mu$.

Ἀντιστρόφως. Ἂν $\frac{KM}{\Lambda M}>\mu$, προκύπτει ὅτι $\mathcal{D}_\Gamma(M)>0$ ἤτοι Μ ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

2. Ἔστω Μ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Θὰ εἶναι $\mathcal{D}_\Gamma(M)<0$, ἄρα $KM^2-\mu^2\cdot\Lambda M^2<0\Longrightarrow\frac{KM}{\Lambda M}<\mu$

Ἀντιστρόφως: Ἂν $\frac{KM}{\Lambda M}<\mu$, προκύπτει ὅτι $\mathcal{D}_\Gamma(M)<0$, ἤτοι Μ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $1-\mu^2<0$

Παρατήρησις:

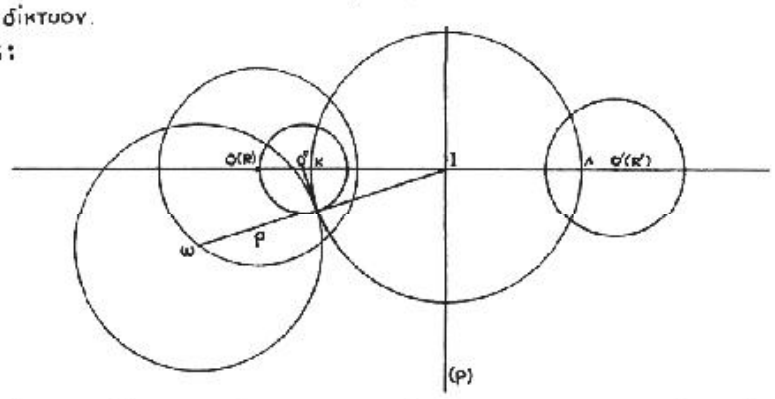
Τὸ δεύτερον μέρος δύναται νὰ λυθῇ καὶ χωρὶς τὰ θεωρήματα τῶν δεσμῶν κύκλων, χρησιμοποιοῦντες μόναν σχέσεις γωνιῶν καὶ τὰ ἐκτικὰ θεωρήματα τοῦ κύκλου τοῦ Ἀπολλωνίου.

Πρόβλημα:

Δοθέντων τῶν σημείων κ, λ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ δεδομένης περιφερείας (Ο,R) σημεῖον Μ ὥστε ὁ λόγος $\frac{KM}{\Lambda M}$ νὰ εἶναι μέγιστος ἢ ἐλάχιστος. (Τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν κύκλων τῆς δέσμης μὲ σημεῖα τοῦ Poncelet κ, λ μετὰ τῆς (Ο,R)).

1007. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο,R) καὶ (Ο′,R′). Ἐπὶ τοῦ (Ο,R) λαμβάνομεν σημεῖον ω καὶ τὸν κύκλον (ω,ρ) ὥστε $\rho^2=\mu\cdot\mathcal{D}_{O'}(\omega)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι (ω,ρ) ἀποτελοῦν δίκτυον.

Ἀπόδειξις:



Θεωροῦμεν τὴν περιφέρειαν (Ο″,R″), τῆς δέσμης τῶν (Ο),(Ο′), ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὴν (ω,ρ). Θὰ ἔχωμεν $\overline{O''O}\cdot\mathcal{D}_{O'}(\omega)+\overline{OO'}\cdot\mathcal{D}_{O''}(\omega)+\overline{O'O''}\cdot\mathcal{D}_O(\omega)=0$ (1).

Ἀλλὰ $\mathcal{D}_{O''}(\omega)=\rho^2=\mu\cdot\mathcal{D}_O(\omega)$ καὶ $\mathcal{D}_O(\omega)=0$.

Ἡ (1) θὰ γίνῃ $\overline{O''O}\cdot\mathcal{D}_{O'}(\omega)+\overline{OO'}\cdot\mu\cdot\mathcal{D}_{O'}(\omega)=0\Longrightarrow\mathcal{D}_{O'}(\omega)\cdot(\overline{OO''}-\mu\cdot\overline{OO'})=0$ ἢ τελικῶς $\frac{\overline{OO''}}{\overline{OO'}}=\mu$.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι $R''^2=\mathcal{D}_\omega(O'')=\overline{O''K}\cdot\overline{O''\Lambda}$.

1008. Δίδονται τρεῖς κύκλοι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$. Θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ τρεῖς κύκλοι ὁμοιότητας αὐτῶν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

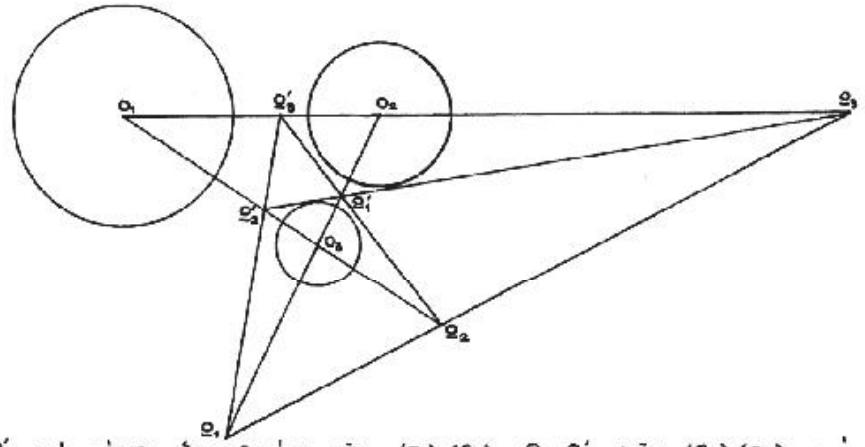
Ἀπόδειξις:

α) Ἔστω S_{ik} ὁ κύκλος ὁμοιότητος τῶν $(O_i),(O_k)$, (O) ὁ κύκλος περὶ τὸ $\overset{\triangle}{O_1O_2O_3}$ καὶ (K) ὁ ὀρθογώνιος κύκλος τῶν $(O_1),(O_2),(O_3)$

Ὁ S_{ik} ἀνήκει εἰς τὴν δέσμην τῶν $(O_i),(O_k)$ ἄρα θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (K).

Ἐξ ἄλλου μία διάμετρος (η O_iO_k) τοῦ S_{ik} διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν O_i, O_k. Ἄρα ὁ κύκλος S_{ik} τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (O). Ὅθεν οἱ κύκλοι ὁμοιότητος ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνιοι εἰς τοὺς κύκλους $(O),(K)$ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

β) Μία ἀκόμη ἀπόδειξις δύναται νὰ δωθῇ ὡς ἑξῆς.



Ἔστω Ω_3, Ω'_3 τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν $(O_1),(O_2)$, Ω_1, Ω'_1 τῶν $(O_2),(O_3)$ καὶ Ω_2, Ω'_2 τῶν $(O_3),(O_1)$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι οἱ τριάδες $(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)$, $(\Omega'_1,\Omega'_2,\Omega_3)$, $(\Omega'_2,\Omega'_3,\Omega_1)$, $(\Omega'_3,\Omega'_1,\Omega_2)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ἴδε ἄσκ. 1049).

Τὰ ἓξ σημεῖα $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega'_1,\Omega'_2,\Omega'_3$ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου μὲ διαγωνίους τὰς $\Omega_1\Omega'_1, \Omega_2\Omega'_2, \Omega_3\Omega'_3$. Ὡς γνωστὸν (11.20.4) οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους τὰς $\Omega_1\Omega'_1, \Omega_2\Omega'_2, \Omega_3\Omega'_3$ ἀποτελοῦν δέσμην.

Παρατήρησις:

Ἔστω (p) ὁ ριζικὸς ἄξων τῆς δέσμης F τῶν κύκλων ὁμοιότητος. Ὁ κύκλος $O_1O_2O_3$ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους ὁμοιότητος, ἄρα τὸ κέντρον του εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς (p).

Τὸ αὐτὸ διὰ τὸν κύκλον (K).

ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΟΜΑΣ Α'.

1009. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν σημεῖον O καὶ τὰ σημεῖα A, A' ὥστε $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \lambda^2$. Νὰ δειχθῇ α) Αἱ περιφέρειαι διαμέτρου AA' ἀποτελοῦν δέσμην β) Ἂν P τυχὸν σταθερὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αἱ περιφέρειαι διὰ τῶν A, A', P ἀποτελοῦν δέσμην.

1010. Δίδεται δέσμη κύκλων F. Νά εὑρεθῇ κύκλος τῆς δέσμης διερχόμενος διά σταθεροῦ σημείου.

1011. Εἰς τό πλῆρες τετράπλευρον, οἱ κύκλοι μέ διαμέτρους τάς διαγωνίους αὐτοῦ ἀποτελοῦν δέσμην.

1012. Τυχών κύκλος (O) δέσμης F συναντᾶ εὐθεῖαν (ε) εἰς τά σημεῖα M καί M'. Δείξατε ὅτι οἱ κύκλοι διαμέτρου MM' ἀποτελοῦν δέσμην.

1013. Δίδονται δύο ζεύγη σημείων (A,B) καί (A',B'). Ἐάν ὑπάρχῃ κύκλος διά τῶν (A,B) ἀνήκων εἰς τήν δέσμην μέ ὁριακά σημεῖα (A',B') τότε θά ὑπάρχῃ κύκλος διά τῶν (A',B') ἀνήκων εἰς τήν δέσμην μέ ὁριακά σημεῖα τά (A,B).

1014. Ἔστω AB ἐφαπτομενικόν τμῆμα δύο κύκλων δέσμης F μέ ὁριακά σημεῖα K,Λ. Δείξατε ὅτι $A\hat{K}B = 1^L$.

1015. Εὐθεῖα τέμνει τούς κύκλους (O,R) καί (O',R') εἰς τά σημεῖα (A,B) καί (A',B') ἀντιστοίχως. Ἐάν K ὂν ἐκ τῶν σημείων Poncelet τῆς δέσμης τῶν (O,R), (O',R') νά δειχθῇ ὅτι $A\hat{K}B' + B\hat{K}A' = 2^L$.

1016. Νά δειχθῇ ὅτι οἱ τέσσερις κύκλοι μέ διαμέτρους τά κοινά ἐφαπτομενικά τμήματα δύο κύκλων (O,R), (O',R') ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν δέσμην.

1017. Μεταβλητός κύκλος διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου καί τέμνει δοθέντα κύκλον ὀρθογωνίως. Δείξατε ὅτι ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην δέσμην.

1018. Ἀπό τό ὁριακόν σημεῖον K δέσμης F φέρομεν τήν KA ἐφαπτομένην εἴς τινα κύκλον τῆς δέσμης. Ἐάν B,Γ τά σημεῖα τομῆς τῆς KA μέ τυχόντα κύκλον τῆς δέσμης δείξατε ὅτι ἡ τετράς K,A-B,Γ εἶναι ἁρμονική.

1019. Ἡ ἐξωτερική κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων δέσμης F τέμνει τόν ριζικόν ἄξονα εἰς A. Ἐάν K,Λ τά ὁριακά σημεῖα τῆς δέσμης δείξατε ὅτι αἱ KA, ΛA εἶναι παράλληλοι πρός τάς ἐσωτερικάς ἐφαπτομένας.

1020. Δύο τρίγωνα ABΓ, A'B'Γ' εἶναι συζυγῆ πρός ἑαυτά διά τόν κύκλον (O,R). Δείξατε ὅτι τό σημεῖον O κεῖται ἐπί τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων ABΓ, A'B'Γ'.

1021. Ἀπό σημείου M φέρομεν τάς ἐφαπτομένας MX, MΨ, MZ εἰς τρεῖς κύκλους (A),(B),(Γ) μιᾶς δέσμης F. Δείξατε ὅτι $\overline{MX}^2 \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{M\Psi}^2 \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{MZ}^2 \cdot \overline{AB} = 0$.

Ἐάν A,B τά ὁριακά σημεῖα τῆς δέσμης παρατηρήσατε ὅτι ἡ δύναμις τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου πρός κύκλον (Γ) τῆς δέσμης ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου ἀπό τά ὁριακά σημεῖα.

1022. Ἐὰν χορδή κύκλου δέσμης F διέρχεται ὁι' ἑνὸς ἐκ τῶν ὁριακῶν σημείων, ἡ προβολή αὐτῆς ἐπί τήν εὐθείαν τῶν κέντρων εἶναι διάμετρος ἑνὸς ἐκ τῶν κύκλων τῆς δέσμης.

1023. Ἔστω AB καί ΓΔ αἱ διάμετροι δύο κύκλων μιᾶς δέσμης F καί K ἓν ἐκ τῶν σημείων Poncelet. Ἂν $\frac{KA}{KB} = \frac{K\Gamma}{K\Delta}$ οἱ κύκλοι θά εἶναι ἴσοι. Ὑποτίθεται ὅτι τά σημεῖα A, B, Γ, Δ κεῖνται ἐπί τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

1024. Ἔστω (O) ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διά τῶν κέντρων A, B, Γ τριῶν κύκλων $(A,\alpha), (B,\beta), (\Gamma,\gamma)$ καί (K) ὁ ὀρθογώνιος εἰς αὐτούς κύκλος. Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων A, B, Γ ἀπό τόν ριζικόν ἄξονα τῶν (O), (K) εἶναι ἀνάλογοι τῶν $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

1025. Δύο κύκλοι (K) καί (Λ) τέμνουν ὀρθογωνίως κύκλον (O), μεταξύ των δέ τέμνονται εἰς A καί B. Δείξατε ὅτι τά A καί B εἶναι συζυγῆ πρός (O). Κατόπιν τούτου νά δείξετε ὅτι ἂν τρεῖς κύκλοι διερχόμενοι ὁι' ἑνός σημείου τέμνουν ὀρθογωνίως τέταρτον κύκλον, οἱ κύκλοι αὐτοι θά διέρχωνται καί ὁι' ἑτέρου κοινοῦ σημείου.

ΟΜΑΣ Β'.

1026. Οἱ κύκλοι (O,R) καί (O',R') ἀποκόπτουν τάς χορδάς AB, A'B' ἐπί τῆς εὐθείας (ε). Ἂν $(ABA'B') = -1$ δείξατε ὅτι τά μέσα τῶν χορδῶν κεῖνται ἐπί τοῦ ριζικοῦ κύκλου τῶν (O,R), (O',R'). Ἀντιστρόφως.

1027. α) Ἡ δύναμις σημείου M, τοῦ ἐπιπέδου τῶν (O,R), (O',R') ὡς πρός τόν ριζικόν κύκλον (ω, r_0) ἰσοῦται πρός τό ἡμιάθροισμα τῶν δυνάμεων τοῦ σημείου πρός τούς (O) καί (O'). Εἶναι δηλαδή $\mathfrak{D}_{(\omega,r_0)}(M) = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{D}_{(O,R)}(M) + \mathfrak{D}_{(O',R')}(M)\right]$

β) Τό ἄθροισμα τῶν δυνάμεων σημείου M πρός τούς ριζικούς κύκλους τῶν $(O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3)$ ἰσοῦται πρός $\mathfrak{D}_{O_1}(M) + \mathfrak{D}_{O_2}(M) + \mathfrak{D}_{O_3}(M)$.

1028. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου HG, ὁ κύκλος (O,R), καί ὁ κύκλος Euler τριγώνου ABΓ ἀποτελοῦν δέσμην.

1029. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τρίγωνον ABΓ, ὁ παρεγγεγραμμένος εἰς τήν πλευράν BΓ καί ὁ κύκλος μέ διάμετρον τήν διχοτόμον AΔ αὐτοῦ ἀποτελοῦν δέσμην.

1030. Ἔστω ABΓΔ δοθέν τετράγωνον, E σημεῖον τῆς προεκτάσεως τῆς AΔ ὥστε $\frac{BE}{\Gamma E} = \max$. Δείξατε ὅτι $A\Delta^2 = EA \cdot E\Delta$.

1031. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό τρίγωνον πού σχηματίζεται ἀπό τάς διαγωνίους τοῦ πλήρους τετραπλεύρου

κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τεσσάρων τριγώνων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

1032. Κύκλος (Σ) ἐφάπτεται δύο κύκλων (O,R),(O',R'). Ἔστω A,B τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ (Σ) μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (O,R),(O',R'). Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς A καὶ B τοῦ (Σ) εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας τῶν (O,R),(O',R').

1033. Δύο κύκλοι (O) καὶ (O') τέμνονται ὑπὸ τυχούσης εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα A,B καὶ A',B'. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς A τέμνει τὰς ἐφαπτομένας εἰς A', B' κατὰ τὰ σημεῖα Δ,E, ἡ ἐφαπτομένη δὲ εἰς B τέμνει τὰς ἐφαπτομένας εἰς A',B' κατὰ τὰ σημεῖα Z,H. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Δ,E,Z,H κεῖνται ἐπὶ κύκλου τῆς δέσμης τῶν (O),(O').

1034. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν τρίτην διαγώνιον τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι ὁ κύκλος ὁμοιότητος τῶν κύκλων μὲ διαμέτρους τὰς ἄλλας δύο διαγωνίους.

1035. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ σημεῖον M. Διὰ τοῦ M φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς AMB,ΓMΔ. Δείξατε ὅτι οἱ πόλοι τῶν εὐθειῶν AΓ,AΔ,BΓ,BΔ πρὸς (O,R) ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ὁμοαξονικὸν τῶν (O,R) καὶ (M,O) (σημειακὸς κύκλος M).

1036. Ἔστω AB ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων. Εὐθεῖα (ε) παράλληλος πρὸς τὴν AB τέμνει τοὺς κύκλους ἀντιστοίχως εἰς Γ,Δ. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον ΓA∩ΔB κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου τῆς δέσμης τῶν δύο δοθέντων κύκλων ὅταν ἡ (ε) μεταβάλλεται.

1037. Δι' ἑκάστης κορυφῆς τριγώνου ABΓ διέρχεται κύκλος ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον περὶ τὸ ABΓ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Δείξατε ὅτι οἱ οὕτω λαμβανόμενοι τρεῖς κύκλοι ἀποτελοῦν δέσμην.

1038. Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους (A),(B),(Γ). Ἂν (Δ) καὶ (E) οἱ ριζικοὶ κύκλοι τῶν ζευγῶν (A),(B) καὶ (A),(Γ) ἀντιστοίχως νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (B),(Γ) ταυτίζεται μὲ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (Δ),(E).

1039. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (A),(B),(Γ). Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν BΓ τέμνει τὰς AB καὶ AΓ εἰς Δ καὶ E. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (Δ) καὶ (E) ὁμοαξονικοὺς μὲ τὰ ζεύγη (A),(B) καὶ (A),(Γ) ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (Δ),(E) ταυτίζεται μὲ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (B),(Γ).

1040. Δίδονται τρεῖς κύκλοι τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Δείξατε ὅτι οἱ διὰ δοθέντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου διερχόμενοι τρεῖς

κύκλοι καί ὁμαξονικοί μέ τούς προηγουμένους, λαμβανομένους κατά ζεύγη, ἔχουν καί ἕτερον σημεῖον κοινόν.

1041. Εὐθεία (ε) τέμνει τάς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατά τά σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Οἱ τρεῖς κύκλοι (Δ), (Ε), (Ζ) μέ κέντρα Δ, Ε, Ζ καί τέμνοντες ὀρθογωνίως τόν κύκλον περί τό ΑΒΓ, τέμνουν τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἐξωτερικῶς εἰς Ρ, Κ, Σ καί ἐσωτερικῶς εἰς Ρ′, Κ′, Σ′ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι οἱ τριάδες τῶν σημείων Ρ, Κ, Σ· Ρ, Κ′, Σ′· Ρ′, Κ, Σ′, Ρ′, Κ′, Σ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καί οἱ τριάδες τῶν εὐθειῶν ΑΡ′, ΒΚ′, ΓΣ′· ΑΡ′, ΒΚ, ΓΣ· ΑΡ, ΒΚ′, ΓΣ· ΑΡ, ΒΚ, ΓΣ′ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

1042. Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος, ὁ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων καί ὁ πολικός κύκλος τριγώνου ἀποτελοῦν δέσμην.

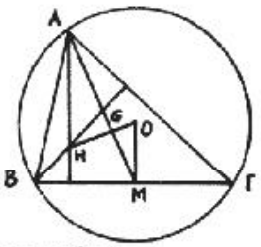
1043. Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους (Α), (Β), (Γ) τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καί τάς Cevians ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διερχομένας διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἂν (Α′) εἶναι ὁ κύκλος τῆς δέσμης τῶν (Β), (Γ), τοῦ ὁποίου τό κέντρον εἶναι τό σημεῖον Α′ καί ἀναλόγως ὁρισθοῦν οἱ (Β′), (Γ′) δείξατε ὅτι αἱ δέσμαι [(Α), (Α′)], [(Β), (Β′)], [(Γ), (Γ′)] ἔχουν κοινόν κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ 11

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

11-1 Ἡ εὐθεῖα τοῦ Euler

Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ ὀρθόκεντρον Η, τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου Ο καὶ τὸ κέντρον βάρους G κεῖνται ἐπὶ εὐθείας. Εἶναι δὲ $\frac{\overline{HG}}{\overline{GO}} = 2$.



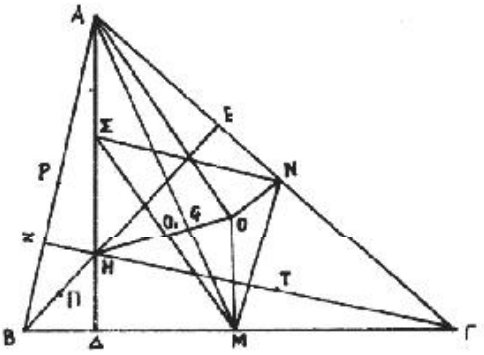
Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν, ἀκτῖνες $\overline{AH} = 2\overline{OM}$.
Ἔστω $G' = AM \cap OH$. $A\hat{G'}H \sim M\hat{G'}O \Longrightarrow \frac{\overline{AG'}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{HG'}}{\overline{G'O}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = 2 \Longrightarrow G = G'$.

11-2 Περιφέρεια τῶν 9 σημείων (ἢ περιφέρεια Euler)

Εἰς πᾶν τρίγωνον οἱ πόδες τῶν τριῶν ὑψῶν, τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ποὺ συνδέουν τὰς κορυφὰς μὲ τὸ ὀρθόκεντρον κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀπόδειξις:



Τὸ τετράπλευρον ΡΔΜΝ (ἰδὲ ἐχῆμα) εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Διότι ΡΝ // ΒΓ καὶ $P\Delta = \frac{AB}{2} = MN$. Ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν κεῖνται οἱ πόδες τῶν ὑψῶν. Τὸ τετράπλευρον ΣΝΜΔ εἶναι ἐγγράψιμον διότι: $\Sigma N // \Gamma H \Longrightarrow \hat{\Sigma NM} = 1^L$; $\hat{\Sigma\Delta M} = 1^L$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν. Ὁμοίως διὰ τὰ Π, Τ. Ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια περιέχουσα τὰ 9 σημεῖα, τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν, τοὺς πόδας τῶν τριῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ ὀναμάζεται περιφέρεια τῶν 9 σημείων ἢ περιφέρεια τοῦ Euler.

11-2.1

Ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων εἶναι τὸ τμῆμα ΣΜ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΟΜΣ εἶναι παρ/μον, ἕπεται ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ $A\hat{B}\Gamma$.

11-2.2

Τὰ σημεῖα Η καὶ G εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἐξωτερικὸν καὶ τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθε-

είας. Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἂν θεωρήσωμεν διά τοῦ Η τέμνουσαν τήν ΗΣΑ καί διά τοῦ G τήν AGM.

II-2.3

Τά τρίγωνα ΒΗΓ, ΓΗΑ, ΑΗΒ, ΑΒΓ ἔχουν τόν αὐτόν κύκλον Euler.

II-2.4

Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Euler εἰς τό σημεῖον Μ εἶναι παράλληλος πρός τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο εἰς τό Α, καί ἑπομένως ἀντιπαράλληλος πρός τήν ΒΓ ὡς πρός τό ζεῦγος ΑΒ, ΑΓ. Διότι ΑΟ //ΣΜ.

II-2.5

Αἱ προβολαί Β' καί Γ' τῶν κορυφῶν Β καί Γ ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καί τά σημεῖα Δ καί Μ κεῖνται ἐπί περιφερείας ἐκούσης τό κέντρον της εἰς τό μέσον τοῦ τόξου ΔΜ τῆς περιφερείας Euler. Ἐάν Κ τό κέντρον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας εὑρίσκομεν ὅτι $\hat{\Delta K M} = 180° - (B-\Gamma)$ ἀλλά καί $\hat{\Delta \Sigma M} = (B-\Gamma)$, ἤτοι ΚΔΣΜ ἐγγράψιμον.

II-2.6

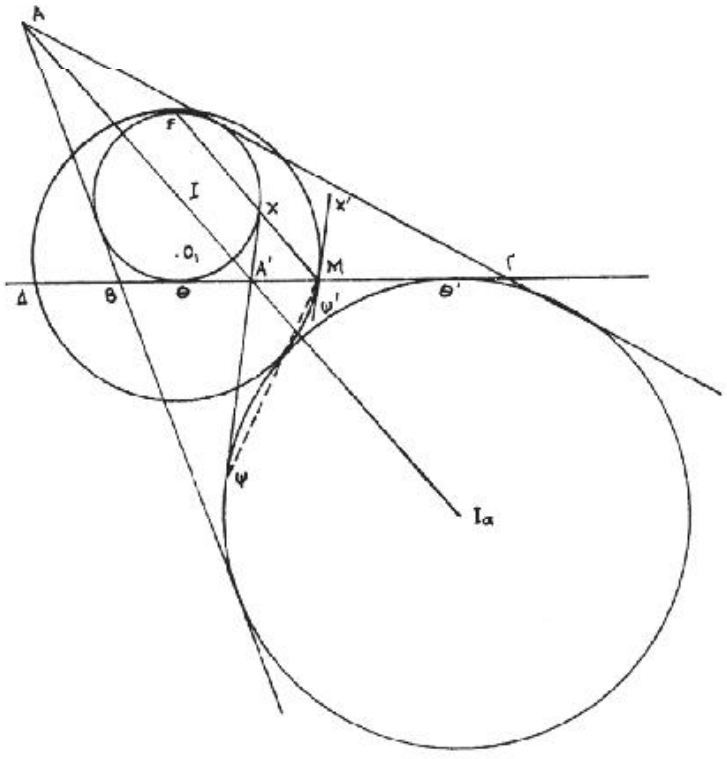
Ἡ περιφέρεια Euler τοῦ τριγώνου $I_\alpha I_\beta I_\gamma$ εἶναι περιγεγραμμένη περιφέρεια περί τό ΑΒΓ.

II-2.7 Τό θεώρημα τοῦ Feuerbach

Ἡ περιφέρεια Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ περιγεγραμμένου κύκλων αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις:

Ἡ ἐφαπτομένη x'y' εἰς Μ τῆς περιφερείας Euler καί ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη xy τῶν κύκλων (I), (I_α) εἶναι ἀντιπαράλληλοι πρός ΒΓ καί ἑπομένως xy//x'y'. Θέτομεν F τό σημεῖον τομῆς τῆς Mx μετά τῆς περιφερείας (I). Θά εἶναι $M\Theta^2 = Mx \cdot MF$ (1). Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $M\Theta^2 = MA' \cdot M\Delta$ (2) (διότι $M\Theta = \tau - \gamma - \frac{\alpha}{2}$, $MA' =$



$= \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} - \frac{\alpha}{2}$, $M\Delta = \frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$). Ἐκ τῶν (1),(2) $\Longrightarrow Mx \cdot MF = MA\,M\Delta$ ἤτοι τὰ σημεῖα x,θ,F,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, ἄρα $M\hat{\Delta}F = x\hat{A}M$, ἀλλὰ $xy // x'y'$ καὶ συνεπῶς $M\hat{\Delta}F = x'\hat{M}\Gamma$ ἤτοι F ἐπὶ τῆς περιφερείας Euler. Εὐκόλως τώρα δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι (I) καὶ (O_1) ἐφάπτονται εἰς F. Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς F αὐτῶν καὶ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν FM (Διότι $xy // x'y'$).

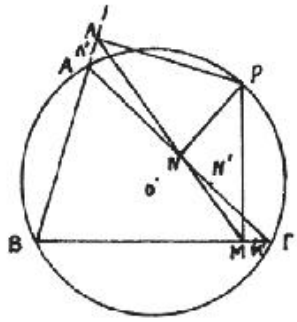
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας My μετὰ τῆς (I_α) εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας Euler καὶ τῆς περιφερείας (I_α).

II - 2.B

$O_1I + O_1I_\alpha + O_1I_\beta + O_1I_\gamma = 6R$. Πράγματι, διότι $O_1I = \frac{R}{2} - \rho$, $O_1I_\alpha = \frac{R}{2} + \rho_\alpha$, $O_1I_\beta = \frac{R}{2} + \rho_\beta$ $O_1I_\gamma = \frac{R}{2} + \rho_\gamma$ καὶ $O_1I + O_1I_\alpha + O_1I_\beta + O_1I_\gamma = 2R + \rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho$. Ἀλλ' ὡς γνωστὸν (ἄσκ. 138) $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho \quad 4R$, ὅθεν $O_1I + O_1I_\alpha + O_1I_\beta + O_1I_\gamma = 6R$.

II - 3 Ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson

Αἱ προβολαὶ τυχόντος σημείου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἀντιστρόφως



Ἀπόδειξις:

Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΡ ἔχομεν $P\hat{A}\Lambda = P\Gamma M$, ἤτοι $P\hat{A}\Lambda \sim P\Gamma\hat{M}$ (1)

Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΝΡΛ ἕπεται ὅτι $A\hat{P}\Lambda = A\hat{N}\Lambda$. Ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου δὲ ΓΜΝΡ $\Gamma\hat{P}M = \Gamma\hat{N}M$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $A\hat{P}\Lambda = \Gamma\hat{P}M$ θὰ εἶναι καὶ $A\hat{N}\Lambda = \Gamma\hat{N}M$, ὅθεν τὰ σημεῖα Μ,Ν,Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τὴν ἐν λόγω εὐθεῖαν θὰ ὀνομάζωμεν εὐθεῖαν Simson τοῦ σημείου Ρ.

Ἀντιστρόφως.

Ἂν αἱ προβολαὶ σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Ο.

Ἀπόδειξις:

Τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΡ, ΑΝΡΛ, ΓΜΝΡ εἶναι ἐγγράψιμα καὶ μὲ παρομοίους συλλογισμοὺς μὲ τοὺς ἀνωτέρω διαπιστώνομεν ὅτι $A\hat{P}\Lambda = \Gamma\hat{P}M$ ἤτοι $A\hat{P}\Gamma = \Lambda PM$ καὶ συνεπῶς $\hat{B} + A\hat{P}\Gamma = 2^L$.

Παρατηρήσεις.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ ἂν ἀντὶ τῶν ὀρθῶν προβολῶν Μ,Ν καὶ Λ τοῦ Ρ λάβωμεν τὰ σημεῖα Μ', Ν', Λ' ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως ὥστε αἱ γωνίαι $P\hat{M}'M$, $P\hat{N}'N$, $P\hat{\Lambda}'\Lambda$ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. (Ἤτοι τὰ τρίγωνα $PM'M$, $PN'N$, $P\Lambda'\Lambda$ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν).

Ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα Μ', Ν', Λ' θὰ ὀνομάζεται γενικευμένη εὐθεῖα Simson.

Ἡ ἀπόδειξις ἡ ἰδία μὲ τὴν ἀνωτέρω.

II-3.1

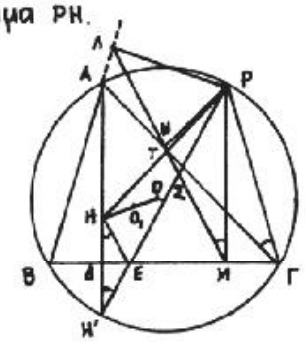
Ἡ γωνία τῆς εὐθείας Simson τοῦ σημείου P μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἰσοῦται πρὸς $1^L - \frac{\hat{AOP}}{2}$
Διότι: $\hat{NMB} = \hat{NPΓ} = 1^L - \hat{PΓN} = 1^L - \frac{\hat{AOP}}{2}$ (Σχῆμα τῆς II-3). Ἐὰν λάβωμεν τὴν γενικευμένην εὐθείαν Simson μὲ $\hat{PM'M} = \varphi$ τότε ἡ γωνία της μετὰ τῆς ΒΓ ἰσοῦται πρὸς $\varphi - \frac{\hat{AOP}}{2}$.

Σημείωσις.

Τὴν γωνίαν $\hat{PM'M}$ θὰ ὀνομάζωμεν κλίσιν τῆς γενικευμένης εὐθείας Simson.

II-3.2

Ἡ εὐθεῖα Simson τοῦ σημείου P διχοτομεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα PH.



Ἀπόδειξις:

Συνδέομεν τὸ H', συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου πρὸς ΒΓ, μὲ τὸ σημεῖον P. Τὸ τρίγωνον HEH' εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα θὰ εἶναι: $\hat{ΔHE} = \hat{ΔH'E}$ (1). Ἀλλὰ $\hat{ΔH'E} = \hat{AΓP}$ (2) καὶ ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΓMNP εἶναι $\hat{AΓP} = \hat{PMN}$ (3).

(1), (3) $\Longrightarrow \hat{HEΔ} = \hat{NMΔ} \Longrightarrow$ HE // MN. Τὸ τρίγωνον $M\hat{Σ}P$ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι $\hat{ΔH'E} = \hat{ΣPM}$ καὶ συνεπῶς $\hat{ΣPM} = \hat{ΣMP}$ ἄρα τὸ Σ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος PE καὶ συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἡ εὐθεῖα MN διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος PH.

παρατήρησις.

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τὰ συμμετρικὰ τοῦ σημείου P πρὸς τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου (ὁμοιόθετος τῆς εὐθείας Simson μὲ λόγον $\frac{2}{1}$). Ἡ ἐν λόγω εὐθεῖα θὰ ὀνομάζεται **εὐθεῖα τοῦ Steiner**.

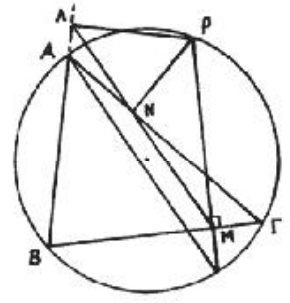
II-3.3

Τὸ σημεῖον τομῆς T τῆς εὐθείας Simson τοῦ σημείου P μετὰ τῆς PH κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Euler.

Διότι συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι PT=TH. Ἐὰν O_1 τὸ κέντρον τῆς περιφερείας Euler (εἶναι γνωστὸν ὅτι $O_1H = O_1O$) θὰ εἶναι $O_1T = \frac{1}{2}OP = \frac{R}{2}$.

II-3.4

Ἂν M_1 τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ P ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ μετὰ τῆς περιφερείας περὶ τὸ $\hat{ΑΒΓ}$, ἡ AM_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθείαν τοῦ Simson τοῦ σημείου P.



Παρατηροῦμεν ὅτι, $\hat{AMP} = \hat{AΓP}$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου PNMΓ ἔχομεν $\hat{PΓA} = \hat{PMN}$ ἄρα $\hat{PMN} = \hat{AM_1P}$.

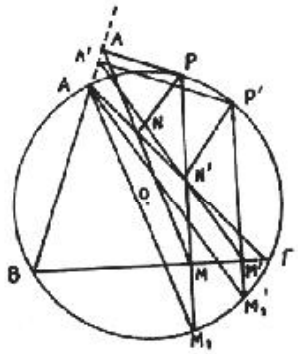
παρατήρησις.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω διαπιστοῦται ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τῆς περιφερείας περὶ τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ἓν ἀκριβῶς σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ εὐθεῖα Euler εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε). Πῶς εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον P;

II-3.5

Ἐὰν P, P' σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, ἡ γωνία τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν Simson ἰσοῦται πρὸς $\frac{\hat{POP'}}{2}$.

Ἀπόδειξις:



Συμφώνως πρὸς τὸ II.3.4 ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν Simson θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν $\hat{M_1AM_1'}$, ἤτοι τὴν $\frac{\hat{M_1OM_1'}}{2}$ ἢ τὴν ἴσην πρὸς αὐτὴν $\frac{\hat{POP'}}{2}$.

Παρατήρησις.

Ἂν τὰ σημεῖα P, P' εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα αἱ εὐθεῖαι Simson αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετοι, τὸ σημεῖον τομῆς δὲ αὐτῶν κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου Euler (Διότι Τ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος HP καὶ S τὸ μέσον τοῦ HP' θὰ εἶναι ST=R, ἤτοι κατὰ II.2, II.3.3 τὸ ST θὰ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Euler).

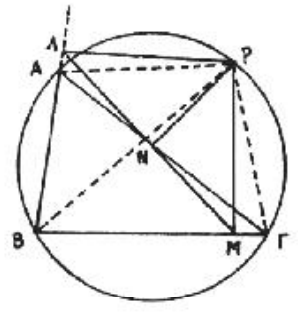
II-3.6 Θεώρημα τοῦ Salmon

Ἐὰν μὲ διαμέτρους τρεῖς χορδὰς κύκλου PA, PB καὶ PΓ γράψωμεν περιφερείας, αὗται θὰ τέμνωνται ἐκ νέου εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ἀντιστρόφως

Ἐὰν τρεῖς κύκλοι μὲ διαμέτρους PA, PB, PΓ τέμνωνται ἀνὰ δύο εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας, τὸ σημεῖον P κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας περὶ τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω M, N καὶ Λ αἱ προβολαὶ τοῦ P ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους PA, PB, PΓ εἶναι αἱ περιχεγραμμέναι περὶ τὰ τετράπλευρα ΑΝΡΛ, ΒΜΡΛ, ΓΜΡΝ ἀντιστοίχως καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα M, N, Λ. Τὰ σημεῖα δ' ὅμως αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Simson τοῦ σημείου P.

Ἀντιστρόφως

Ἐνταῦθα δίδεται ὅτι τὰ σημεῖα M, N, Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Simson τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

11-3.7

Ἐὰν τρεῖς κύκλοι διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ κέντρα των, θὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

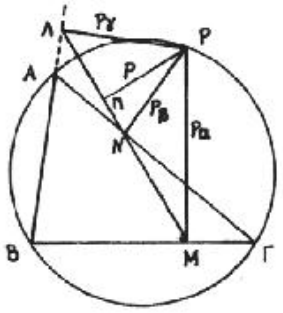
Ἀπόδειξις: (Σκ. 11.3.6)

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι οἱ κύκλοι (Α, ΑΡ), (Β, ΒΡ), (Γ, ΓΡ) τέμνωνται ἀνὰ δύο εἰς τρία σημεῖα, ἔστω Λ', Μ', Ν', κείμενα ἐπ' εὐθείας. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ' τομῆς τῶν (Β, ΒΡ), (Γ, ΓΡ) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Ρ πρὸς ΒΓ, ἄρα κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Steiner. Ὁμοίως τὰ Λ', Ν'.

11-3.8

Ἔστω $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p$ αἱ ἀποστάσεις σημείου Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Simson αὐτοῦ ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι:

$$p_\alpha p_\beta p_\gamma = 2Rp^2.$$



Ἀπόδειξις:

$$\overset{\Delta}{P\Pi N} \sim \overset{\Delta}{PM\Gamma} \implies \frac{p}{p_\beta} = \frac{p_\alpha}{P\Gamma} \implies P\Gamma = \frac{p_\alpha p_\beta}{p} \quad (1)$$

Ὁμοίως: $PA = \dfrac{p_\beta p_\gamma}{p}$ (2). Ἀλλὰ $PA \cdot P\Gamma = 2Rp_\beta$ (3)

$$(1), (2), (3) \implies p_\alpha p_\beta p_\gamma = 2Rp^2.$$

11-4.1 Τὸ θεώρημα τοῦ Ceva

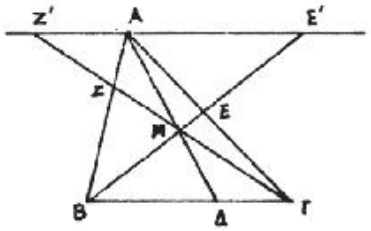
Ἂν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΓ καὶ θέσωμεν Δ = ΑΜ ∩ ΒΓ, Ε = ΒΜ ∩ ΓΑ, Ζ = ΓΜ ∩ ΑΒ θὰ εἶναι:

$$\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$$

Ἀντιστρόφως

Ἂν Δ, Ε, Ζ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ $\dfrac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \dfrac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:



Φέρομεν διὰ τοῦ Α τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΒΕ καὶ ΓΖ εἰς Ε' καὶ Ζ' ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῆς δέσμης Μ.ΒΔΓ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\overline{E'A}}{\overline{Z'A}}, \quad \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{E'A}}, \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{Z'A}}{\overline{\Gamma B}}$$

πολλαπλασιάζομεν τὰς σχέσεις κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{E'A}}{\overline{Z'A}} \cdot \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{Z'A}}{\overline{\Gamma B}} = -1$$

Ἀντιστρόφως

Ἔστω Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΒΕ καὶ ΓΖ (τοῦτο ὑφίσταται ἂν $\frac{\overline{AB}}{\overline{A\Gamma}} \neq 1$, ἄλλως ΒΕ//ΓΖ). Φέρομεν τὴν ΑΜ τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς Δ'. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω $\frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{\Delta'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$. Ἐκ τῆς ἐκθέσεως αὐτῆς καὶ τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{\Delta'\Gamma}}$ ἤτοι Δ≡Δ'.

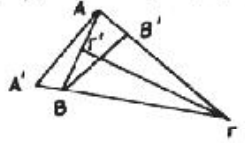
Παρατηρήσεις.

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐκθεσιν τοῦ Ceva ἀπὸ τὴν:

$$\frac{\text{ημ}\,\Delta\hat{A}B}{\text{ημ}\,\Delta\hat{A}\Gamma} \cdot \frac{\text{ημ}\,E\hat{B}\Gamma}{\text{ημ}\,E\hat{B}A} \cdot \frac{\text{ημ}\,Z\hat{\Gamma}A}{\text{ημ}\,Z\hat{\Gamma}B} = -1$$

Αἱ γωνίαι θεωροῦνται προσανατολισμέναι.

Τρεῖς εὐθεῖας διὰ τῶν κορυφῶν ἀντιστοίχως ἑνὸς τριγώνου θὰ ὀνομάζωμεν διὰ συντομίαν Cevians. Θὰ συμβολίζωμεν δὲ αὐτὰς ἀπὸ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἀντιστοίχου τομῆς μετὰ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Π.χ εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα ἔχομεν τὰς Cevians ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'.



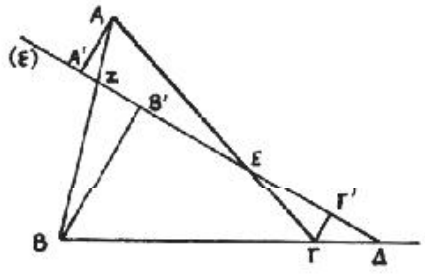
11 – 4.2 Τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ, κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι:

$$\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = 1$$

Ἀπόδειξις:

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ε). Προβάλλομεν τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Θὰ ἔχωμεν:



$$\overset{\Delta}{B\Delta B'} \sim \overset{\Delta}{\Gamma\Delta\Gamma'} \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{\Gamma\Gamma'}} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{AZA'} \sim \overset{\Delta}{BZB'} \Longrightarrow \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} \quad (2) \qquad \overset{\Delta}{\Gamma E\Gamma'} \sim \overset{\Delta}{AEA'} \Longrightarrow \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{\Gamma\Gamma'}}{\overline{AA'}} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Longrightarrow \frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{\Gamma\Gamma'}} \cdot \frac{\overline{\Gamma\Gamma'}}{\overline{AA'}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = 1$$

Ἀντιστρόφως

Ἔστω Δ' = ΖΕ ∩ ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν βάσει τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως $\frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{\Delta'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = 1$. Ἐκ τῆς ἐκθέσεως αὐτῆς καὶ τῆς ὑποθέσεως θὰ εἶναι:

$$\frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{\Delta'\Gamma}} = \frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \Longrightarrow \Delta \equiv \Delta'$$

Παρατηρήσεις

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ἡ ἀναγκαία συνθήκη ἰσχύει διὰ πᾶν πολύγωνον, δηλαδή:

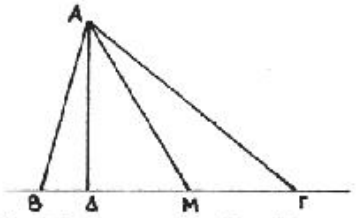
Ἐὰν εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς A_1A_2, A_2A_3, ... $A_\nu A_1$ πολυγώνου $A_1A_2 \ldots A_\nu$ εἰς τὰ σημεῖα $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι:

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \cdot \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\overline{B_\nu A_\nu}}{\overline{B_\nu A_1}} = 1$$

11-5 Τὸ θεώρημα τοῦ Stewart

Ἂν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ βάσις ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι: $\overline{AB}^2 \cdot \overline{M\Gamma} + \overline{A\Gamma}^2 \cdot \overline{BM} + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{AM}^2 + \overline{\Gamma B} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{M\Gamma} = 0$ (τύπος τοῦ Stewart)

Ἀπόδειξις:



Ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι ἡ ΑΜ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἔστω $\hat{AMB}$ ὀξεῖα. Εἰς τὸ $\overset{\Delta}{AMB}$ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῆς ὀξείας γωνίας $\hat{AMB}$: $\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{BM} \cdot \overline{\Delta M}$ (1). Εἰς τὸ $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ τὸ θεώρημα τῆς ἀμβλείας γωνίας $\hat{AM\Gamma}$: $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{M\Gamma}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overline{M\Gamma} \cdot \overline{\Delta M}$ (2). Πολλαπλασιάζομεν τὴν σχέσιν (1) ἐπὶ $\overline{M\Gamma}$ τὴν σχέσιν (2) ἐπὶ $\overline{BM}$ καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη. Μετὰ τὰς πράξεις ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἂν $AM \perp B\Gamma$ ὁ τύπος ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ, ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

Σημείωσις.

Ἐὰν $\frac{\overline{BM}}{\overline{M\Gamma}} = \frac{\kappa}{\lambda}$ ἡ ΑΜ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$AM^2 = \frac{\kappa\beta^2 + \lambda\chi^2}{\kappa+\lambda} - \frac{\kappa\lambda\alpha^2}{(\kappa+\lambda)^2}$$

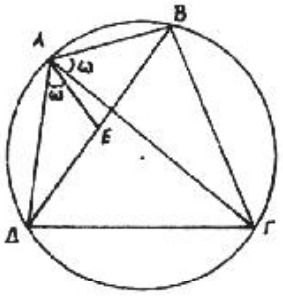
Συνδέσατε τὸν τύπον τοῦ Stewart μὲ τὸν τύπον τοῦ Leibnitz.

11-6 1ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

Ἂν ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, θὰ εἶναι:

$$\boxed{AB \cdot \Gamma\Delta + B\Gamma \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot B\Delta}$$

Ἀπόδειξις:



Φέρομεν τὴν ΑΕ ὥστε $\hat{EA\Delta} = \hat{\Gamma AB}$ (1). $\hat{A\Delta B} = \hat{A\Gamma B}$ (2) διότι βαίνουν εἰς ἴσα τόξα.

(1), (2) $\Rightarrow \overset{\Delta}{AE\Delta} \sim \overset{\Delta}{AB\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$

$B\Gamma \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot \Delta E$ (3). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$AB \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma \cdot BE$ (4). (3), (4) $\Rightarrow AB \cdot \Gamma\Delta + B\Gamma \cdot A\Delta =$

$= A\Gamma(BE + \Delta E) = A\Gamma \cdot B\Delta$.

11-6.1 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

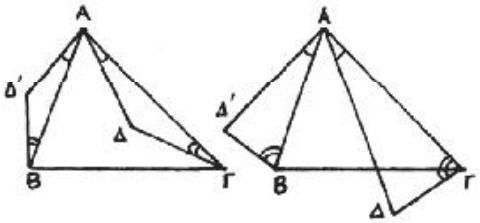
Ἂν Α, Β, Γ, Δ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου[1]

[1] Πεπερασμένης ἢ ὄχι ἀντίνος (ὁπλ. οὔτε ἐπὶ εὐθείας).

$$AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot A\Delta>A\Gamma\cdot B\Delta$$

Απόδειξις:

Κατασκευάζομεν $A\hat{\Delta}'B\sim A\hat{\Delta}\Gamma$ (1). Θά είναι καί $B\hat{A}\Gamma\sim\Delta'\hat{A}\Delta$ (2).



$$(1)\Longrightarrow\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta}\Longrightarrow AB\cdot\Gamma\Delta=A\Gamma\cdot B\Delta'\ (3)$$

$$(2)\Longrightarrow\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{\Delta\Delta'}{B\Gamma}\Longrightarrow B\Gamma\cdot A\Delta=A\Gamma\cdot\Delta\Delta'\ (4)$$

$$(3),(4)\quad AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot A\Delta=A\Gamma\,(B\Delta'+\Delta\Delta')>A\Gamma\cdot B\Delta$$

Παρατηρήσεις.

① Τό δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου μᾶς πείθει ὅτι ἡ σχέσις $AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot A\Delta=A\Gamma\cdot B\Delta$ εἶναι ἱκανή συνθήκη ἵνα τά σημεῖα A,B,Γ,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

② Τό πρῶτον καί δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου δύνανται ν' ἀποτελέσουν ἕν μοναδικόν θεώρημα ὡς κάτωθι:

Ἄν A,B,Γ,Δ τέσσερα σημεῖα ἐπί ἐπιπέδου θά εἶναι:

$$AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot A\Delta\geqq A\Gamma\cdot B\Delta$$

Ἡ ἀπόδειξις ἡ 11-6.1. Ἡ ἰσότης ἄν τά $AB\Delta'$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὅτε $AB\Delta\Gamma$ ἐγγράψιμον (διότι $A\hat{\Gamma}\Delta=A\hat{B}\Delta'$).

11-6.2

Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\boxed{\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{AB\cdot A\Delta+\Gamma B\cdot\Gamma\Delta}{BA\cdot B\Gamma+\Delta A\cdot\Delta\Gamma}}$$

Ἀπόδειξις:

$$4K(AB\Gamma)=BA\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma\quad(1),\qquad 4R(A\Gamma\Delta)=\Delta A\cdot\Delta\Gamma\cdot A\Gamma\quad(2)$$

$$(1),(2)\Longrightarrow 4R(AB\Gamma\Delta)=A\Gamma(BA\cdot B\Gamma+\Delta A\cdot\Delta\Gamma)\quad(3)$$

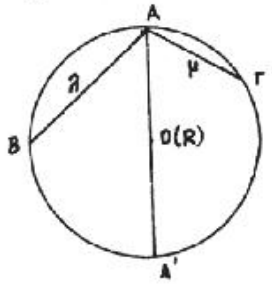
Ὁμοίως: $$4R(AB\Gamma\Delta)=B\Delta(AB\cdot A\Delta+\Gamma B\cdot\Gamma\Delta)\quad(4)$$

$$(3),(4)\Longrightarrow\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{AB\cdot A\Delta+\Gamma B\cdot\Gamma\Delta}{BA\cdot B\Gamma+\Delta A\cdot\Delta\Gamma}$$

11-6.3 Ἐφαρμογαί τῶν θεωρημάτων τοῦ Πτολεμαίου

① Τό πρόβλημα τῶν τριῶν χορδῶν

Ἐπί περιφερείας δίδονται τά σημεῖα A,B,Γ ὥστε $AB=\lambda$, $A\Gamma=\mu$ νά εὑρεθῇ ἡ $B\Gamma$.



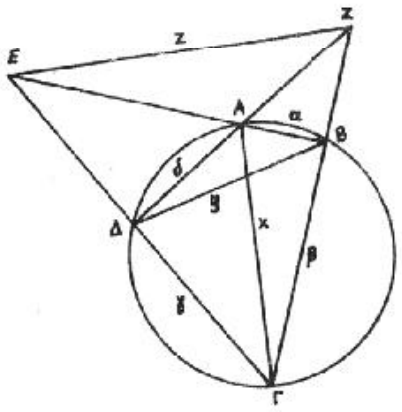
Λύσις:

Ἔστω AA' ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας διά τοῦ A. $BA'=\sqrt{4R^2-\lambda^2}$, $\Gamma A'=\sqrt{4R^2-\mu^2}$ εἰς τό τετράπλευρον $AB\Lambda'\Gamma$ ἐφαρμόζομεν τό πρῶτον θεώρ. τοῦ Πτολεμαίου:

$$2R\cdot B\Gamma = \lambda\sqrt{4R^2-\mu^2} + \mu\sqrt{4R^2-\lambda^2}$$

② Νά εύρεθοῦν αἱ διαγώνιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ αὐτοῦ.

Λύσις:



Ἔστω x, y αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Ἔχομεν

$$xy = \alpha\gamma+\beta\delta \qquad x:y = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος δίδει:

$$\boxed{x^2=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}} \qquad \boxed{y^2=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν Ἄσκησιν 539 δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τρίτην διαγώνιον τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τὴν EZ. Εὑρίσκομεν

$$\boxed{z^2=(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\beta+\gamma\delta)\left[\frac{\beta\delta}{(\beta^2-\delta^2)^2}+\frac{\alpha\gamma}{(\alpha^2-\gamma^2)^2}\right]}$$

③ Ἡ ἀκτὶς R τοῦ κύκλου τοῦ περιχεγραμμένου περὶ τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι:

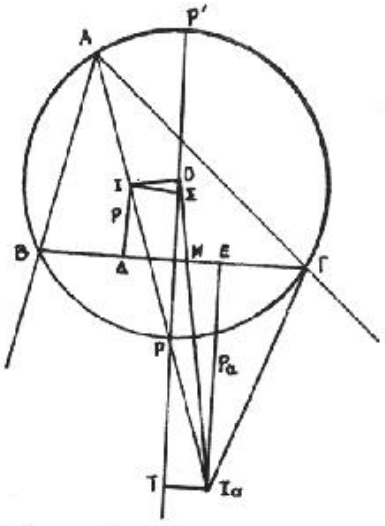
$$R=\frac{1}{4}\left[\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ἀπόδειξις:

Ἔχομεν: $4R(AB\Gamma)+4R(A\Delta\Gamma)=\alpha\beta x+\gamma\delta x \Longrightarrow R=\frac{x(\alpha\beta+\gamma\delta)}{4E}$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ x καὶ E.

11-7 Οἱ τύποι τοῦ Euler



1. Ἐὰν I τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιφερείας καὶ O τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ρ, R ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, εἶναι: $IO^2=R^2-2R\rho$

2. Ἐὰν I_a τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν γωνίαν A καὶ ρ_a ἡ ἀκτὶς του, τότε: $I_aO^2=R^2+2R\rho_a$

Ἀπόδειξις:

Ἔστω P τὸ μέσον τοῦ $\overset{\frown}{B\Gamma}$, Δ καὶ E τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν (I,ρ) καὶ (I_a,ρ_a) ἀντιστοίχως, ἐπὶ τῆς Bτ.

1. $\hat{BIP}=\frac{B}{2}+\frac{A}{2}$, $\hat{PBI}=\frac{B}{2}+\frac{A}{2} \Longrightarrow$ $\overset{\Delta}{BPI}$ ἰσοσκελές, ἤτοι: $PB=PI$

$\overset{\Delta}{IOP}$ Θεώρ. ὀξείας: $IO^2 = IP^2 + R^2 - 2R \cdot P\Sigma \implies IO^2 = BP^2 + R^2 - 2R(\Sigma M + MP) = BP^2 + R^2 - 2R\rho - 2R \cdot MP$.

Ἀλλὰ $BP^2 = 2R \cdot MP$ (ἐκ τοῦ $\overset{\Delta}{PBP'}$). Ὅθεν $IO^2 = R^2 - 2R\rho$.

2. Εἶναι $PI_\alpha = PI$. Εἰς τὸ OPI_α θεώρημα ἀμβλείας: $OI_\alpha^2 = PI_\alpha^2 + R^2 + 2R \cdot PT \implies OI_\alpha^2 = BP^2 + R^2 + 2R(\rho_\alpha - MP) = R^2 + 2R\rho_\alpha$.

Ἐρώτησις. Διατί $\hat{IPO} < 90^\circ$;

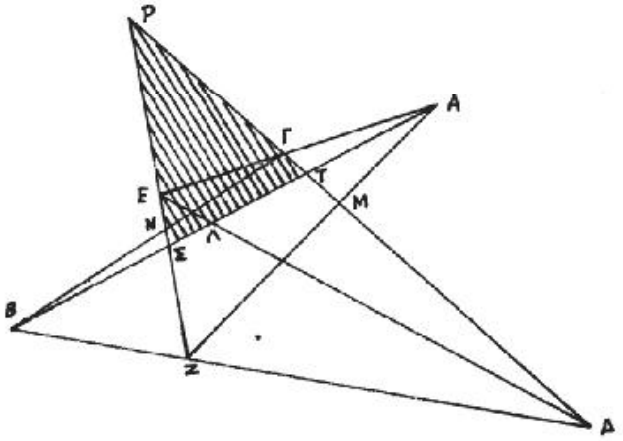
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν τύπων τοῦ Euler ἴδε καὶ ἄσκησιν 515.

11-8 Τὸ θεώρημα τοῦ Πάππου

Ἂν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας κεῖνται τὰ σημεῖα A, Γ, E, ἐπὶ ἄλλης εὐθείας τὰ B, Δ, Z καὶ θέσωμεν: $\Lambda = AB \cap \Delta E$, $M = \Gamma\Delta \cap ZA$, $N = B\Gamma \cap EZ$ τότε τὰ Λ, M, N κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι $\Sigma = AB \cap EZ$, $T = \Gamma\Delta \cap AZ$, $P = EZ \cap \Gamma\Delta$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΣTP ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατέμνουσας $\Lambda\Delta E$, AMZ, $B\Gamma N$ $A\Gamma E$, $B\Delta Z$. Θὰ ἔχωμεν:



$$\frac{\overline{\Lambda\Sigma}}{\overline{\Lambda T}} \cdot \frac{\overline{\Delta T}}{\overline{\Delta P}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{E\Sigma}} = 1,$$

$$\frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{AT}} \cdot \frac{\overline{MT}}{\overline{MP}} \cdot \frac{\overline{ZP}}{\overline{Z\Sigma}} = 1,$$

$$\frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{BT}} \cdot \frac{\overline{\Gamma T}}{\overline{\Gamma P}} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{N\Sigma}} = 1, \quad \frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{AT}} \cdot \frac{\overline{\Gamma T}}{\overline{\Gamma P}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{E\Sigma}} = 1, \quad \frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{BT}} \cdot \frac{\overline{\Delta T}}{\overline{\Delta P}} \cdot \frac{\overline{ZP}}{\overline{Z\Sigma}} = 1$$

Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο τελευταίων σχέσεων καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{\Lambda\Sigma}}{\overline{\Lambda T}} \cdot \frac{\overline{MT}}{\overline{MP}} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{N\Sigma}} = 1$$

Ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου ὅτι: Λ, M, N ἐπ' εὐθείας.

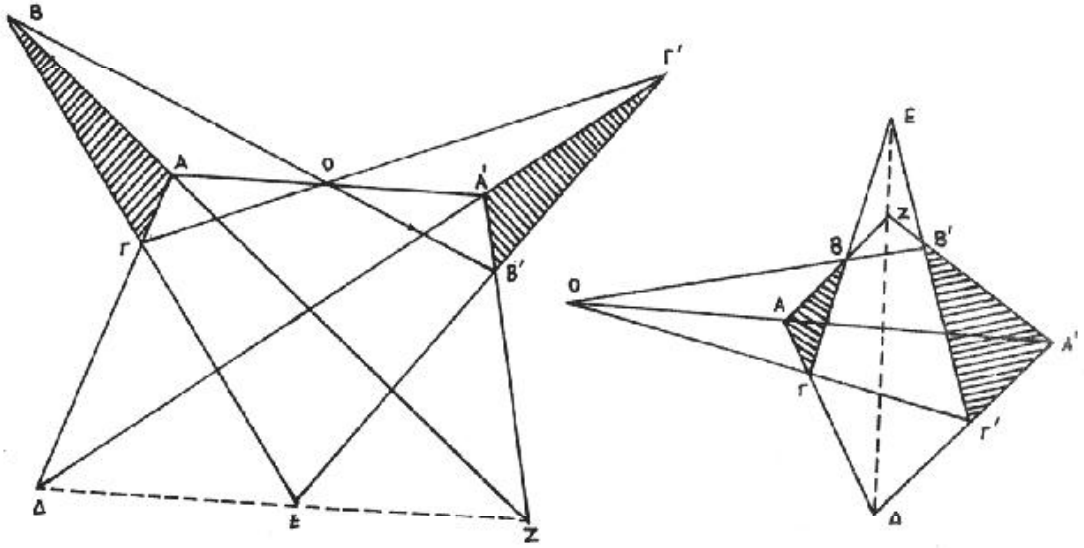
11-9 Τὸ θεώρημα τοῦ Dejark

Ἐπὶ ἐπιπέδου θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ καὶ τὴν ἀντιστοιχίαν: $A \to A'$, $B \to B'$, $\Gamma \to \Gamma'$.

1. Ἂν αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων θὰ τέμνωνται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

2. Ἀντιστρόφως. Δηλαδή, ἂν αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τέμνωνται εἰς σημεῖα κείμενα

ἐπ' εὐθείας αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Ἀπόδειξις:

1. Εἰς τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΒ, ΟΒΑ ἐφαρμόζομεν τὸ Θεώρ. τοῦ Μενελάου μὲ διατέμνουσας ΔΑ'Γ', ΕΓ'Β', ΖΒ'Α' ἀντιστοίχως:

$$\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta A}}\cdot\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'O}}{\overline{\Gamma'\Gamma}}=1 \qquad \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'\Gamma}}{\overline{\Gamma'O}}\cdot\frac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}}=1 \qquad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}}\cdot\frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}}=1$$

Ἐκ τῶν τριῶν ἐκθέσεων διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta A}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1$$

ἤτοι Δ, Ε, Ζ ἐπ' εὐθείας.

2. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἔστω $O=B\Gamma\cap B'\Gamma'$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ο, Α' κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Εἰς τὰ τρίγωνα ΖΒΒ', ΔΓΓ' αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς Β, Γ – Β', Γ' – Ζ, Δ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ των, συμφώνως πρὸς τὸ **1.**, θὰ τέμνωνται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἤτοι Ο, Α, Α' ἐπ' εὐθείας.

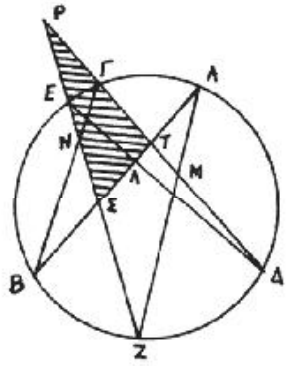
11 - 10 Τὸ Θεώρημα τοῦ Pascal

Ἂν αἱ κορυφαὶ ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι σημεῖα ὁμοκυκλικὰ καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνωνται, τὰ σημεῖα τομῆς θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα ὀνομάζεται εὐθεῖα τοῦ Pascal.

Ἀπόδειξις:

Εἰς ΡΣΤ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατεμνούσας: ΛΔΕ, ΑΜΖ, ΒΓΝ.

$$\frac{\overline{\Lambda\Sigma}}{\overline{\Lambda T}}\cdot\frac{\overline{\Delta T}}{\overline{\Delta P}}\cdot\frac{\overline{EP}}{\overline{E\Sigma}}=1 \qquad \frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{AT}}\cdot\frac{\overline{MT}}{\overline{MP}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{Z\Sigma}}=1 \qquad \frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{BT}}\cdot\frac{\overline{\Gamma T}}{\overline{\Gamma P}}\cdot\frac{\overline{NP}}{\overline{N\Sigma}}=1$$



Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἐκ τῶν ἐκ τῶν μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{\Lambda\Sigma}}{\overline{\Lambda T}}\cdot\frac{\overline{MT}}{\overline{MP}}\cdot\frac{\overline{NP}}{\overline{N\Sigma}}\left[\frac{\overline{\Delta T}}{\overline{\Delta P}}\cdot\frac{\overline{EP}}{\overline{E\Sigma}}\cdot\frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{AT}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{Z\Sigma}}\cdot\frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{BT}}\cdot\frac{\overline{\Gamma T}}{\overline{\Gamma P}}\right]=1$$

Ἀλλὰ ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παράστασις γράφεται:

$$\frac{\overline{\Delta T}\cdot\overline{\Gamma T}}{\overline{AT}\cdot\overline{BT}}\cdot\frac{\overline{EP}\cdot\overline{ZP}}{\overline{\Gamma P}\cdot\overline{\Delta P}}\cdot\frac{\overline{A\Sigma}\cdot\overline{B\Sigma}}{\overline{Z\Sigma}\cdot\overline{E\Sigma}}=1\ ,$$

λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς δυνάμεις τῶν T,P,Σ. Ἄρα

$$\frac{\overline{\Lambda\Sigma}}{\overline{\Lambda T}}\cdot\frac{\overline{MT}}{\overline{MP}}\cdot\frac{\overline{NP}}{\overline{N\Sigma}}=1$$

ἤτοι Λ,M,N ἐπ' εὐθείας.

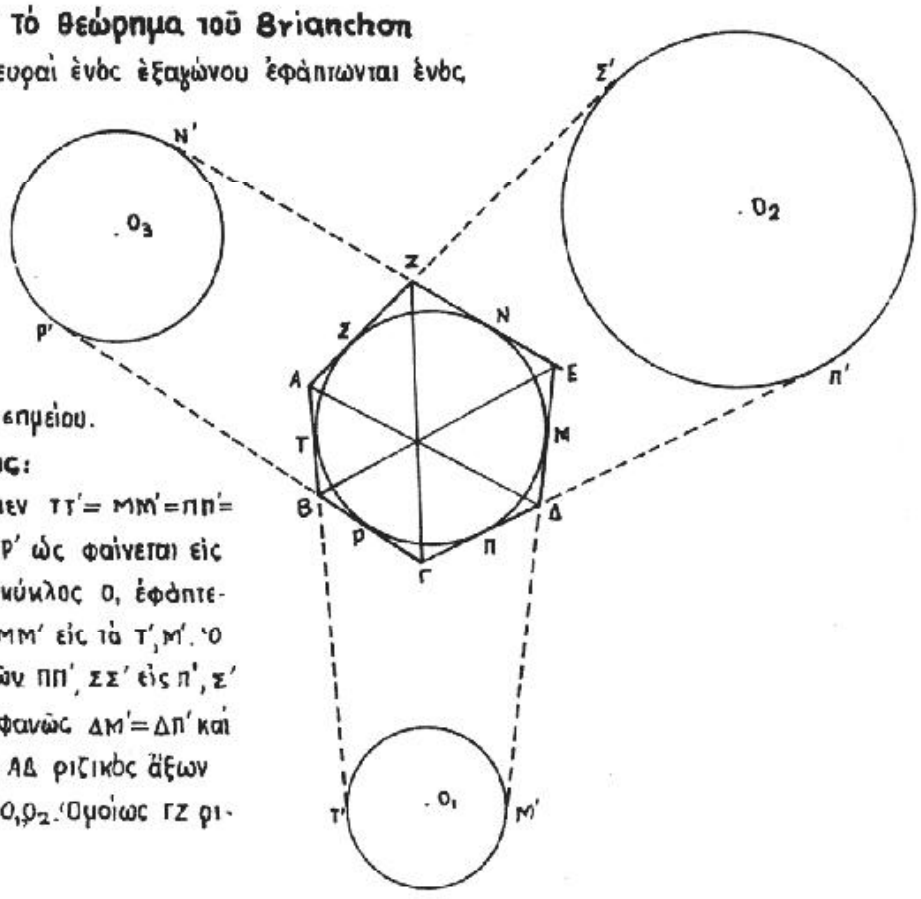
παρατήρησις.

Ἐνδιαφέροντα θεωρήματα προκύπτουν ἂν δύο κορυφαὶ τοῦ ἐξαγώνου συμπίπτουν ἢ δύο ζεύγη κορυφῶν συμπίπτουν κλπ.

Πχ. ἂν E=Z καὶ B=Γ, εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ποὺ θὰ σχηματισθῇ τὸ σημεῖου τομῆς Λ τῶν διαγωνίων του AB καὶ ΔE, τὸ σημεῖον τομῆς N τῶν ἐφαπτομένων εἰς E καὶ B τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ σημεῖον τομῆς M τῶν ἀπέναντι πλευρῶν AE καὶ ΔB κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Pascal.

11-11 Τὸ θεώρημα τοῦ Brianchon

Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἐξαγώνου ἐφάπτωνται ἑνὸς κύκλου αἱ διαγώνιοι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφάς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

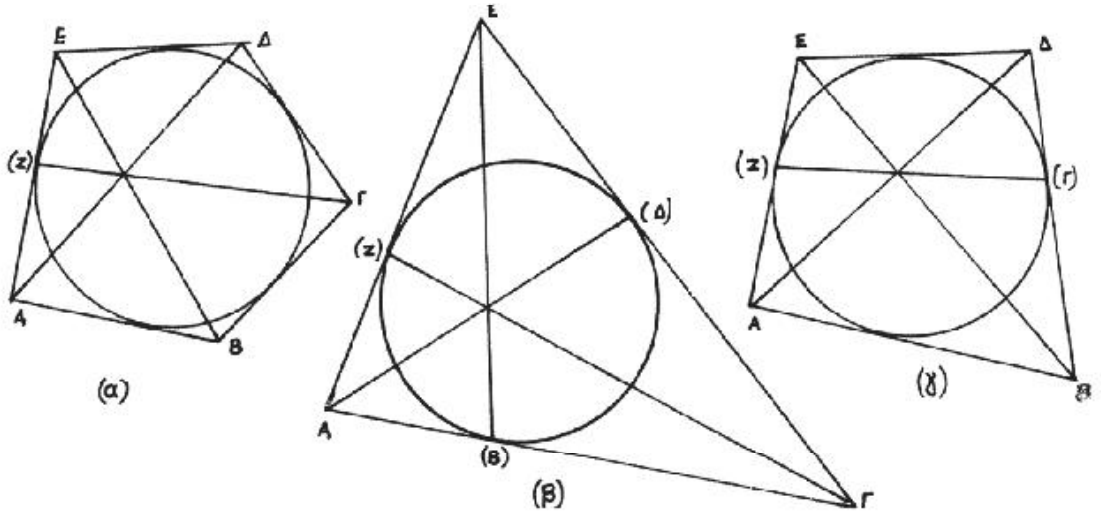


Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν ΤΤ'=ΜΜ'=ΠΠ'=ΣΣ'=ΝΝ'=ΡΡ' ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Ὁ κύκλος O, ἐφάπτεται τῶν ΤΤ', ΜΜ' εἰς τὰ Τ', Μ'. Ὁ κύκλος O_2 τῶν ΠΠ', ΣΣ' εἰς Π', Σ' κλπ. Εἶναι προφανῶς ΔΜ'=ΔΠ' καὶ ΑΤ'=ΑΣ' ἄρα ΑΔ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O,O_2. Ὁμοίως ΓΖ ρι-

ζικός ἄξων τῶν κύκλων O_2, O_3 καὶ τέλος ριζικὸς ἄξων τῶν O_1, O_3 ἡ εὐθεῖα ΕΒ. Τὸ σημεῖον τομῆς λοιπὸν τῶν διαγωνίων εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων.

Τρεῖς **ἐφαρμογαὶ** τοῦ θεωρήματος τοῦ Brianchon φαίνονται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα.



11 - 12 Ἰσογώνιοι εὐθεῖαι

Θεωροῦμεν τὴν γωνίαν xOy. Δύο ἡμιευθεῖαι Oz καὶ Oz′ θὰ λέγωνται **ἰσογώνιοι** πρὸς τὴν $\hat{xOy}$ ἂν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν διχοτόμον αὐτῆς.

Ἐκ τῶν σημείων M καὶ M′, κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Oz καὶ Oz′, φέρομεν τὰς καθέτους MK, M′K′ ἐπὶ τὴν Ox καὶ MΛ, M′Λ′ ἐπὶ τὴν Oy. Ἀποδεικνύομεν ὅτι:

① $MK \cdot M'K' = M\Lambda \cdot M'\Lambda'$

② $K\Lambda \perp Oz'$, $K'\Lambda' \perp Oz$

③ τὰ σημεῖα K, Λ, K′, Λ′ εἶναι ὁμοκυκλικά. Τὸ κέντρον δὲ τοῦ κύκλου εἶναι τὸ μέσον P τοῦ τμήματος MM′.

Ἀπόδειξις:

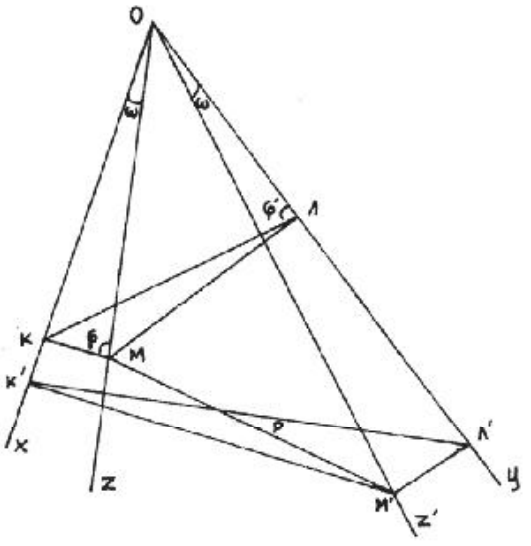
① $\overset{\Delta}{KMO} \sim \overset{\Delta}{\Lambda' M' O} \Longrightarrow \frac{MK}{M'\Lambda'} = \frac{OM}{OM'}$ (1)

$\overset{\Delta}{\Lambda MO} \sim \overset{\Delta}{K' M' O} \Longrightarrow \frac{M\Lambda}{M'K'} = \frac{OM}{OM'}$ (2)

(1), (2) $\Longrightarrow MK \cdot M'K' = M\Lambda \cdot M'\Lambda'$

② (ἰδὲ σχῆμα) $\omega + \varphi = 1^L$, $KM\Lambda O$ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow \varphi = \varphi'$. Ἄρα $\omega + \varphi' = 1^L \Longrightarrow K\Lambda \perp Oz'$

③ (1), (2) $\Longrightarrow \frac{MK}{M'\Lambda'} = \frac{M\Lambda}{M'K'} \Longrightarrow \overset{\Delta}{KOM} \sim \overset{\Delta}{\Lambda' O K'} \Longrightarrow K\Lambda\Lambda'K'$ ἐγγράψιμον. Αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τῶν KK′, ΛΛ′ διέρχονται διὰ τοῦ μέσου P τοῦ τμήματος MM′. Ἄρα τὸ P εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου περὶ τὸ $K\Lambda\Lambda'K'$.

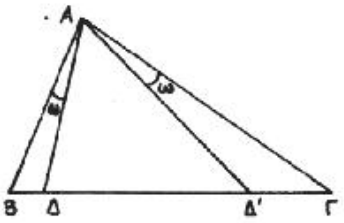


11 - 12.1

Ἂν δύο ἰσοχώνιοι εὐθεῖαι πρὸς τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς σημεῖα Δ καὶ Δ′, θὰ εἶναι

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'}=\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$$

Ἀπόδειξις:



Εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΔ, ΓΑΔ′ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν:

$$\frac{(BA\Delta)}{(\Gamma A\Delta')}=\frac{AB\cdot A\Delta}{A\Gamma\cdot A\Delta'}\qquad(1)$$

Ἐπίσης τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσοϋψῆ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(BA\Delta)}{(\Gamma A\Delta')}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta'}\ (2)\ :\quad (1),(2)\Longrightarrow\frac{AB\cdot A\Delta}{A\Gamma\cdot A\Delta'}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta'}\qquad(3)$$

Ἀπὸ τὰ $\overset{\Delta}{\Gamma A\Delta}$, $\overset{\Delta}{BA\Delta'}$ παρομοίως ἔχομεν

$$\frac{AB\cdot A\Delta'}{A\Gamma\cdot A\Delta}=\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta}\qquad(4)$$

Ἐκ τῶν (3), (4) διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

11-12.2

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ ἰσογώνιοι αὐτοῦ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις α):

Θέτομεν $\Delta=AM\cap B\Gamma$, $E=BM\cap\Gamma A$, $Z=\Gamma M\cap AB$. Ἔστω ΑΔ′ ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΔ, ΑΕ′ ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΕ καὶ ΑΖ′ ἡ ἰσογώνιος τῆς ΑΖ.

Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω 11-5.1 ἔχομεν

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'}=\frac{AB^2}{A\Gamma^2}\ ,\quad \frac{\Gamma E}{AE}\cdot\frac{\Gamma E'}{AE'}=\frac{B\Gamma^2}{AB^2}\ ,\quad \frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{AZ'}{BZ'}=\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{\Gamma E}{AE}\cdot\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'}\cdot\frac{\Gamma E'}{AE'}\cdot\frac{AZ'}{BZ'}=1$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva.

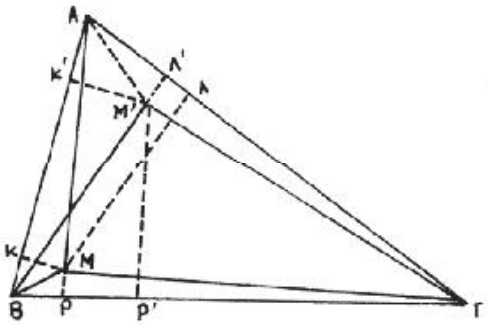
$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{\Gamma E}{AE}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1\ ,\quad \text{ὅθεν}\quad \frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'}\cdot\frac{\Gamma E'}{AE'}\cdot\frac{AZ'}{BZ'}=1$$

καὶ κατὰ τὸ ἀνάστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva αἱ εὐθεῖαι ΑΔ′, ΒΕ′, ΓΖ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις β):

Ἔστω ὅτι αἱ ἰσογώνιοι τῶν ΜΒ καὶ ΜΓ πρὸς τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἀντιστοίχως τέμνονται εἰς τὸ Μ′. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΜ′ ἰσογώνιος τῆς ΑΜ πρὸς $\hat{A}$.

Φέρομεν τὰς καθέτους ΜΡ, ΜΛ, Μκ ἀπὸ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Θέτομεν ΜΡ=ρ, ΜΛ=ρ₂, Μκ=ρ₃. Τὸ αὐτὸ κάνομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ'. Θέτομεν Μ'Ρ'=ρ', Μ'Λ'=ρ₂', Μ'κ'=ρ₃'. Ὡς γνωστὸν $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2' = \rho_3\rho_3'$.



Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν προκύπτει ὅτι:

$\rho_2\rho_2' = \rho_3\rho_3' \Longrightarrow \frac{\Mu\kappa}{\Mu'\Lambda'} = \frac{\Mu\Lambda}{\Mu'\kappa'} \Longrightarrow \overset{\Delta}{\kappa\Mu\Lambda} \sim \overset{\Delta}{\Lambda'\Mu'\kappa'}$

$\Longrightarrow \hat{\kappa\Lambda\Mu} = \hat{\Lambda'\kappa'\Mu'}$. Ἀλλὰ ἐκ ἐγγραψίμων ΑκΜΛ, ΑΚ'Μ'Λ' προκύπτει ὅτι: $\hat{\kappa\Lambda\Mu} = \hat{\kappa A\Mu}$ καὶ $\hat{\Lambda'\kappa'\Mu'} = \hat{\Lambda' A\Mu'}$. Ἄρα $\hat{\kappa A\Mu} = \hat{\Lambda' A\Mu'}$. (1)

11-13 Ἰσοτομικὰ σημεῖα

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θέτομεν Δ=ΑΜ∩ΒΓ, Ε=ΒΜ∩ΓΑ Ζ=ΓΜ∩ΑΒ. Ἐὰν Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ πρὸς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, Ε' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, Ζ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ζ πρὸς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἀποδεικνύεται εὐκόλως βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ'. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται **ἰσοτομικά**.

11-14 Σημεῖον Lemoine

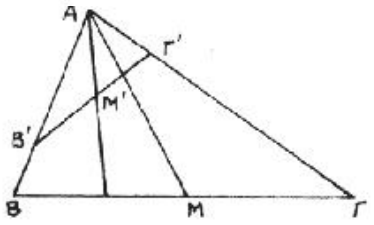
Ἡ ἰσοχώνιος κάθε διαμέσου ὀνομάζεται **συμμετροδιάμεσος**.

11-14.1

Ἔστω Β'Γ' ἀντιπαράλληλος τῆς ΒΓ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Μ' τὸ μέσον τοῦ τμήματος Β'Γ'. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀγομένη συμμετροδιάμεσος ταυτίζεται μὲ τὴν ΑΜ'.

Ἀπόδειξις:

Ἐπειδὴ Β'Γ' ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ὡς πρὸς ΑΒ, ΑΓ, ἕπεται ὅτι: ΒΒ'Γ'Γ ἐγγράψιμον τετράπλευρον. Ἄρα $\overset{\Delta}{B'A\Gamma'} \sim \overset{\Delta}{\Gamma A B}$.



Ὁμόλογοι διάμεσοι τῶν ὁμοίων τριγώνων εἶναι αἱ ΑΜ', ΑΜ καὶ ὁμόλογος τῆς $\hat{B'AM'}$ θὰ εἶναι ἡ $\hat{\Gamma AM}$, ἤτοι $\hat{B'AM'} = \hat{\Gamma AM}$.

Παρατηρήσεις

(1) Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον δηλ. ἂν ληφθῇ σημεῖον Μ' ἐπὶ τῆς συμμετροδιαμέσου ἐκ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἀχθῇ ἡ Β'Μ'Γ' ὥστε Β'Μ'=Μ'Γ' θὰ εἶναι Β'Γ' ἀντιπαράλληλος πρὸς

---

(1) Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται ἰσογώνια σημεῖα ἢ ἰσογώνια συζυγῆ ἢ λέγομεν ὅτι τὸ Μ' εἶναι ἰσογώνιον τοῦ Μ.

Ποῖον τὸ ἰσογώνιον τοῦ ὀρθοκέντρου; τοῦ σημείου τομῆς τῶν διχοτόμων;

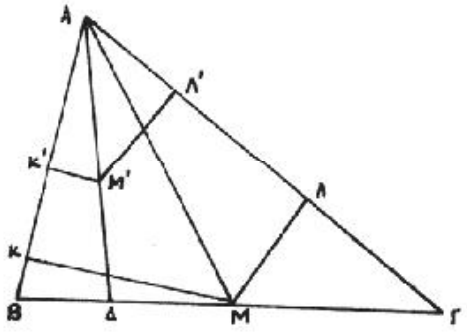
τὴν ΒΓ ὡς πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΓ.

Ἡ Β'Γ' ὡς ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην Αx τοῦ κύκλου περὶ τὸ ΑΒΓ εἰς Α. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ Μ' μέσον τοῦ τμήματος Β'Γ' ἔπεται ὅτι ἡ δέσμη Α.Β'Γ'Μ'x θὰ εἶναι ἁρμονική.

Ἡ Αx ὀνομάζεται **ἐξωτερικὴ συμμετροδιάμεσος** τῆς γωνίας Α.

II - 14.2

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα σημεῖον Μ' εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς συμμετροδιαμέσου ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἶναι, αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι αὐτῶν.



Ἀναγκαῖον:

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς συμμετροδιαμέσου ΑΔ. Εἶναι ὡς γνωστὸν (11.12)

$$\frac{M'K'}{M'\Lambda'} = \frac{M\Lambda}{MK} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $\dfrac{A\Gamma \cdot M\Lambda}{AB \cdot MK} = \dfrac{(AM\Gamma)}{(AMB)} = 1$

ἤτοι: $\dfrac{M\Lambda}{M\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$ (2). (1), (2) $\Longrightarrow$ $\dfrac{M'K'}{M'\Lambda'} = \dfrac{\gamma}{\beta}$

Ἱκανόν:

$$\frac{M'K'}{M'\Lambda'} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{M\Lambda}{MK} \Longrightarrow \overset{\Delta}{K'M'\Lambda'} \sim \Lambda MK \Longrightarrow \hat{K'\Lambda'M'} = \hat{\Lambda KM} \Longrightarrow \hat{BAM'} = \hat{\Gamma AM}$$

II - 14.3

Ἂν ΑΔ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α συμμετροδιάμεσος θὰ εἶναι: $\dfrac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

Ἡ ἀπόδειξις ἐκ τοῦ II-5.1

Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον (ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

II - 14.4

Αἱ συμμετροδιάμεσοι ἑνὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν σημεῖον τοῦ L e m o i n e.

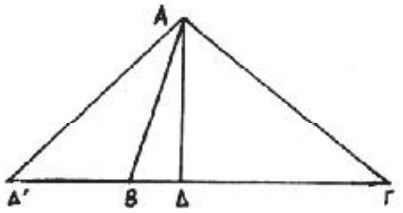
Πράγματι διότι τοῦτο εἶναι τὸ ἰσογώνιον τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου (II-5.2).

II - 14.5

Ἑκάστη συμμετροδιάμεσος τοῦ τριγώνου διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν συμμετροδιαμέσων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας κορυφάς.

Ἀπόδειξις:

Ἂν ΑΔ καὶ ΑΔ′ ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ συμμετροδιάμεσος, θὰ εἶναι: Β,Γ - Δ,Δ′ ἁρμονικὴ τετράς, ἤτοι:



$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'} \qquad (1)$$

Ἀλλ' ὡς γνωστὸν (11-7.3) $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$, ὅθεν $\frac{B\Delta'}{\Gamma\Delta'}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$

Λαμβάνοντες τὰς ἀναλόγους ἐκφράσεις διὰ τὰς ἐξωτερικὰς συμμετροδιαμέσους ΒΕ′, ΓΖ′ καὶ τὴν ΑΔ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Συμπέρασμα. Ἡ συμμετροδιάμεσος τῆς γωνίας Α διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς Β καὶ Γ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

11-14.6

Ἔστω P_1, P_2, P_3 αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου τοῦ Lemoine ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι:

$$\frac{P_1}{\alpha}=\frac{P_2}{\beta}=\frac{P_3}{\gamma}$$

Ἡ πρότασις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς 11-7.2.

11-14.7

Τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι ἐλάχιστον.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω x, y, z αἱ ἀποστάσεις σημείου Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον, ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι δὲν δύναται νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα $\alpha x+\beta y+\gamma z = 2(ABC)$ (1). Ἡ ταυτότης τοῦ Lagrange ὡς γνωστὸν εἶναι:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(\alpha y-\beta x)^2+(\beta z-\gamma y)^2+(\alpha z-\gamma x)^2 \qquad (2)$$

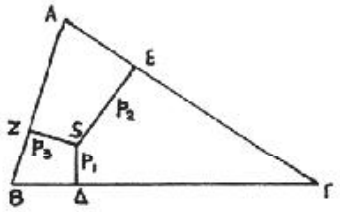
$$(1),(2) \Longrightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{4E^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\beta z-\gamma y)^2+(\alpha z-\gamma x)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Τὸ δεξιὸν μέρος τῆς τελευταίας ἰσότητος γίνεται ἐλάχιστον ἂν $\alpha y-\beta x=\beta z-\gamma y=\alpha z-\gamma x=0$ ἤτοι ἂν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ ἤτοι $M\equiv S$.

11-14.8

Τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ποδικοῦ τοῦ τριγώνου.

Απόδειξις:



Έστω ΑΒΓ τυχόν τρίγωνον καὶ S τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine. Δ, Ε καὶ Ζ αἱ προβολαὶ τοῦ S ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ S εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ΔΕΖ.

Ἀρκεῖ: $(\Delta SZ)=(\Delta SE)=(ZSE)$

$\hat{A}+\hat{ZSE}=2^L \Longrightarrow \frac{(ZSE)}{(AB\Gamma)}=\frac{P_2P_3}{\beta\gamma}$ (1) Ἀλλὰ $\frac{P_1}{\alpha}=\frac{P_2}{\beta}=\frac{P_3}{\gamma}=\frac{\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\frac{2(AB\Gamma)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \Longrightarrow$

$\frac{P_2P_3}{\beta\gamma}=\frac{4(AB\Gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$ (2). (1),(2) $\Longrightarrow (ZSE)=\frac{4(AB\Gamma)^3}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$

Τὸ β≅ μέλος εἶναι συμμετρικὴ παράστασις τῶν α, β, γ, ἄρα ἡ ἀπόδειξις τελείωσε.

11-14.9

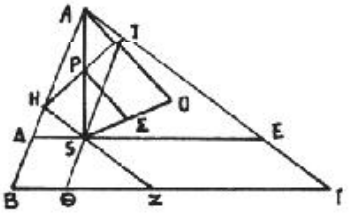
Τὸ μῆκος ἑκάστης συμμετροδιαμέσου θὰ δοθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων τοῦ Stewart, εἶναι δὲ διὰ τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς Α συμμετροδιάμεσον μ_α':

$$\mu_\alpha'=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}-\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\beta^2+\gamma^2)^2}$$

11-14.10 Ὁ πρῶτος κύκλος τοῦ Lemoine

Ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ Lemoine S τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, τεμνούσας, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ τὰς ΒΓ καὶ ΒΑ εἰς Ζ καὶ Η, ἡ δὲ παράλληλος πρὸς ΑΒ τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ εἰς Ι καὶ Θ. Τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι ὁμοκυκλικά.

Απόδειξις:



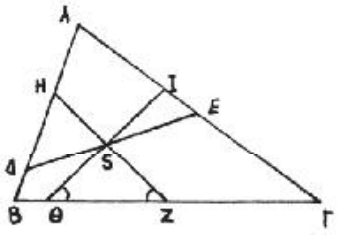
Ἡ ΗΙ εἶναι διαγώνιος τοῦ παρ/μου ΑΗSΙ, ἄρα PH=PI. Ἐκ τῆς ἐκθέσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ 11-14.1 παρατήρησις 1 προκύπτει ὅτι ἡ ΗΙ εἶναι ἀντιπαράλληλος πρὸς ΒΓ ἤτοι ΗΙ⊥ΑΟ. Ἔστω Σ τὸ μέσον τοῦ τμήματος SO. Ἡ ΡΣ εἶναι μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν ΙΗ. Ἤτοι αἱ μεσοκάθετοι ἐπὶ τὰς ΗΙ, ΔΘ, ΖΕ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Σ. Τὸ τετράπλευρον ΔΗΙΕ εἶναι ἐγγράψιμον, ἄρα τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι κεῖνται ἐπὶ κύκλου (Σ, ΣΗ). Ὁ ἐν λόγῳ κύκλος ὀνομάζεται πρῶτος κύκλος τοῦ Lemoine.

11-14.11 Ὁ δεύτερος κύκλος τοῦ Lemoine

Διὰ τοῦ σημείου τοῦ Lemoine S τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς ἀντιπαραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς. Ἔστω ὅτι ἡ ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ὁμοίως ἡ ἀντιπαράλληλος πρὸς ΑΓ τὰς ΒΓ καὶ ΑΒ εἰς Ζ καὶ Η, τέλος ἡ ἀντιπαράλληλος πρὸς ΑΒ τὰς ΒΓ καὶ ΑΓ εἰς Θ καὶ Ι. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι ὁμοκυκλικά.

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστὸν $SZ=SH$, $S\Theta=SI$, ἀλλὰ τὰ τετράπλευρα $AI\Theta B$ καὶ $AHZ\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμα. Ἄρα $\hat{\Theta}=\hat{Z}=\hat{A}$. Ἤτοι τὸ ΘZIH εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ὁμοίως τὸ $A\Theta EI$.



11-15 Τὸ σημεῖον τοῦ Steiner

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA, AB τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ πρὸς τὸ ἐξωτερικόν αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma A'$, $\Gamma AB'$, $AB\Gamma'$ θὰ εἶναι:

① $AA'=BB'=\Gamma\Gamma'$

② Ἂν $\max(\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma})<120^\circ$, τότε $\hat{BP\Gamma}=\hat{\Gamma PA}=\hat{APB}$

③ Αἱ AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P (σημεῖον τοῦ Steiner).

④ Ἐὰν K,Λ,M τὰ κέντρα τῶν $\overset{\Delta}{B\Gamma A'}$, $\overset{\Delta}{\Gamma AB'}$, $\overset{\Delta}{AB\Gamma'}$ τὸ τρίγωνον $K\Lambda M$ εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἀπόδειξις:

① $\left.\begin{matrix}AB=A\Gamma'\\ AB'=A\Gamma\\ BAB'=\Gamma'A\Gamma=60^\circ+A\end{matrix}\right\}$ $BAB'=\Gamma'A\Gamma$ (1)

Ἔστω P τὸ σημεῖον τομῆς τῶν BB', $\Gamma\Gamma'$.

② (1) $\Longrightarrow \hat{PBA}=\hat{P\Gamma'A} \Longrightarrow PA\Gamma'B$ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow \hat{APB}=120^\circ$ (2)

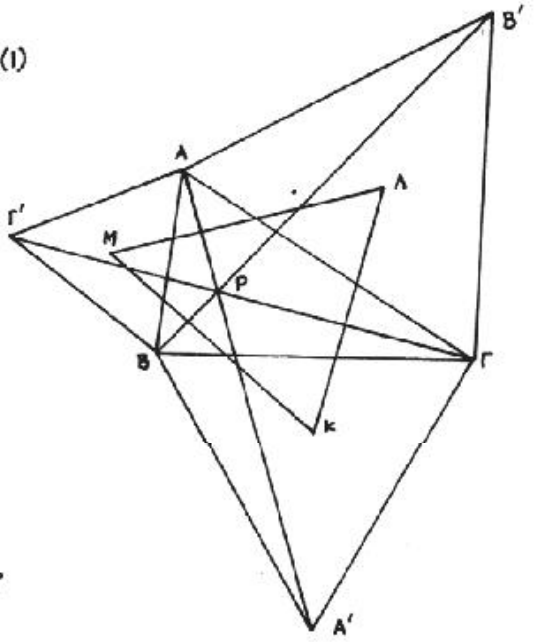
Ὁμοίως $\hat{AP\Gamma}=120^\circ$ (3)

(2), (3) $\Longrightarrow \hat{BP\Gamma}=120^\circ$ (4)

③ $\hat{BP\Gamma}+\hat{A'}=180^\circ \Longrightarrow BP\Gamma A'$ ἐγγράψιμον $\Longrightarrow \hat{\Gamma PA'}=\hat{\Gamma BA'}=60^\circ$ (5)

(3), (5) $\Longrightarrow \hat{AP\Gamma}+\hat{\Gamma PA'}=180^\circ \Longrightarrow A,P,A'$ ἐπ' εὐθείας.

④ Τὰ εὐθ. τμήματα PA, PB, $P\Gamma$ σχηματίζουν γωνίας 120°. Ἄρα αἱ μεσοκάθετοι ἐπ' αὐτὰ $M\Lambda$, MK, $K\Lambda$ σχηματίζουν ἀνὰ δύο γωνίας 60°. Ἤτοι $K\Lambda M$ ἰσόπλευρον.



Παρατηρήσεις

① Ἐὰν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma A'$, $\Gamma AB'$, $AB\Gamma'$ εἶχον κατασκευασθῆ πρὸς τὴν ἀντίθετον κατεύθυσιν, ἤτοι πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ $AB\Gamma$, τὸ θεώρημα ἐξακολουθεῖ νὰ ὑφίσταται μὲ τὴν ἰδίαν ἀπόδειξιν, πλὴν τοῦ ② τὸ ὁποῖον γίνεται ὡς ἑξῆς:

Τὸ σημεῖον τομῆς P τῶν AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ φαίνεται ἡ μία πλευρὰ τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ὑπὸ γωνίαν 120°, αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ ὑπὸ γωνίαν 60°.

② Ἐὰν $\max(A,B,\Gamma)>120^\circ$, τότε τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τρι-

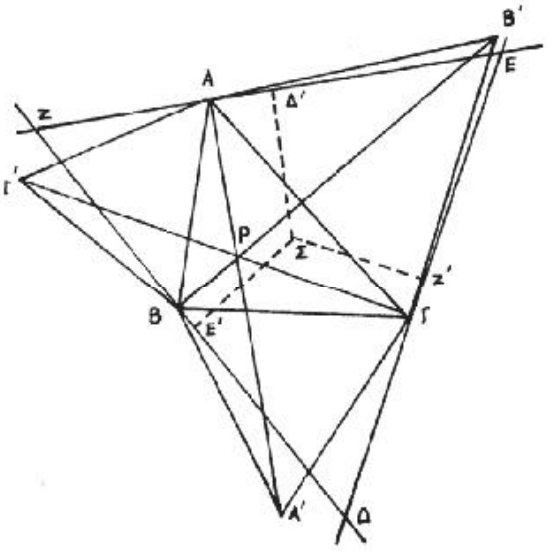
χώνου. Ἐκ τούτου φαίνεται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά ὑπό χωνίαν 120°, αἱ ἕτεραι δύο δέ ὑπό χωνίαν 60°.

Ιι - 15.1

Ἐάν εἰς τό τρίχωνον ΑΒΓ εἶναι $\max(\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}) < 120°$ καί Σ τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον, ἐνῶ Ρ τό σημεῖον Steiner, θά ἔχωμεν:

$$A\Sigma + B\Sigma + \Gamma\Sigma > AP + BP + \Gamma P$$

Ἀπόδειξις:



Εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ ἐπί τάς ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ ἀντιστοίχως φέρομεν τάς καθέτους, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουν τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΔΕΖ (διότι αἱ ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ σχηματίζουν ἀνά δύο χωνίας 120°). Ἐκ τοῦ σημείου Σ φέρομεν τάς καθέτους ἐπί τάς πλευράς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἔχομεν ΣΔ' + ΣΕ' + ΣΖ' = ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ = πρός τό ὕψος τοῦ $\Delta\hat{E}Z$.

Ἀλλά ΣΑ > ΣΔ', ΣΒ > ΣΕ', ΣΓ > ΣΖ'. Ἤτοι:

$$\Sigma A + \Sigma B + \Sigma\Gamma > PA + PB + P\Gamma$$

Παρατήρησις

Εἶναι ὡς γνωστόν ΡΒ + ΡΓ = ΡΑ'. Ἄρα ΑΡ + ΒΡ + ΓΡ = ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ'.

Ιι - 15.2

Ἐπί τοῦ σχήματος 11-15: κατασκευάζομεν ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' ἰσόπλευρα τρίγωνα Β'Γ'Α'', Γ'Α'Β'', Α'Β'Γ'' ἐξωτερικῶς. Τά σημεῖα Α, Α', Α'' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καί ΑΑ' = ΑΑ''.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἄν $\hat{A} < 60°$ ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒ'Γ' ἔχουν κατασκευασθῆ ἐξωτερικῶς τά ἰσόπλευρα ΑΓ'Β, ΑΒ'Γ, Β'Γ'Α''. Ἄρα συμφώνως πρός 11-15 αἱ εὐθεῖαι ΑΑ'', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου καί τά ἀντίστοιχα τμήματα ΑΑ'', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσα.

Ἄν $A > 60°$ τά ἴσα τρίγωνα κατασκευάζονται ἐσωτερικῶς τοῦ $\Delta\hat{A}B'\Gamma'$, ὅτε ἰσχύει πάλιν.

Ιι - 16 Τό θεώρημα τοῦ Vecten

Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἐπί τῶν πλευρῶν του ἐξωτερικῶς κατασκευάζομεν τά τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ, ΒΓΘΙ.

① Ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ $\Delta\hat{A}B\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΕΗ.

② Τό ὕψος ΑΚ τοῦ $\Delta\hat{A}B\Gamma$ εἶναι διάμεσος τοῦ $\Delta\hat{E}AH$.

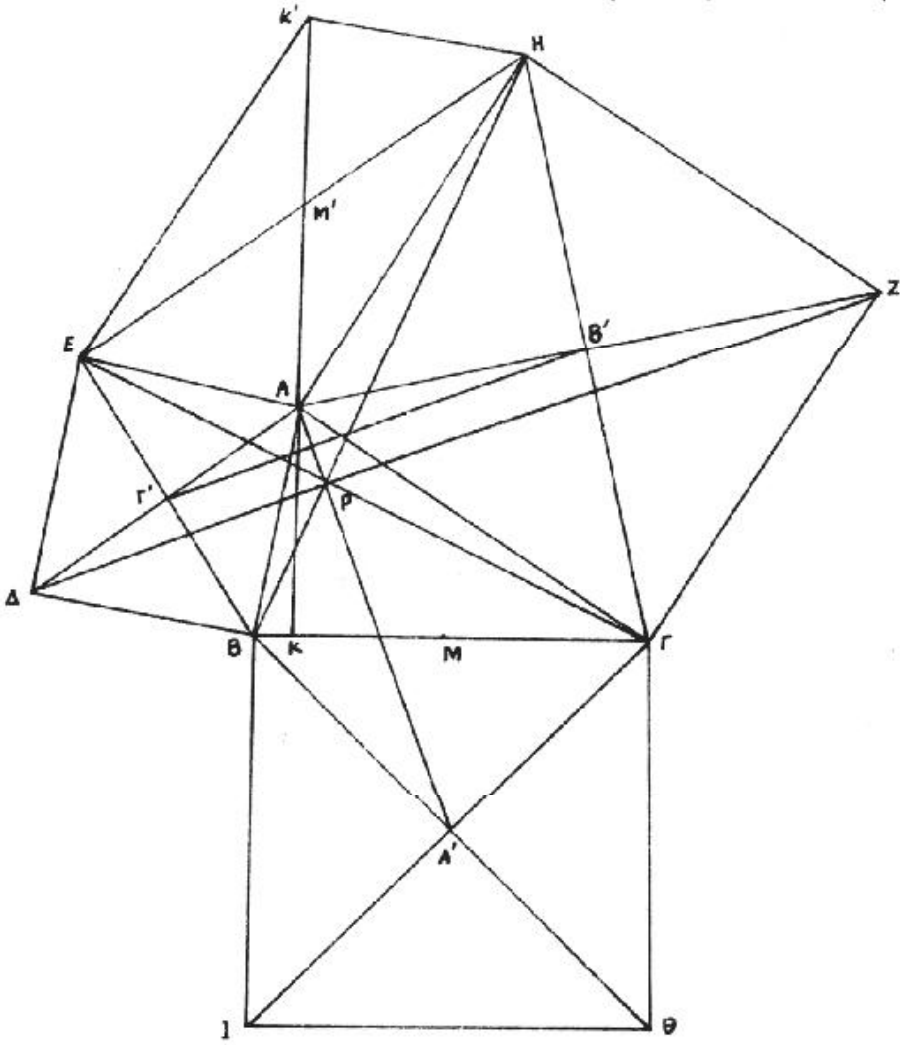
③ ΕΗ = 2μα

④ Ἂν Μ' τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΕΗ, εἶναι: ΣΑΜ'=α

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἰδὲ ἄσκησιν Σ1(α).

41 - 16.1

Αἱ εὐθεῖαι ΒΗ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς αὐτῶν διέρχεται ἡ ΔΖ.



Εἰς τὴν ἄσκησιν 15 ἀπεδείχθη ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΒΗ καὶ ΓΕ εἶναι κάθετα καὶ ἴσα. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὰ ἐγχρώμισμα τετράπλευρα ΒΔΕΡ, ΓΖΗΡ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τὰ σημεῖα Δ,Ρ,Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

42 - 16.2

Αἱ Βz, ΓΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΚ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, λαμβάνομεν ΑΚ'=ΒΓ καὶ διαπιστώνομεν ὅτι Β z, ΓΔ, Κ'κ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΒΚ'Γ.

11-16.3

Αἱ εὐθεῖαι Εz, ΗΔ καὶ ἡ διάμεσος ΑΜ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου διὰ τὸ τρίγωνον ΕΑΗ.

11-16.4 Τὸ σημεῖον τοῦ Vecten

Θέτομεν Α', Β', Γ' τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων. Αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Ὁ κύκλος περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ Ρ. Τὸ τετράπλευρον ΒΡΓΑ' εἶναι ἐγγράψιμον. $B\hat{P}A = 135°$, $B\hat{P}A' = 45°$. Ἤτοι Α, Ρ, Α' ἐπ' εὐθείας.

Ἀκόμη $B\hat{P}\Delta + B\hat{P}A' = 90°$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ΑΑ' ὕψος τοῦ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Ἄρα αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

11-17 Οἱ κύκλοι τοῦ Ἀπολλωνίου

Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν κύκλον τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τὸν κύκλον ποὺ γράφεται μὲ διάμετρον ΔΔ', ὅπου ΑΔ ἡ δικοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ ΑΔ' ἡ δικοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς κύκλους τοῦ Ἀπολλωνίου. Διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὁ κύκλος ὡς πρὸς τὴν ΒΓ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ὥστε:

$$\frac{BM}{\Gamma M} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

11-17.1

Αἱ τρεῖς περιφέρειαι τοῦ Ἀπολλωνίου δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διὰ δύο σημείων P_1, P_2.

Τὰ σημεῖα P_1, P_2 καλοῦνται **ἰσοδυναμικὰ κέντρα** τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις:

Ἔστωσαν $(O_\alpha), (O_\beta), (O_\gamma)$ οἱ κύκλοι τοῦ Ἀπολλωνίου διερχόμενοι ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ. Θέτομεν P_1, P_2 τὰ σημεῖα τομῆς τῶν $(O_\alpha), (O_\beta)$ (εἶναι προφανὲς ὅτι οὗτοι τέμνονται). Τὸ σημεῖον P_1 ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον (O_α), ἄρα:

$$\frac{BP_1}{\Gamma P_1} = \frac{\gamma}{\beta} \quad (1)$$

Ἐπίσης ἀνήκει καὶ εἰς τὸν (O_β), ἤτοι:

$$\frac{\Gamma P_1}{AP_1} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad (2) \qquad (1), (2) \Longrightarrow \frac{BP_1}{AP_1} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ ὅθεν } P_1 \in (O_\gamma).$$

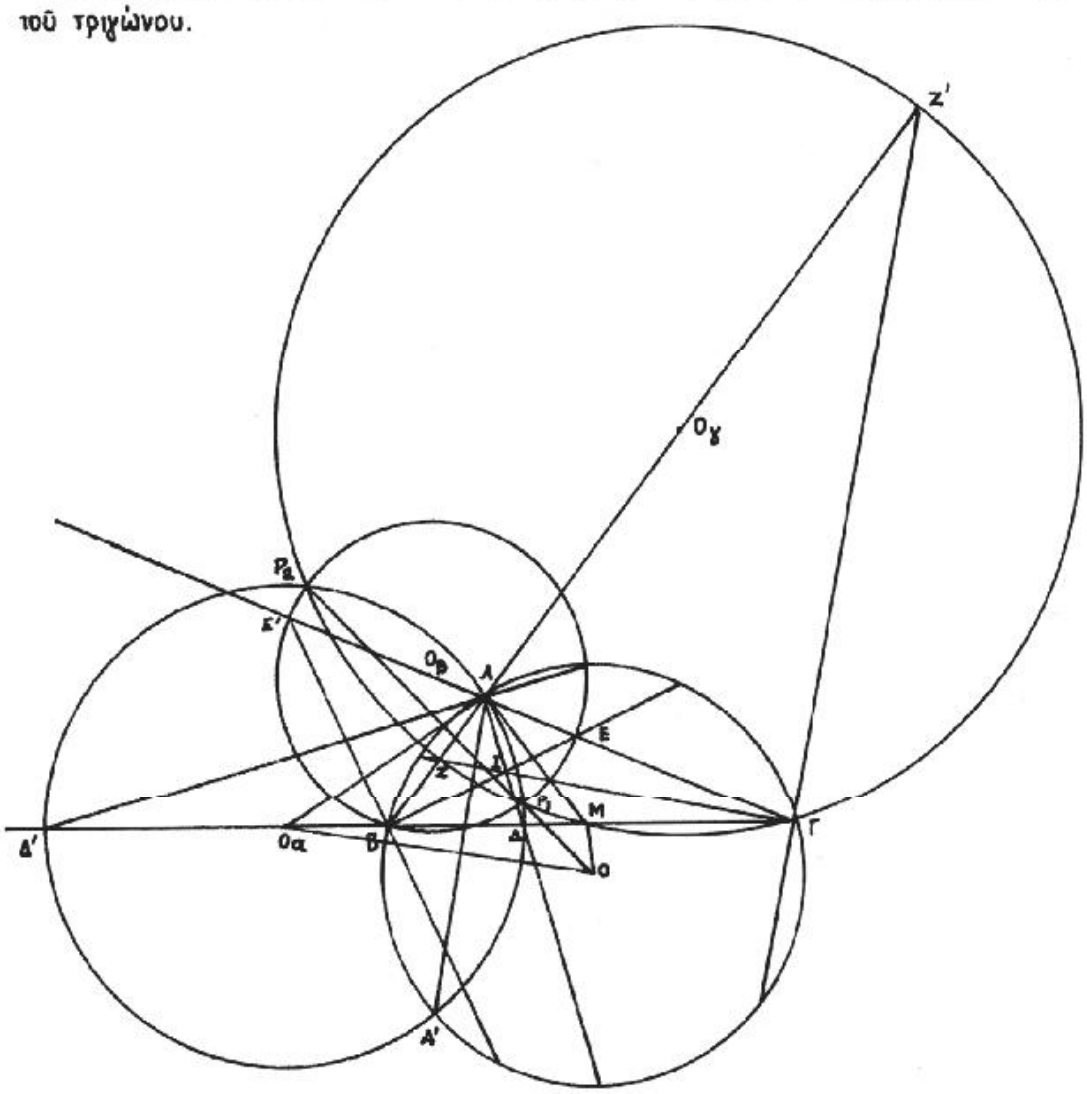
Μ - 17.2

Τά κέντρα τῶν κύκλων τοῦ Ἀπολλωνίου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Τοῦτο εἶναι προφανές, δεδομένου ὅτι οἱ κύκλοι τοῦ Ἀπολλωνίου ἔχουν κοινήν χορδήν.

Μ - 17.3

Ἕκαστος κύκλος τοῦ Ἀπολλωνίου εἶναι ὀρθοχώνιος πρός τόν περιγεγραμμένον κύκλον τοῦ τριγώνου.



Ἀπόδειξις:

Ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α καί ΑΔ' ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α. (Ὁδέ εκπμα). Εἶναι ὡς γνωστόν (ΓΒ - Δ,Δ') ἁρμονική τετράς. Ὅθεν συμφώνως πρός 4-4.4 ὁ κύκλος περί τό ΑΒΓ καί ὁ κύκλος Οα τέμνονται ὀρθοχωνίως.

Μ - 17.4

Τό κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (O,R) περί τό τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται ἐπί τῆς εὐ-

θείας P_1P_2.

Πράγματι. Ὁ κύκλος (O,R) τέμνει ὀρθογωνίως τούς $(O_\alpha),(O_\beta)$ ἄρα τό κέντρον του κεῖται ὡς γνωστόν, ἐπί τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν.

Ιι - 17.5

Ἡ πολική τοῦ P_1 ὡς πρός (O,R) διέρχεται διά τοῦ P_2.

Τοῦτο εἶναι προφανές δεδομένου ὅτι ὁ κύκλος (O_α) τέμνει ὀρθογωνίως τόν (O) καί τά σημεῖα O,P_1,P_2 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ιι - 17.6

Αἱ χορδαί τῶν κύκλων τοῦ Ἀπολλωνίου μετά τῆς περιγεγραμμένης περί τό τρίγωνον περιφερείας εἶναι αἱ συμμετροδιάμεσοι τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις:

Θέτομεν A' τό δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων $(O_\alpha),(O)$ καί M τό μέσον τοῦ τμήματος $B\Gamma$. Τό τετράπλευρον $O_\alpha AMO$ εἶναι ἐγγράψιμον ($\hat{O_\alpha AO}=\hat{O_\alpha MO}=1^L$). Τό τρίγωνον $O_\alpha A\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές (ἰδέ σχῆμα). Θά ἔχωμεν: $\hat{\Delta AM}=\hat{A\Delta O_\alpha}-\hat{AMO_\alpha}$ (1). Ἀλλά $\hat{A\Delta O_\alpha}=\hat{O_\alpha A\Delta}$ καί $\hat{AMO_\alpha}=\hat{AOO_\alpha}=\hat{O_\alpha AA'}$. Ἄρα ἡ (1) γίνεται: $\hat{\Delta AM}=\hat{O_\alpha A\Delta}-\hat{O_\alpha AA'}=\hat{\Delta AA'}$.

Ιι - 17.7

Ἐάν $(O_\alpha,P_\alpha),(O_\beta,P_\beta),(O_\gamma,P_\gamma)$ οἱ κύκλοι τοῦ Ἀπολλωνίου διά τό τρίγωνον $AB\Gamma$ ὅπου α περιέχεται μεταξύ β καί γ θά εἶναι:

$$\frac{1}{P_\alpha}=\frac{1}{P_\beta}+\frac{1}{P_\gamma}$$

Ἀπόδειξις:

Ἀπό τό θεώρημα τῆς διχοτόμου εἰς τό τρίγωνον $A\hat{B}\Gamma$ ἔχομεν:

$\frac{B\Delta}{\gamma}=\frac{\Delta\Gamma}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\Longrightarrow B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, ὁμοίως $B\Delta'=\frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|}$, ἤτοι: $P_\alpha=\frac{\alpha\beta\gamma}{|\beta^2-\gamma^2|}$

Ὁμοίως $P_\beta=\frac{\alpha\beta\gamma}{|\gamma^2-\alpha^2|}$, $P_\gamma=\frac{\alpha\beta\gamma}{|\alpha^2-\beta^2|}$

Θεωροῦμεν ὅτι ὑφίσταται μία ἐκ τῶν διαδοχῶν $\beta<\alpha<\gamma$, $\gamma<\alpha<\beta$ καί διαπιστώνομεν τήν ἰσχύν τοῦ τύπου.

Ιι - 18 Μερικά θεωρήματα ἐπί τῶν ἀντιπαραλλήλων

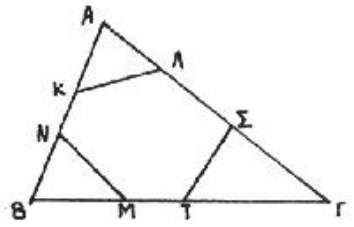
Διά τούς σχετικούς ὁρισμούς ἰδέ **2-7.4**

Ιι - 18.1

Θεωρήσωμεν τριγώνου $AB\Gamma$ καί ἔστω $B'\Gamma'$ ἀντιπαράλληλος πρός τήν $B\Gamma$. Τό μέσον τοῦ τμήματος $B'\Gamma'$ κεῖται ὡς γνωστόν (Ιι-14.1) ἐπί τῆς συμμετροδιαμέσου διά τῆς κορυφῆς A.

II - 18.2

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ΚΛ, ΜΝ, ΣΤ ἀντιπαράλληλοι πρός τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καί ἴσου μήκους, ἤτοι: ΚΛ = ΜΝ = ΣΤ. Τά σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Σ, Τ θά εἶναι ὁμοκυκλικά.



Ἀπόδειξις:

Εἶναι ΑΝΜΓ, ΑΒΤΣ ἐγγράψιμα, ἄρα $\hat{BMN} = \hat{\Gamma T\Sigma} = A$. Ἤτοι ΝΜΤΣ ἰσοσκελές τραπέζιον. Ἐπίσης τό ΜΝΚΛ ἰσοσκελές τραπέζιον, ἄρα ΛΜ παράλληλος πρός ΑΒ. Ἐπειδή ἡ ΣΤ εἶναι ἀντιπαράλληλος πρός τήν ΑΒ θά εἶναι ἐπίσης ἀντιπαράλληλος πρός τήν ΛΜ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό τετράπλευρον ΜΝΣΛ εἶναι ἐγγράψιμον.

Παρατήρησις

Συνδέσατε τό ἀνωτέρω θεώρημα μέ τόν δεύτερον κύκλον τοῦ Lemoine.

II - 18.3

Συνδέομεν τάς κορυφάς τριγώνου ΑΒΓ μέ τό σημεῖον τοῦ Lemoine S αὐτοῦ. Τά εὐθ. τμήματα SA, SB, SΓ διαιροῦμεν εἰς τόν αὐτόν λόγον. Αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως ἀντιπαράλληλοι πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τάς πλευράς εἰς ἓξ σημεῖα. Νά δειχθῇ ὅτι τά ἐν λόγῳ σημεῖα εἶναι ὁμοκυκλικά.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω Α', Β', Γ' τά σημεῖα διαιρέσεως. Θά ἔχωμεν:

$$\frac{AA'}{A'S} = \frac{BB'}{B'S} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'S}$$

Θέτομεν ΚΛ, ΜΝ, ΤΣ τάς ἐκ τῶν Α', Β', Γ' ἀντιπαραλλήλους πρός τάς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Δεδομένου ὅτι, αἱ ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τοῦ Lemoine S ἀγόμεναι ἀντιπαράλληλοι πρός τάς πλευράς τοῦ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, ἔχουν τό αὐτό μῆκος, θά εἶναι καί ΚΛ = ΜΝ = ΣΤ. Ὅθεν κατά τό προηγούμενον θεώρημα τά σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Σ, Τ εἶναι ὁμοκυκλικά.

II - 18.4

Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἔστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τά ὕψη του. Διαιροῦμεν, διά τῶν σημείων Α', Β', Γ' τά ὕψη εἰς τόν αὐτόν λόγον, ἤτοι:

$$\frac{AA'}{A'\Delta} = \frac{BB'}{B'\Delta} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'\Delta} = \lambda$$

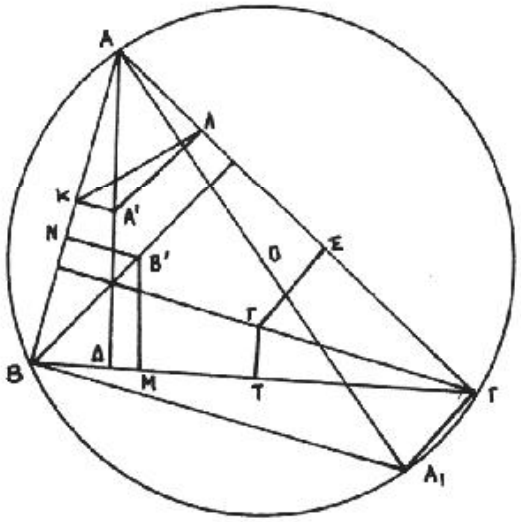
Θά δείξωμεν ὅτι οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν Α', Β', Γ' ἀγομένων καθέτων ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ κεῖνται ἐπί μιᾶς περιφερείας.

Ἀπόδειξις:

Εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι τά τετράπλευρα ΚΑΛΑ', ΓΑΒΑ, εἶναι ὅμοια, ἤτοι:

$$\frac{K\Lambda}{AA'}=\frac{\alpha}{2R}\Longrightarrow K\Lambda=\frac{\lambda\alpha_\alpha}{2(\lambda+1)R}=\frac{\lambda E}{(\lambda+1)R}$$

Άρα $K\Lambda=MN=T\Sigma$. Άλλά ή $K\Lambda$ είναι αντιπαράλληλος πρός τήν $B\Gamma$, ή MN πρός τήν $A\Gamma$, κλπ.



Σημείωσις.

Άν άντί τών A', B', Γ' λάβωμεν τά ίχνη τών ύψών τό θεώρημα ἐξακολουθῆ νά ὑφίσταται ὁ κύκλος δέ ἐπί τοῦ ὁποίου κεῖνται τά ἓξ σημεῖα λέγεται κύκλος τοῦ T a y l o r. (ἰδέ ἀσκήσεις 253).

11-18.5

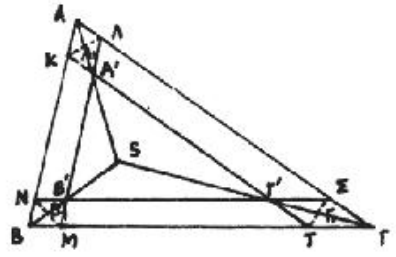
Συνδέομεν τάς κορυφάς τριγώνου $AB\Gamma$ μέ τό σημεῖον τοῦ Lemoine S αὐτοῦ. Τά εὐθ. τμήματα $SA, SB, S\Gamma$ διαιροῦμεν διά τῶν σημείων A', B', Γ' εἰς τόν αὐτόν λόγον, ἤτοι:

$$\frac{AA'}{A'S}=\frac{BB'}{B'S}=\frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'S}=R$$

Νά δειχθῆ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A'B', B'\Gamma', \Gamma'A'$ τέμνουν τάς πλευράς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἰς ἓξ ὁμοκυκλικά σημεῖα (κύκλος τοῦ T u c k e r).

Ἀπόδειξις:

Τό $AK\Lambda A'$ εἶναι παραλ/μον (ἰδέ σχῆμα). Άρα τό ἀχθέμενον ἐκ τοῦ A_1 εὐθ. τμῆμα $K\Lambda$ ἔχει τό μέσον του A_1 ἐπί τῆς συμμετροδιαμέσου AS. Άρα $K\Lambda$ ἀντιπαράλληλος πρός τήν $B\Gamma$. Δεδομένου ὅτι



$$\frac{AA_1}{A_1S}=\frac{BB_1}{B_1S}=\frac{\Gamma\Gamma_1}{\Gamma_1S}=\frac{\lambda}{\lambda+2}$$

ἐκ τοῦ 11-18.2 προκύπτει ὅτι τά σημεῖα $K, \Lambda, M, N, \Sigma, T$ εἶναι ὁμοκυκλικά. Ὁ ἐν λόγῳ κύκλος ὀνομάζεται κύκλος τοῦ T u c k e r. Τό κέντρον ὡς εὐκόλως δύναται νά δειχθῆ, κεῖται ἐπί τῆς SO.

11-19 Τό σημεῖον τοῦ Miquel

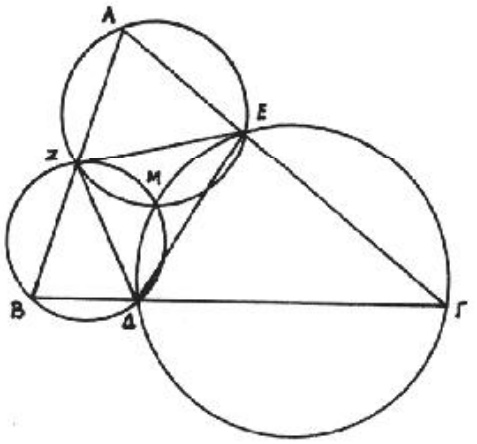
Ἐπί τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ, E, Z. Εἶναι γνωστόν (Ἄσκ. 107) ὅτι οἱ κύκλοι περί τά τρίγωνα $ZB\Delta, \Delta\Gamma E, EAZ$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου M. Τό σημεῖον M ὀνομάζεται σημεῖον τοῦ M i q u e l διά τό τρίγωνον ΔEZ.

11-19.1

Αἱ εὐθεῖαι $M\Delta, ME, MZ$ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μέ τάς πλευράς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοί-

χως.

Εἶναι προφανές, ἀπό τό $MZB\Delta$ ὅτι $\hat{MZB} = \hat{M\Delta\Gamma}$.



Η - 19.2

Θέτομεν $\hat{\Delta}, \hat{E}, \hat{Z}$ τάς γωνίας τοῦ τριγώνου ΔEZ. Εἶναι:

$B\hat{M}\Gamma = \hat{A} + \hat{\Delta}$, $\Gamma\hat{M}A = \hat{B} + \hat{E}$, $A\hat{M}B = \hat{\Gamma} + \hat{Z}$. Ἐάν ἕν ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τοῦ β΄ μέλους ὑπερβαίνει τάς δύο ὀρθάς, π.χ. $\hat{A} + \hat{\Delta} > 2^L$, τότε $B\hat{M}\Gamma$ θά ἐννοοῦμεν τήν μή κυρτήν γωνίαν.

Ἀπόδειξις:

$B\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta + \Gamma\hat{M}\Delta = B\hat{Z}\Delta + \Gamma\hat{E}\Delta = B\hat{A}\Delta + A\hat{\Delta}Z + \Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{\Delta}E = \hat{A} + \hat{\Delta}$.

Η - 19.3

Θεωροῦμεν τό τρίγωνον $AB\Gamma$ καί ἔστω Δ, E, Z σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως ὥστε τό τρίγωνον ΔEZ νά εἶναι ὅμοιον πρός δοθέν τρίγωνον PQR. ($\Delta\hat{E}Z \sim P\hat{Q}R$). Νά δειχθῆ ὅτι οἱ κύκλοι περί τά τρίγωνα $ZB\Delta, \Delta\Gamma E, EAZ$ διέρχονται διά σταθεροῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Οἱ τρεῖς κύκλοι, ὡς ἀπεδείχθη ἀνωτέρω, διέρχονται διά τοῦ σημείου τοῦ Miquel τοῦ ΔEZ. Δοθέντος τοῦ PQR τό σημεῖον τοῦτο εἶναι ὡρισμένον. Διότι: $B\hat{M}\Gamma = \hat{A} + \hat{P}$, $\Gamma\hat{M}A = \hat{B} + \hat{Q}$, $A\hat{M}B = \hat{\Gamma} + \hat{R}$.

Ἐφαρμογαί

1. Δοθέντος σημείου Δ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ νά ἐγγραφῆ τρίγωνον ΔEZ ὅμοιον πρός τό PQR.

Πρός τοῦτο εὑρίσκομεν τό σημεῖον τοῦ Miquel καί κατασκευάζομεν γωνίας $M\hat{\Delta}Z = M\hat{B}A$, $M\hat{\Delta}E = M\hat{\Gamma}A$.

2. Διά δοθέντος σημείου Δ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ νά ἀχθῆ τέμνουσα τάς AB καί $A\Gamma$ εἰς Z καί E ὥστε $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{\mu}{\nu}$

Ἡ ἰδία λύσις, μέ τό τρίγωνον PQR: $\hat{P} = 180°$, $\hat{Q} = 0°$, $\hat{R} = 0°$ καί $\frac{PR}{PQ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Παρατηρήσεις

① Δοθέντος τοῦ σημείου Δ ἐπί τῆς $B\Gamma$ ὑπάρχουν ἓξ τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τό $A\hat{B}\Gamma$ καί ὅμοια (εὐθέως καί ἀντιστρόφως) πρός τό $P\hat{Q}R$.

Δύο τρίγωνα $\Delta\hat{E}Z \sim P\hat{Q}R$ (τό εὐθέως καί τό ἀντιστρόφως ὅμοιον)

Ἄλλα δύο: $E\hat{Z}\Delta \sim P\hat{Q}R$

Καί ἄλλα δύο: $Z\hat{\Delta}E \sim P\hat{Q}R$.

Ἔστω ἐκ τῶν $\overset{\Delta}{AEZ}$ δημιουργεῖ μίαν οἰκογένειαν εὐθέως πρὸς αὐτὸ ὁμοίων τριγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον Miquel.

② Ἀντιπρόσωπος τῶν τριγώνων τῶν ἀνωτέρω 6 οἰκογενειῶν μπορεῖ νὰ ληφθῇ τὸ ποδικὸν τρίγωνον τοῦ ἀντιστοίκου, πρὸς τὴν οἰκογένειαν, σημείου τοῦ Miquel.

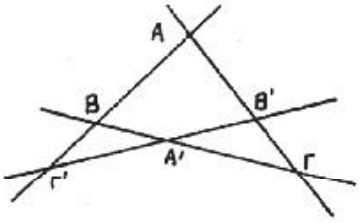
Πρόβλημα

Εἰς τὸ ἐπίπεδον τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ οἰκογένεια τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς σημεῖον τοῦ Miquel τὸ σημεῖον Μ.

II-20 Τὸ πλῆρες τετράπλευρον

Ὁρισμός

Ὀνομάζομεν πλῆρες τετράπλευρον τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας τεμνομένας ἀνὰ δύο.

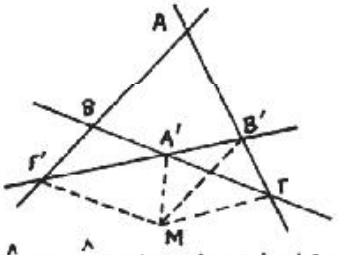


Ἔστω τὸ πλῆρες τετράπλευρον ΑΑ'ΒΒ'ΓΓ'. ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι κορυφῶν. ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' αἱ διαγώνιοι τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

II-20.1

Τὸ σημεῖον Miquel τοῦ πλήρους τετραπλεύρου. Οἱ κύκλοι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τοῦ πλήρους τετραπλεύρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. Τὸ σημεῖον τοῦτο ὀνομάζεται σημεῖον τοῦ Miquel διὰ τὸ πλῆρες τετράπλευρον.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων περὶ τὰ $\overset{\Delta}{A'B\Gamma'}$, $\overset{\Delta}{A'\Gamma B'}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒ'Γ' διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Μ.

Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΜΑ'Β'Γ ἔχομεν: $\hat{MB'\Gamma} = \hat{MA'\Gamma}$ (1). Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΜΑ'ΒΓ' ἔχομεν: $\hat{MA'\Gamma} = \hat{M\Gamma'B}$ (2). (1), (2) $\Longrightarrow \hat{MB'\Gamma} = \hat{M\Gamma'B}$, ἤτοι τὸ ΜΓ'ΑΒ' ἐγγράψιμον. Ὁμοίως διὰ τὸ ΜΒΑΓ.

Σημειώσεις.

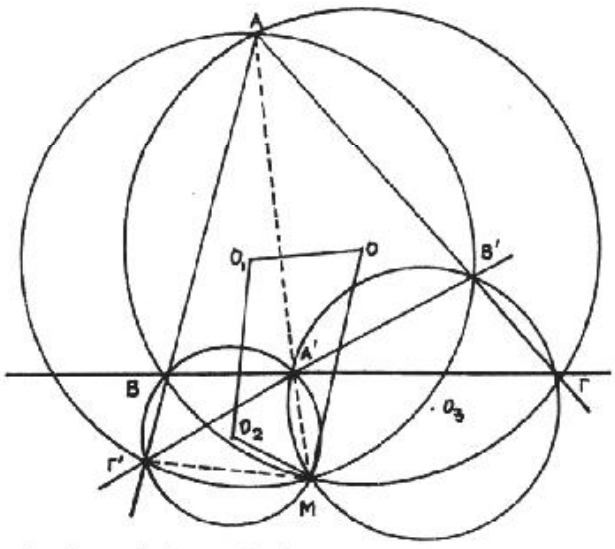
Τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ Miquel διὰ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ', ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἡ εὐθεῖα Α'Β'Γ' εἶναι ἡ γενικευμένη εὐθεῖα Simson τοῦ Μ ($\hat{M\Gamma'A} = \hat{MA'\Gamma} = \hat{MB'\Gamma}$).

II-20.2

Τὰ κέντρα τῶν κύκλων περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας διερχομένης ἐπίσης διὰ τοῦ σημείου Miquel.

Απόδειξις:

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ κύκλου περὶ τὸ $\overset{\Delta}{O_1O_2M}$ κεῖται τὸ σημεῖον O. $O_1O \perp AM$, $O_1O_2 \perp \Gamma'M$. Ἤτοι $\hat{OO_1O_2} = 2^L - \hat{AM\Gamma'}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι: $\hat{OMO_2} = \hat{AM\Gamma'}$ ἢ $\hat{O_2M\Gamma'} = \hat{OMA}$. τοῦτο ὅμως εἶναι ἀληθὲς διότι: $\hat{MB\Gamma'} = \hat{M\Gamma A} \Longrightarrow \hat{MO_2\Gamma'} = \hat{MOA} \Longrightarrow \hat{O_2M\Gamma'} = \hat{OMA}$.



Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι περὶ τὸν κύκλον O_1O_2M κεῖται καὶ τὸ O_3.

Παρατήρησις

Τὰ μέσα τῶν τμημάτων MA, MB, MΓ' κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τοῦ Simson τοῦ M πρὸς OO_1O_2.

II - 20.3

1. Οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ M ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2. Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:

1. Τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν διὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'ΒΓ'. Ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διέρχεται διὰ τῶν ἴχνων τῶν ἐκ τοῦ M ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς εὐθείας AB, BΓ.

τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον Α'ΒΓ'.

2. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ Steiner διὰ τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ περιέχει καὶ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ὑπολοίπων τριγώνων. (Ὁμοιοθετοῦσα τῆς εὐθείας τῶν ἴχνων τοῦ M μὲ λόγον $\frac{2}{1}$)

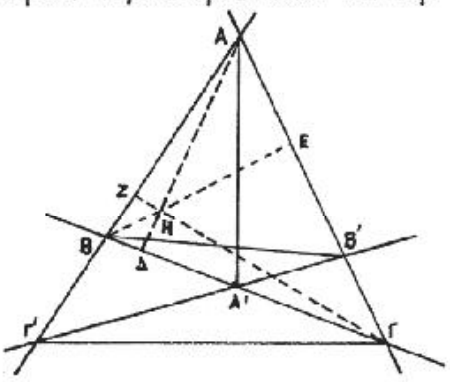
II - 20.4

Οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ἔχουν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω H τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη του. Ὡς γνωστὸν $HA \cdot H\Delta = HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ$, ἤτοι οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους AA', BB', ΓΓ' ἔχουν τὸ σημεῖον H ὡς ριζικὸν κέντρον.

Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ ὀρθόκεντρον H_1 τοῦ $\overset{\Delta}{AB'\Gamma'}$. Οἱ κύκλοι συνεπῶς, μὲ διαμέτρους AA', BB', ΓΓ' ἔχουν



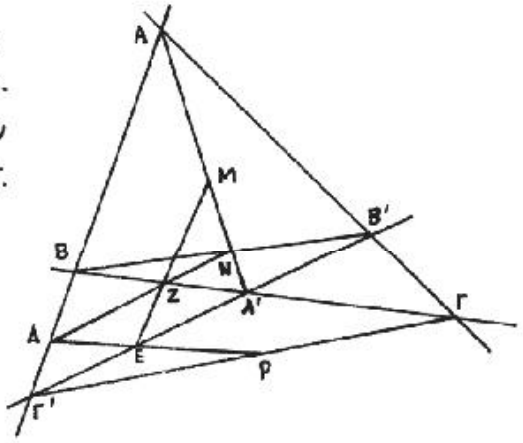
κοινόν ριζικόν ἄξονα τὴν εὐθείαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου[1] (θεώρημα τῶν Gauss-Bodenmiller).

II-20.5

Τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι ἐκ τοῦ προηγουμένου, οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους ἔχουν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα.

Μία ἀκόμη ἀπόδειξις δίδεται εἰς τὴν Ἄσκ. 657 καὶ μία ἀπόδειξις ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου δίδεται κατωτέρω.



Ἔστω Δ,Ε,Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$. Αἱ τριάδες τῶν σημείων κεῖνται ἐπ' εὐθείας: M,Z,E - N,Z,Δ - Δ,E,P. Εἰς τὸ τρίγωνον A'B'Γ' ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατέμνουσαν AB'Γ.

Ἔχομεν:

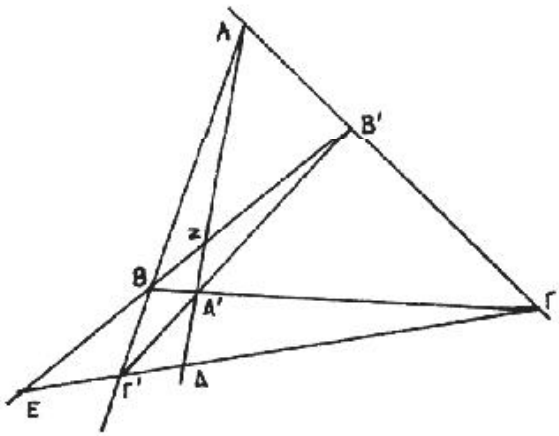
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A\Gamma'}}\cdot\frac{\overline{B'\Gamma'}}{\overline{B'A'}}\cdot\frac{\overline{\Gamma A'}}{\overline{\Gamma B}}=1 \implies \frac{\overline{MZ}}{\overline{M\Gamma}}\cdot\frac{\overline{NZ}}{\overline{N\Delta}}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{P\Delta}}=1$$

Ἦτοι διὰ τὸ $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ ἰσχύει τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου διὰ τὰ σημεῖα M,N,P.

II-20.6

Ἑκάστη διαγώνιος τοῦ πλήρους τετραπλεύρου τέμνεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις:



Εἰς τὸ τρίγωνον AΓΓ' ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατέμνουσαν τὴν BBE.

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{B\Gamma'}}\cdot\frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{E\Gamma'}}\cdot\frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}}=1 \qquad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον AΓΓ' ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Ceva διὰ τὸ σημεῖον A'.

$$\frac{\overline{B\Gamma'}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta\Gamma'}}\cdot\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'\Gamma}}=-1 \qquad (2)$$

πολ/ζομεν τὰς (1),(2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta\Gamma'}}=-\frac{\overline{E\Gamma'}}{\overline{E\Gamma}} \implies \Gamma,\Gamma'-\Delta,E \text{ ἁρμονικὴ τετράς.}$$

Παρατηρήσεις

Τῇ βοηθείᾳ θεωρημάτων ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν δυνάμεθα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς Ἄσκ. 600 νὰ ἐ-

---

(1) Οὕτω ἔχομεν καὶ μίαν διαφορετικὴν ἀπόδειξιν τῆς II.20.3 διὰ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων.

πιτύχωμεν διαφορετικήν λύσιν:

$$\frac{(\Gamma'A'\Gamma)}{(A\Gamma\Gamma')}=\frac{(BA'B')}{(BAB')} \quad \Longrightarrow \quad A,A'-Z,\Delta \text{ ἁρμονική τετράς.}$$

11-21 Τὰ σημεῖα τοῦ Brocard

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (AB) τὸν διερχόμενον διὰ τῶν κορυφῶν A,B τριγώνου ABΓ καὶ ἐφαπτόμενον τῆς πλευρᾶς BΓ.

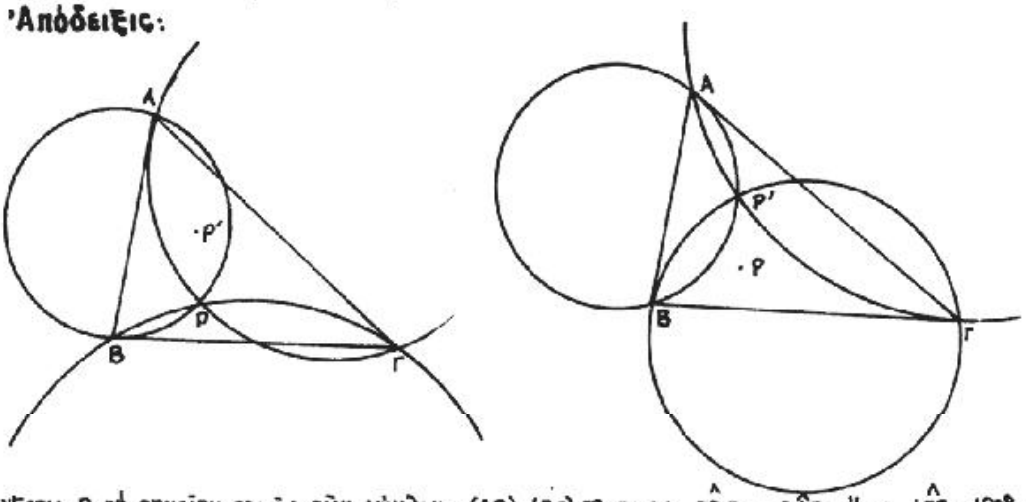
Ἡ κυκλικὴ μετάθεσις τῶν A,B,Γ θὰ δώσῃ οὕτω ἓν σύνολον G τριῶν κύκλων: $G=\{(AB),(B\Gamma),(\Gamma A)\}$.

Ὁμοίως. Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (BA) τὸν διερχόμενον διὰ τῶν σημείων B,A καὶ ἐφαπτόμενον τῆς AΓ. Ἡ κυκλικὴ μετάθεσις τῶν A,B,Γ θὰ δώσῃ τὸ σύνολον $G'=\{(BA),(\Gamma B),(A\Gamma)\}$.

11-21.1

Οἱ κύκλοι τοῦ G διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου P. Οἱ κύκλοι τοῦ G' διέρχονται διὰ σημείου P'. Τὰ σημεῖα P καὶ P' ὀνομάζονται σημεῖα τοῦ B r o c a r d.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω P τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων (AB),(BΓ). Ἔχομεν: $\hat{\Gamma BP}=\hat{PAB}$, ἄρα $\hat{APB}=180°-B$. Ὁμοίως $\hat{BP\Gamma}=180°-\Gamma$. κατ' ἀνάγκην ἡ γωνία $\hat{\Gamma PA}$ ἰσοῦται πρὸς $180°-A$, ἤτοι ὁ κύκλος (ΓA) θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ P. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι οἱ κύκλοι G' διέρχονται διὰ τοῦ P'.

Παρατήρησις

Τὸ σημεῖον P εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Miquel ἂν $\Delta=B$, $E=\Gamma$, $Z=A$. Τὸ σημεῖον P' εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Miquel διὰ $\Delta=\Gamma$, $E=A$, $Z=B$. Ἂν θεωρήσωμεν λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον $\Delta\hat{E}Z$ ὡς $B\hat{\Gamma}A$ ($\Delta\in B\Gamma$, $E\in\Gamma A$, $Z\in AB$) τὸ σημεῖον Miquel τοῦ $\Delta\hat{E}Z$ πρὸς τὸ $A\hat{B}\Gamma$ ταυτίζεται μὲ τὸ σημεῖον P τοῦ Brocard.

11-21.2

Τὰ σημεῖα PP' εἶναι ἰσογώνια συζυγῆ.

Ἀπόδειξις:

Διὰ τὰ σημεῖα τοῦ Brocard ἔχομεν, προφανῶς:

$$\hat{PAB} = \hat{PB\Gamma} = P\hat{\Gamma}A = \omega \quad , \quad \hat{P'BA} = \hat{P'\Gamma B} = \hat{P'A\Gamma} = \omega'$$

Θέτομεν P_1 τὸ ἰσογώνιον συζυγὲς τοῦ P. Θὰ εἶναι ὡς γνωστὸν:

$\hat{PAB} = \hat{P_1A\Gamma}$, $\hat{PB\Gamma} = \hat{P_1BA}$, $\hat{P\Gamma A} = \hat{P_1\Gamma B}$, ἤτοι: $\hat{P_1BA} = \hat{P_1\Gamma B} = \hat{P_1A\Gamma} \Longrightarrow P' \equiv P_1$.

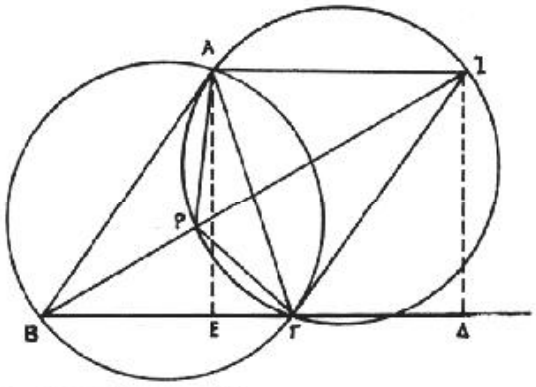
Ἄρα λοιπὸν καὶ $\omega = \omega'$.

Ἡ γωνία ω θὰ ὀνομάζεται γωνία τοῦ Brocard.

11-21.3

Κατασκευὴ τῆς γωνίας τοῦ Brocard.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν κατασκευάσει ἤδη ἐκ τῶν κύκλων τοῦ συνόλου G, ἔστω τὸν (ΓΑ). Ἡ κατασκευὴ τοῦ σημείου P καὶ φυσικὰ καὶ τῆς γωνίας ω τοῦ Brocard ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς.



Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (ΓΑ) εἰς σημεῖον Ι. Φέρομεν τὴν ΒΙ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (ΓΑ) εἰς τὸ σημεῖον τοῦ Brocard P. Πράγματι: $\hat{PAB} = P\hat{\Gamma}A$, $\hat{PAB} = A\hat{IP} = \hat{PB\Gamma}$.

Παρατηρήσεις

$\hat{\Delta\Gamma I} = \Gamma\hat{I}A = \hat{A}$ ἤτοι ΙΓ ἐφαπτομένη τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

11-21.4

Ἡ γωνία τοῦ Brocard δίδεται ἐκ τοῦ τύπου: $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma$.

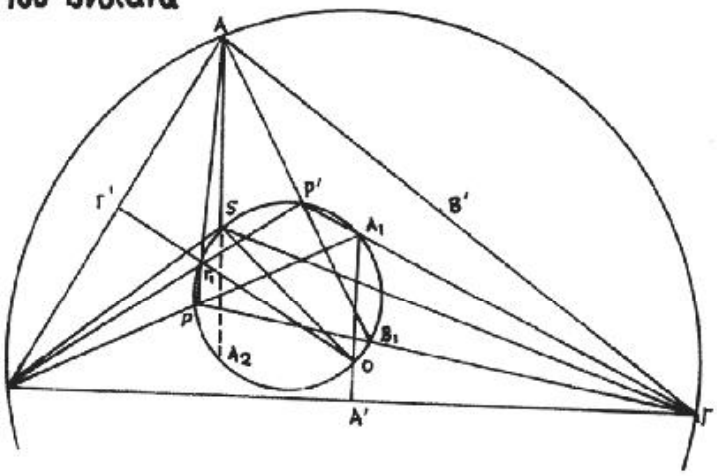
Ἀπόδειξις:

Φέρομεν τὰς ΙΔ, ΑΕ καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{B\Delta}{I\Delta} = \frac{BE}{I\Delta} + \frac{E\Gamma}{I\Delta} + \frac{\Gamma\Delta}{I\Delta} = \frac{BE}{AE} + \frac{E\Gamma}{AE} + \frac{\Gamma\Delta}{I\Delta} \Longrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma$$

11-21.5 Ὁ κύκλος τοῦ Brocard

Ἔστω S τὸ σημεῖον τομῆς τῶν συμμετροδιαμέσων τριγώνου ΑΒΓ καὶ O τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ὁ κύκλος διαμέτρου OS ὀνομάζεται κύκλος τοῦ Brocard.



Θέτομεν Α', Β', Γ' εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ,

ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' τέμνουν τὸν κύκλον τοῦ Brocard εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. Τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ὀνομάζεται **πρῶτον τρίγωνον τοῦ Brocard**. Ἂν A_2, B_2, Γ_2 τὰ σημεῖα τομῆς τῶν συμμετροδιαμέσων AS, BS, ΓS μετὰ τοῦ κύκλου τοῦ Brocard τὸ τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$ καλεῖται **δεύτερον τρίγωνον τοῦ Brocard**.

II-21.6

Τὸ πρῶτον τρίγωνον τοῦ Brocard εἶναι (ἀντιστρόφως) ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις:

Εἶναι $A_1\hat{O}\Gamma_1 = \hat{B} = B_1$.

II-21.7

Τὰ σημεῖα Brocard εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ κύκλου Brocard.

Ἀπόδειξις:

Ἡ ἀπόστασις τοῦ S ἀπὸ τὴν ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ τμῆμα A_1A'. Ἄρα βάσει τοῦ II-14.6, ἔχομεν:

$$\frac{A_1A'}{\alpha} = \frac{B_1B'}{\beta} = \frac{\Gamma_1\Gamma'}{\gamma} \qquad (1)$$

(1) $\Longrightarrow A_1\hat{A}'B \sim B_1\hat{B}'\Gamma \sim \Gamma_1\hat{\Gamma}'A \Longrightarrow A_1\hat{A}'B = B_1\hat{B}'\Gamma = \Gamma_1\hat{\Gamma}'A$. Ἄρα αἱ $BA_1, \Gamma B_1, A\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ P.

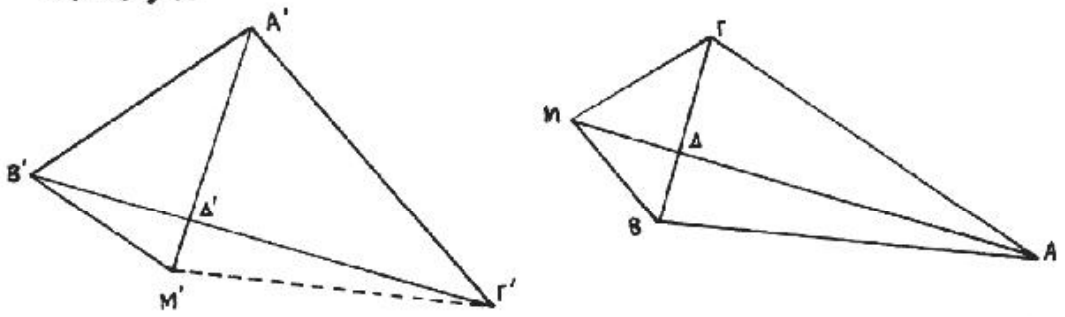
Ἐπειδὴ δὲ $B\hat{P}\Gamma = 180^\circ - \Gamma \Longrightarrow A_1\hat{P}B_1 = \Gamma$ ἤτοι τὸ σημεῖον P εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου τοῦ Brocard.

II-22 Μεταπαράλληλα τρίγωνα

Ἂν αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν A, B, Γ τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμεναι παράλληλοι εὐθεῖαι πρὸς τὰς πλευρὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντιστοίχως, ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ' διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ τότε καὶ ἐκ τῶν Α', Β', Γ' παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ'.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' θὰ ὀνομάζωνται **μεταπαράλληλα** τὰ σημεῖα δὲ Μ' καὶ Μ' **μεταπολικά**.

Ἀπόδειξις:



Ἔστω $A'M' // B\Gamma$ καὶ $B'M' // A\Gamma$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\Gamma'M' // AB$.

$$\overset{\Delta}{\Gamma M\Delta} \sim A'B'\Delta' \implies \frac{\Gamma\Delta}{A'\Delta'} = \frac{M\Delta}{B'\Delta'} \implies \Gamma\Delta \cdot B'\Delta' = A\Delta' \cdot M\Delta \qquad (1)$$

$$\overset{\Delta}{BM\Delta} \sim A'\Gamma'\Delta' \implies \frac{\Delta M}{A'\Delta'} = \frac{M\Delta}{\Gamma'\Delta'} \implies B\Delta \cdot \Gamma'\Delta' = A'\Delta' \cdot M\Delta \qquad (2)$$

$$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} \sim B'\Delta'M' \implies \frac{\Gamma\Delta}{\Delta'M'} = \frac{A\Delta}{B'\Delta'} \implies \Gamma\Delta \cdot B'\Delta' = A\Delta \cdot \Delta'M' \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \implies B\Delta \cdot \Gamma'\Delta' = A\Delta \cdot \Delta'M' \implies \frac{B\Delta}{\Delta'M'} = \frac{A\Delta}{\Gamma'\Delta'} \implies \overset{\Delta}{M'\Delta'\Gamma'} \sim \overset{\Delta}{B\Delta A} \implies \Gamma'M' \,//\, AB$$

11-23 Ὀρθολογικὰ τρίγωνα

Ἂν αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμεναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς πλευρὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' τριγώνου Α'Β'Γ' διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ, τότε καὶ αἱ ἐκ τῶν Α', Β', Γ' κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ'.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ὀνομάζονται **ὀρθολογικά**, τὰ σημεῖα δὲ Μ καὶ Μ' **ὀρθοπολικά**.

Ἡ ἀπόδειξις βάσει τοῦ προηγουμένου, ἀρκεῖ τὸ τρίγωνον Α',Β',Γ' νὰ στραφῇ κατὰ γωνίαν 90° εἰς τὸ ἐπίπεδόν του.

Σημειώσεις.

1. Διὰ τὰς ἀποδείξεις τῶν 11-22, 11-23 ἴδε καὶ Ἀσκήσεις: 670, 330.

2. Ἐὰν θεωρήσωμεν, διὰ τὸ 11-23, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ ἐπ' ἀπείρου σημεῖον τῶν Α', Β', Γ' θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (η).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον Μ' ὀνομάζεται **ὀρθοπόλος** τῆς (η) πρὸς τὸ $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ Α'.

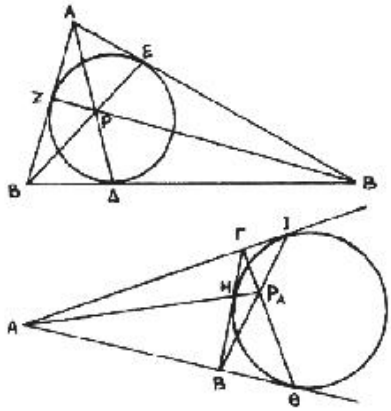
1044. α) Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μὲ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου **(σημεῖον τοῦ Gergonne)**.

β) Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ἑνὸς παρεγγεγραμμένου κύκλου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου **(προσηρτημένα σημεῖα τοῦ Gergonne)**.

Ἀπόδειξις:

α) Εἶναι προφανὲς ὅτι $\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$ καὶ συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Ceva αἱ $A\Delta, BE, \Gamma Z$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

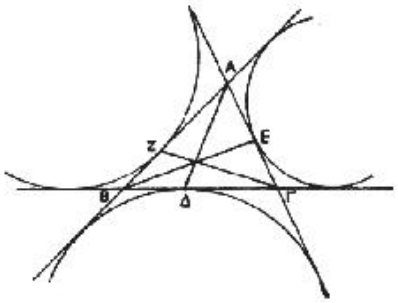
β) Ὁμοίως ἰσχύει $\frac{\overline{\Theta A}}{\overline{\Theta B}} \cdot \frac{\overline{H B}}{\overline{H\Gamma}} \cdot \frac{\overline{I\Gamma}}{\overline{IA}} = -1$.



1045. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἀντιστοίχου παρεγγεγραμμένου κύκλου μὲ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου **(σημεῖον Nagel)**.

Ἀπόδειξις:

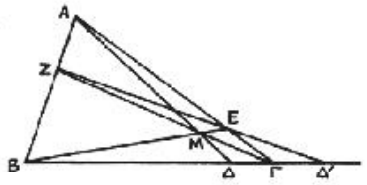
Εἶναι ὡς γνωστὸν $B\Delta = \tau-\gamma$, $\Delta\Gamma = \tau-\beta$, $AE = \tau-\gamma$, $\Gamma E = \tau-\alpha$, $AZ = \tau-\beta$, $BZ = \tau-\alpha$. Ἄρα $\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva αἱ $A\Delta, B\Xi, \Gamma Z$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



1046. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ αἱ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου M διερχόμεναι Cevians $A\Delta, BE, \Gamma Z$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τῶν τριγώνων ΔEZ καὶ $AB\Gamma$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας **(πολική τοῦ M πρὸς $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$)**.

Ἀπόδειξις:

α) Θέτομεν $\Delta' = B\Gamma \cap ZE$, $E' = \Gamma A \cap \Delta Z$, $Z' = AB \cap E\Delta$.



Εἰς τὸ πλῆρες τετράπλευρον ΑΒΕΖΜΓ αἱ ΖΕ, ΑΜ, ΒΓ εἶναι αἱ διαγώνιοι καὶ ἔχομεν ὡς γνωστὸν $\frac{\overline{\Delta'\Gamma}}{\overline{\Delta'B}} = -\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta B}}$ (1). Ὁμοίως $\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EA}}$ (2), $\frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'\Gamma}} = -\frac{\overline{ZA}}{\overline{Z\Gamma}}$ (3).

Κατὰ συνέπειαν $\frac{\overline{\Delta'\Gamma}}{\overline{\Delta'B}} \cdot \frac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'\Gamma}} = -\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{Z\Gamma}} = 1$.

Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου τὰ Δ', Ε', Ζ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

β) Τὰ σημεῖα Μ, Δ' εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ $\hat{AB\Gamma}$ κύκλον. Ἤτοι τὸ Δ' εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ Μ. Ὁμοίως διὰ τὰ Ε', Ζ'.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἔχει πολικὴν τὴν Δ'Ε'Ζ' καὶ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Σημειώσεις:

Ἰδὲ καὶ ἄσκησιν 664.

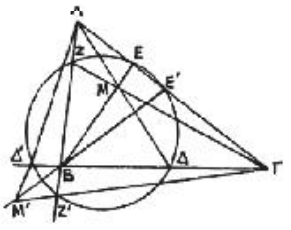
Ἀκόμη εὐκόλως ἀποδεικνύεται τὸ ἀντίστροφον. Ἐὰν τμήσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ $\hat{AB\Gamma}$ διὰ μιᾶς εὐθείας εἰς Δ', Ε', Ζ' καὶ λάβωμεν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν ὥστε αἱ ΖΕ, ΔΖ, ΕΔ νὰ διέρχωνται διὰ τῶν Δ', Ε', Ζ' ἀντιστοίχως τότε αἱ Cevians ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Παρατηρήσατε ἀκόμη ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι συσχετισμένα κατὰ Dejark.

1047. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ αἱ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ διερχόμεναι Cevians ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Ὁ κύκλος περὶ τὸ $\hat{\Delta EZ}$ τέμνει τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς Δ', Ε', Ζ' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ'. (Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται **σημεῖα τοῦ Terquen** ὡς πρὸς τρίγωνον ἀναφορᾶς τὸ $\hat{AB\Gamma}$).

Ἀπόδειξις:

Λαμβάνομεν τὴν δύναμιν τοῦ Β πρὸς τὸν κύκλον. $\overline{\Delta'B} \cdot \overline{\Delta B} = \overline{Z'B} \cdot \overline{ZB} \Longrightarrow \frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{\Delta B}}$ (1).



Ὁμοίως $\frac{\overline{E'\Gamma}}{\overline{\Delta'\Gamma}} = \frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{E\Gamma}}$ (2), $\frac{\overline{Z'A}}{\overline{E'A}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{ZA}}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \frac{\overline{\Delta'B}}{\overline{\Delta'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E'\Gamma}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'B}} = -\frac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta\Gamma}} \cdot \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$.

Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva αἱ ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

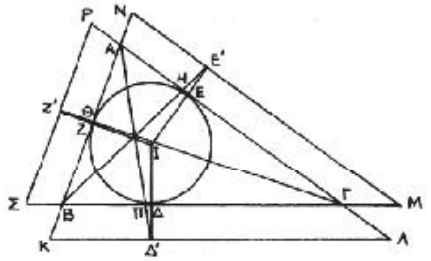
1048. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ (Ι) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος. Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐπὶ τῶν ΙΔ, ΙΕ, ΙΖ λαμβάνομεν σημεῖα Δ', Ε', Ζ' ὥστε $I\Delta' = IE' = IZ'$. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις:

Είναι λόγω συμμετρίας πρός ΓΙ, $\Delta'\Lambda = E'M$ (ἰδέ σχῆμα, $K\Lambda \parallel B\Gamma$). Διά τόν αὐτόν λόγον $\Delta'K = Z'\Sigma$, $E'N = Z'P$.

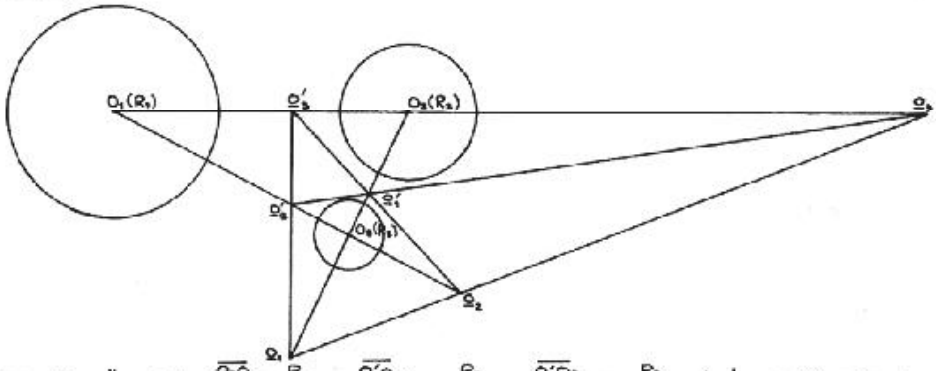
Ἀλλά ὡς εἶναι προφανές $\frac{\Pi B}{\Pi\Gamma} = \frac{\Delta'K}{\Delta'\Lambda}$, $\frac{H\Gamma}{HA} = \frac{E'M}{E'N}$, $\frac{\Theta A}{\Theta B} = \frac{Z'P}{Z'\Sigma}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων διά πολλαπλασιασμοῦ κατά μέλη ἔχομεν $\frac{\Pi B}{\Pi\Gamma}\cdot\frac{H\Gamma}{HA}\cdot\frac{\Theta A}{\Theta B} = \frac{\Delta'K}{\Delta'\Lambda}\cdot\frac{E'M}{E'N}\cdot\frac{Z'P}{Z'\Sigma} = -1$.



1049. Τά ἕξ κέντρα ὁμοιοθεσίας τριῶν κύκλων, λαμβανομένων ἀνά δύο, κεῖνται ἐπί τεσσάρων εὐθειῶν. Ἤτοι κεῖνται ἐπ' εὐθείας α) τά ἐξωτερικά κέντρα ὁμοιοθεσίας β) δύο ἐσωτερικά καί ἕν ἐξωτερικόν, καθ' ὅλους τούς τρόπους.

Ἀπόδειξις:



Ὡς γνωστόν ἔχομεν $\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}} = \frac{R_1}{R_2}$, $\frac{\overline{O_1'O_2}}{\overline{O_1'O_3}} = -\frac{R_2}{R_3}$, $\frac{\overline{O_2'O_3}}{\overline{O_2'O_1}} = -\frac{R_3}{R_1}$. Διά πολλαπλασιασμοῦ κατά μέλη $\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}}\cdot\frac{\overline{O_1'O_2}}{\overline{O_1'O_3}}\cdot\frac{\overline{O_2'O_3}}{\overline{O_2'O_1}} = 1$. Ἄρα κατά τό θεώρημα τοῦ Μενελάου διά τό τρίγωνον $O_1O_2O_3$ τά σημεῖα O_1', O_2', O_3' κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί διά τάς λοιπάς τριάδας σημείων.

Σημείωσις:

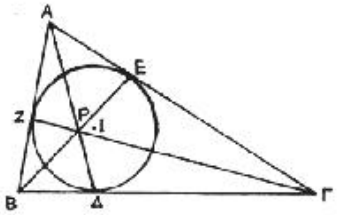
Ἰδέ καί ἄσκησιν 554.

1050. Ἔστω (I) ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ. Δ, Ε, Ζ τά σημεῖα ἐπαφῆς ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ὡς γνωστόν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ρ (σημεῖον Gergonne). Θά δείξωμεν ὅτι $\frac{\overline{P\Delta}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PZ}}{\overline{P\Gamma}} = -\frac{\rho}{4R}$ (Thiry).

Ἀπόδειξις:

Ὡς γνωστόν (ἄσκ. 614) $\frac{\overline{PA}}{\overline{P\Delta}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} + \frac{\overline{EA}}{\overline{E\Gamma}} = -(\tau-\alpha)\left(\frac{1}{\tau-\beta}+\frac{1}{\tau-\gamma}\right) = \frac{-\alpha(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

Ὁμοίως $\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{-\beta(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}$ καί $\frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{PZ}} = \frac{-\gamma(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$.



Διά πολλαπλασιασμοῦ κατά μέλη προκύπτει $\frac{\overline{PA}}{\overline{P\Delta}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}}\cdot\frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{PZ}} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = -\frac{4ER\cdot\tau}{E^2} = -\frac{4R}{\rho}$.

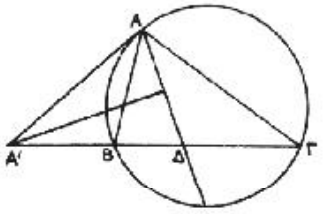
Ὅθεν $\frac{\overline{P\Delta}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PZ}}{\overline{P\Gamma}} = -\frac{\rho}{4R}$.

Παρατηρήσεις:

α) Άλλην λύσιν δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν ἄν ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα τοῦ Μενελάου εἰς τό τρίγωνον ΑΒΔ μέ διατέμνουσαν τήν ΓΡΖ. Ἡ κυκλική ἐναλλαγή εἰς τήν προκύπτουσαν ἰσότητα θά μᾶς δώση δύο ἄλλας ἰσότητας. Πολλαπλασιάζομεν κατά μέλη.

β) Παρόμοιον πρόβλημα μέ ἕνα ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων (ἕν ἐκ τῶν προσηρτημένων σημείων Gergonne). Τό δεύτερον μέλος θά εἶναι $\frac{\rho_\alpha}{4R}$.

1051. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O,R). Νά δειχθῆ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τάς κορυφάς Α,Β,Γ τέμνουν τάς ἀπέναντι πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς σημεῖα Α′,Β′,Γ′ κείμενα ἐπ' εὐθείας.



Ἀπόδειξις:

$A'\hat{B}A \sim A'\hat{A}\Gamma \Longrightarrow \frac{A'B}{A'A} = \frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{A'A}{A'\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Ἄρα $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$. Ὁμοίως $\frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ καί $\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Πολλαπλασιάζομεν κατά μέλη καί ἔχομεν $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}} = 1$. Κατά τό θεώρημα λοιπόν τοῦ Μενελάου τά Α′,Β′,Γ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

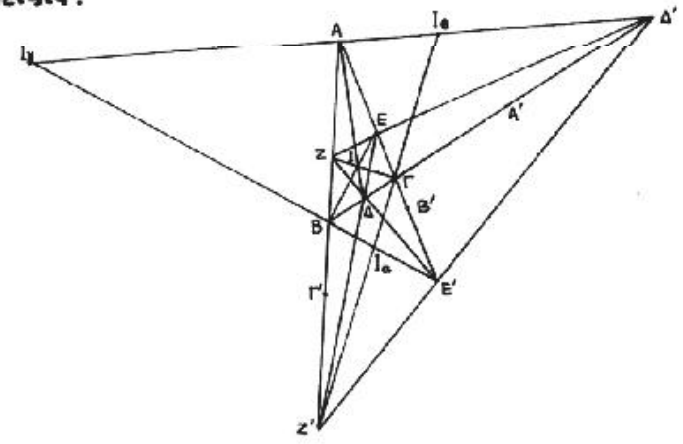
Παρατηρήσεις:

Ἐάν ΑΔ ἡ διχοτόμος, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι τό τρίγωνον ΑΑ′Δ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τό θεώρημα:

Αἱ μεσοκάθετοι ἐπί τάς διχοτόμους τέμνουν τάς ἀντιστοίχους πλευράς εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

1052. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνουν τάς ἀπέναντι πλευράς εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:



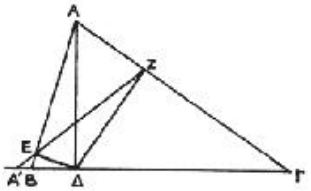
Ἐάν Ι τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων, τά σημεῖα τομῆς Δ′,Ε′,Ζ′ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων μέ τάς ἀπέναντι πλευράς κεῖνται ἐπί τῆς πολικῆς τοῦ Ι πρός $A\hat{B}\Gamma$ (ἰδέ ἄσκ. 1046).

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἐφαπτομένη εἰς Α τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό $A\hat{B}\Gamma$ τέμνει τήν ΒΓ εἰς τό μέσον Α′ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔΔ′. Ἀ-

ναλόγως ἔχομεν τὰ σημεῖα B', Γ' (ἴδε ἄσκ. 1051). Εἰς τὸ πλῆρες τετράπλευρον $\Delta Z'E'ZE\Delta'$ τὰ σημεῖα A', B', Γ' εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του $\Delta\Delta', EE', ZZ'$. Ἀκόμη, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ἄσκησιν 506, ἡ εὐθεία $\Delta'E'Z'$ εἶναι ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων $AB\Gamma, I_\alpha I_\beta I_\gamma$.

1053. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta$ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς ΔE καὶ ΔZ καθέτους ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$. Θέτομεν $A' = B\Gamma \cap EZ$. Ἀναλόγως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα B' καὶ Γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι A', B', Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις:



Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μὲ διατέμνουσαν ZEA'. $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = 1 \Longrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{Z\Gamma}}$ (1).

Ἀλλὰ $A\hat{\Delta}B \Longrightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{B\Delta^2}{v_\alpha^2}$ (2), $A\hat{\Delta}\Gamma \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\overline{ZA}}{\overline{Z\Gamma}} = \frac{v_\beta^2}{\Delta\Gamma^2}$ (3).

(1), (2), (3) $\Longrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} = \frac{\overline{B\Delta}^2}{\overline{\Delta\Gamma}^2}$.

Συνεχίζοντες μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}} = \left[\frac{B\Delta \cdot \Gamma Z \cdot AE}{\Delta\Gamma \cdot ZA \cdot EB}\right]^2$. Δεδομένου ὅτι τὰ ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τὸ δεύτερον μέλος θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου μονάς, ἄρα A', B', Γ' ἐπ' εὐθείας.

1054. Τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα Simson ἑνὸς ἑκάστου σημείου, πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τρία σημεῖα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Διὰ τοῦ σημείου τούτου διέρχονται ἀκόμη αἱ τέσσαρες περιφέρειαι Euler τῶν ἐν λόγῳ τεσσάρων τριγώνων.

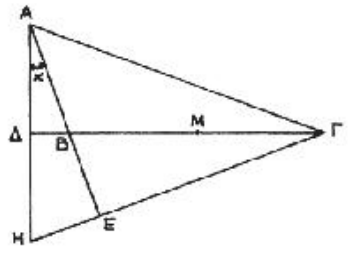
Ἀπόδειξις:

Θέτομεν H_A τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\hat{B\Gamma\Delta}$. Ἀναλόγως τὰ H_B, H_Γ, H_Δ. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $AH_A, BH_B, \Gamma H_\Gamma, \Delta H_\Delta$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου T, ὅπερ καὶ διχοτομεῖ ἕκαστον.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν δὲ τὰς 11.3.2, 11.3.3 συμπεραίνομεν ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι Simson, ὡς καὶ αἱ τέσσαρες περιφέρειαι Euler, διέρχονται διὰ τοῦ T.

1055. Ἐὰν εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ὁ κέντρον O_1 τῆς περιφερείας τοῦ Euler κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τότε ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν B, Γ εἶναι $90°$.

Ἀπόδειξις:

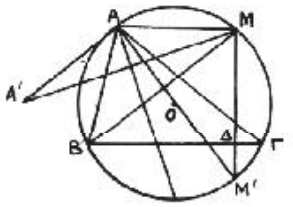


Ἔστω M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς AH. Ὡς γνωστὸν $M\Delta$ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων, ἄρα τὸ ὀρθόκεντρον H εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς $B\Gamma$ διὰ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἤτοι AGH ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς $\hat{B} = 90° + \hat{x} = 90° + \hat{\Gamma}$.

1056. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ σημεῖον M τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ συμμετρικὰ τῶν $MA, MB, M\Gamma$ πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν A, B, Γ ἀντιστοίχως εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Απόδειξις:

Η ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπί τήν ΒΓ τέμνει τήν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Μ'. Ὡς γνωστόν ἡ ΑΜ' εἶναι παράλληλος πρός τήν εὐθείαν τοῦ Simson τοῦ σημείου Μ. Θέτομεν Α' εἰς τό συμμετρικόν τοῦ Μ πρός τήν διχοτόμον τῆς $\hat{A}$. Εἶναι $A'\hat{A}B = M\hat{A}\Gamma = M\hat{B}\Gamma$ (1) καί $B\hat{A}M' = B\hat{M}\Delta$ (2).



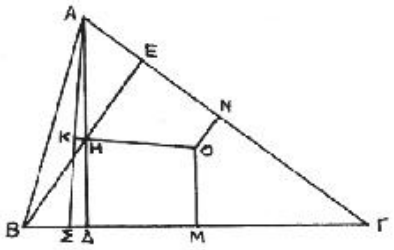
(1), (2) $\Longrightarrow A'\hat{A}B + B\hat{A}M' = M\hat{B}\Delta + B\hat{M}\Delta = 1^L$. Ἄρα ἡ ΑΑ' εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθείαν τοῦ Simson τοῦ Μ. Τό αὐτό διά τά συμμετρικά Β'Β, Γ'Γ τῶν ΒΜ, ΓΜ πρός τάς διχοτόμους τῶν $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$.

ΟΜΑΣ Β'.

1057. Ἐάν ἡ συμμετροδιάμεσος ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθείαν τήν συνδέουσαν τό ὀρθόκεντρον Η μέ τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου Ο, θά εἶναι $\frac{\beta^4+\gamma^4}{\beta^2+\gamma^2} = \alpha^2$.

Απόδειξις:

Θά χρησιμοποιήσωμεν τήν συνθήκην καθετότητος τήν ὁποίαν δίδομεν εἰς τήν ἄσκ. 311.



$A\Sigma \perp OH \Longleftrightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{EN} = \frac{A\Gamma}{\Delta M}$ (1).

Ὑπολογίζομεν τά τμήματα ΔΜ, ΕΝ.

$\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha\cdot\Delta M \Longrightarrow \Delta M = \frac{\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$ (2).

$\alpha^2-\gamma^2 = 2\theta\cdot EN \Longrightarrow EN = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\theta}$ (3).

Ὡς γνωστόν $\frac{B\Sigma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Longrightarrow \frac{B\Sigma}{\gamma^2} = \frac{\Sigma\Gamma}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2+\gamma^2} \Longrightarrow \Gamma\Sigma = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$ (4).

(1), (2), (3), (4) $\Longrightarrow \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{2\theta}{\alpha^2-\gamma^2} = \frac{2\alpha\beta}{\beta^2-\gamma^2} \Longrightarrow \frac{\beta^4+\gamma^4}{\beta^2+\gamma^2} = \alpha^2$.

1058. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τά μέσα τῶν διαγωνίων ὅλων τῶν τετραπλεύρων πού σχηματίζονται ἀπό τέσσερες διαδοχικές πλευρές ἑνός πενταγώνου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Απόδειξις:

